

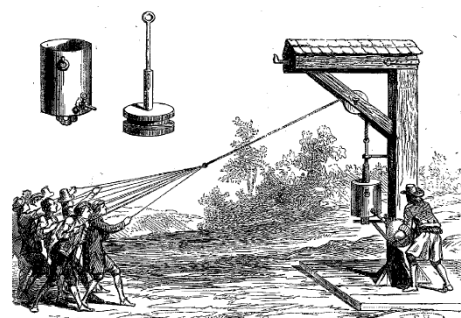
Statique des fluides

1. Quelques ordres de grandeur

1. À quelle condition la pression au sein d'une solution aqueuse dans un récipient à l'air libre est-elle uniforme à 1% près?
2. Même question pour de l'air dans l'atmosphère isotherme.
3. Peut-on négliger les variations de la pression dans l'air pour étudier l'équilibre mécanique d'un ballon de 1 m^3 rempli d'hélium? d'une statue en bronze de 10 m de haut?
4. Quelle masse maximale peut-on espérer pouvoir suspendre à une ventouse de 5 cm de diamètre?
5. Pour concrétiser l'expression courante «léger comme l'air», donner une estimation de la masse d'air dans votre chambre. On dit parfois que la tour Eiffel de masse 7000 tonnes est plus légère que l'air contenu dans un parallélépipède de hauteur 324 m et de base 125 m. Que pensez vous de cette affirmation? Faut-il tenir compte de la variation de la pression entre la base et le sommet de la tour Eiffel pour faire ce calcul?
6. Pourquoi peut-on enfoncer une punaise dans un mur?
7. Commentez les deux expériences historiques suivantes :

Les puisatiers de Florence *Les fontainiers du grand-duc de Florence avaient construit, pour amener l'eau dans le palais ducal, des pompes aspirantes dont le tuyau dépassait quarante pieds (12,99 m) de hauteur. Quand on voulut les mettre en jeu, l'eau refusa de s'élever jusqu'à l'extrémité du tuyau. Galilée, consulté sur ce fait, mesura la hauteur à laquelle s'arrêtait la colonne d'eau et la trouva d'environ trente deux pieds (10,395 m). Il apprit alors des ouvriers employés à ce travail que ce phénomène était constant, et que l'eau ne s'élevait jamais, dans les pompes aspirantes, à une hauteur supérieure à trente deux pieds.*

Les expériences d'Otto Von Guericke *Otto Von Guericke vissa à un cylindre métallique le récipient de verre de sa machine pneumatique, dans lequel on avait fait préalablement le vide. Dans l'intérieur de ce cylindre jouait un piston, auquel était attaché, par un anneau, une corde s'enroulant sur une poulie. Vingt personnes étaient employées à retenir la corde. Tout se trouvant ainsi disposé, Otto Von Guericke ouvrit subitement le robinet du ballon : l'air contenu dans le cylindre se précipita dans l'intérieur du ballon vide pour en remplir la capacité, et dès lors la pression atmosphérique qui s'exerçait sur la base du piston, n'étant plus contrebalancée sur sa face inférieure, abaissa aussitôt le piston jusqu'au fond du cylindre avec tant de violence, que les vingt personnes qui retenaient la corde se trouvèrent soulevées en l'air à plusieurs pieds de hauteur.*

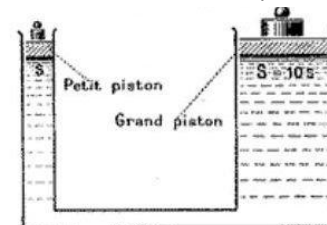


Expérience faite par Otto de Guericke en 1654, devant le prince de Auerberg.

2. Poussée d'Archimède Un morceau de métal de volume inconnu est suspendu à un fil inextensible ; l'autre bout du fil est fixé à un dynamomètre. Suspendu verticalement dans l'air, le dynamomètre mesure 10 N. On immerge alors le métal dans l'eau, la valeur du dynamomètre chute à 8 N. En déduire la masse volumique du métal.

3. Application directe du cours Soit un tube en U dans lequel se trouvent deux liquides de masses volumiques respectives ρ et ρ' . On note respectivement h et h' les dénivellations entre les surfaces libres des liquides et leur interface. Calculer le rapport des dénivellations h'/h .

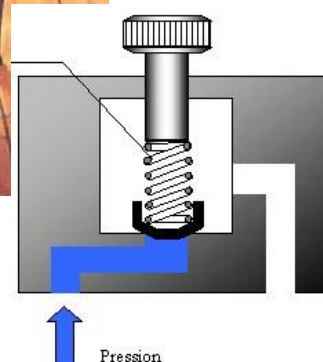
4. Transmission des pressions On trouve au paragraphe « transmission des pressions » d'une encyclopédie du XIX^{ème} siècle, le dispositif ci-contre. A quoi sert-il ? A quoi fait référence l'expression « transmission des pressions » ?



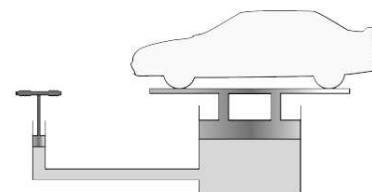
5. Talons aiguilles Comparez les pressions s'exerçant sur les divers points du parquet.



6. Limiteur de pression Discuter de la pression à appliquer au fluide en bleu pour provoquer l'ouverture de la vanne en fonction de la longueur du ressort et de sa constante de raideur.



7. Cric hydraulique* On souhaite lever un véhicule ayant pour masse 1200 kg avec le cric hydraulique schématisé ci-contre. Le piston gauche a pour surface $5,0 \text{ cm}^2$. L'huile au sein du cric est présumée incompressible, c'est à dire que son volume est considéré comme constant quelle que soit la pression. Le but de l'installation est de permettre à une personne de gabarit ordinaire de soulever et maintenir en place le véhicule avec le piston gauche (dont l'extrémité est munie de poignées).



1. Dimensionnez le piston droit (sous le véhicule) afin que la force dans le piston gauche n'excède pas 100 N.
2. Quelle est la puissance nécessaire pour maintenir le véhicule en place ?

On souhaite soulever le véhicule de 25 cm, en 30 secondes au plus.

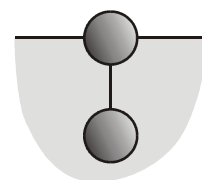
3. Sur quelle distance faudrait-t-il enfoncer le piston gauche pour cela ?
4. Quels seraient alors le travail et la puissance à fournir ?

8. Glaçons et écologie*

1. Un glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras-bord. Lorsque le glaçon aura fondu, le niveau de l'eau sera le même¹. Pourquoi ?
2. On parle souvent des conséquences écologiques de la fonte des glaces aux pôles. Peut-on attribuer une élévation de la hauteur des océans à une fonte des icebergs ?

1. Faites l'expérience à la maison !

9. Flottaison de deux boules* Deux boules de même rayon, liées par un fil, flottent sur l'eau comme représenté sur la figure ci-contre : le centre de la boule supérieure est au niveau de la surface libre de l'eau. Une boule a une masse m et l'autre une masse $3m$. Exprimer la tension du fil en fonction de m et g .



10. Oscillateur d'Archimède* Un cylindre plongé dans un liquide est soumis à un ensemble de forces de poussée équivalentes à une force unique appelée force de poussée d'Archimède. Sa direction est verticale, elle est orientée vers le haut, sa valeur est égale au poids du volume de liquide déplacé et son point d'application, appelé centre de poussée, coïncide avec le centre de gravité du volume de liquide déplacé. Le cylindre est homogène, de section S , de longueur L , de masse volumique μ et flotte sur l'eau. Un système de guidage adapté permet de maintenir en permanence l'axe du cylindre vertical.

1. Exprimer littéralement la valeur F de la force de poussée $\vec{F}$ en fonction de S , μ_e masse volumique de l'eau, h hauteur immergée du cylindre et g valeur du champ de pesanteur.
2. Pour qu'une hauteur $h = L/2$ du solide soit immergée à l'équilibre, quelle relation doit exister entre les masses volumiques μ et μ_e .
3. Le système étant à l'équilibre dans les conditions précédentes on l'enfonce et à un instant pris comme origine des dates on le lâche sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle du mouvement du cylindre en négligeant tout frottement. En déduire la nature du mouvement.
4. Donner l'expression de la période propre des oscillations du solide en fonction de g et L .
5. Vérifier l'homogénéité de cette expression puis calculer la valeur de la période. Données : $L = 10$ cm et $g = 9,8$ N.kg⁻¹.
6. En tenant compte de la présence d'une force de frottement $\vec{f} = -k\vec{v}$ établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle serait la nature de ce mouvement?

11. Bulle au fond d'un lac* Une bulle de gaz monte du fond d'un lac (profondeur 30 m). Arrivée près de la surface, son diamètre est de 1 cm.

1. Quel était son diamètre au fond du lac si on suppose :
 - que la bulle ne s'enrichit ni s'appauvrit en gaz lors de sa montée;
 - que le gaz se comporte comme un gaz parfait;
 - que la variation de température est négligeable entre le fond du lac et la surface.
2. Si on tient compte des variations de température, le diamètre au fond est-il plus grand ou plus petit selon qu'on est en hiver ou en été?

12. Centimètres de mercure** Un tube cylindrique retourné sur une cuve à mercure contient dans sa partie supérieure un gaz parfait. La hauteur de la colonne gazeuse est 10 cm, celle de la colonne de mercure 60 cm. On enfonce le tube de 20 cm : la température du gaz est restée constante, la nouvelle hauteur de la colonne de mercure n'est plus que de 45 cm. En déduire la valeur de la pression atmosphérique. La masse volumique du mercure est $\mu = 13800$ kg.m⁻³.

13. Hémisphères de Magdebourg*

Commentez les valeurs numériques suivantes :

Otto Von Guericke construisit ensuite une autre sphère d'une aune (1,19 m) de diamètre. L'effort de vingt-quatre chevaux ne put rompre l'adhérence de ses deux parties : les hémisphères supportaient sans se séparer un poids de cinq mille quatre cents livres (2643 kg).

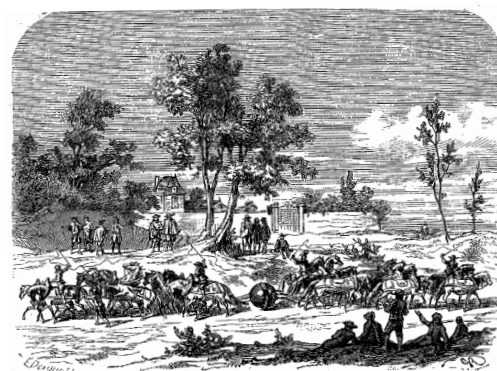
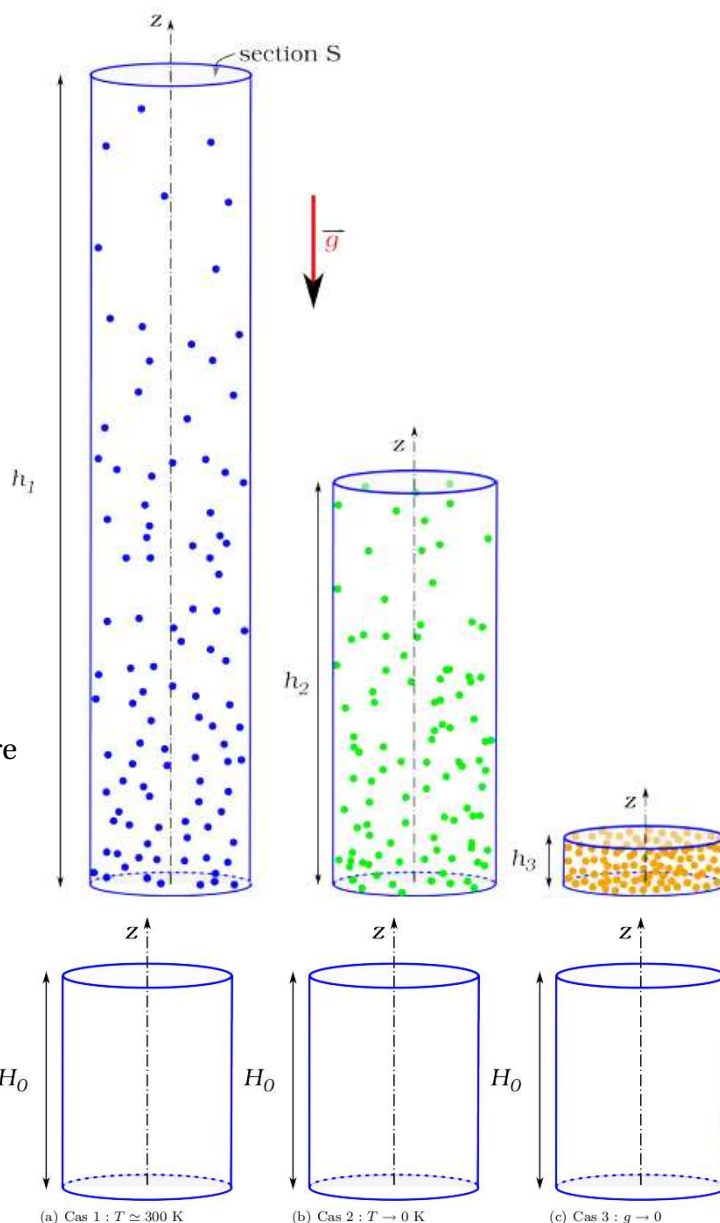


Fig. 23. — Otto de Guericke fait l'expérience des hémisphères de Magdebourg avec 24 chevaux.

14. Détermination du nombre d'Avogadro* Soit une colonne verticale cylindrique de section S , d'axe Oz ascendant, contenant des molécules à l'état gazeux, de masse m , à l'équilibre thermique à la température T dans le champ de pesanteur.

1. Rappeler l'expression de la relation fondamentale de la statique des fluides.
2. En supposant le gaz parfait, établir l'expression donnant la pression dans le gaz en fonction de l'altitude z . En déduire que celle de la densité volumique $n_V(z)$ en fonction de l'altitude peut s'écrire $n_V(z) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ où M est la masse molaire du gaz. Préciser la signification de n_0 .
3. Sur la figure ci-contre sont représentées trois colonnes, de même section S et de hauteurs h_i différentes contenant respectivement de l'hélium, du dihydrogène et du dioxygène, de manière à ce que chaque cylindre contienne le même nombre de molécules. Interpréter cette figure, en particulier associer à chaque cylindre son gaz.
4. On considère, comme sur la figure ci-contre, une colonne de hauteur fixe H_0 et on suppose qu'on peut placer 10 atomes d'hélium (He) à l'intérieur. Compléter la figure afin de donner la répartition de ces molécules selon les hypothèses suivantes :
 - cas 1 : température ambiante ($T \approx 300$ K) ;
 - cas 2 : température quasi-nulle ($T = 0$ K) ;
 - cas 3 : gravité quasi-nulle ($g \rightarrow 0$ m.s⁻²)

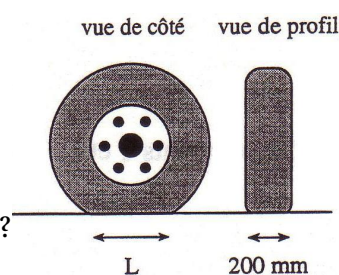


15. Mesure de la constante de Boltzmann* Dans une expérience historique, Jean Perrin a pu observer au microscope la répartition à l'équilibre de petites sphères de latex de rayon $a = 0,12 \mu\text{m}$ et de masse volumique $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Pour différentes altitudes équidistantes de $d = 30 \mu\text{m}$, il mesurait à une température $T = 293$ K, des concentrations C proportionnelles aux nombres N indiqués dans le tableau ci-dessous. Vérifier que ces résultats sont compatibles avec une loi statistique de Boltzmann (de la forme $C(z) = C_0 e^{-mgz/(k_B T)}$) et en déduire une mesure k_B .

z	$5 \mu\text{m}$	$35 \mu\text{m}$	$65 \mu\text{m}$	$95 \mu\text{m}$
N	100	47	23	12

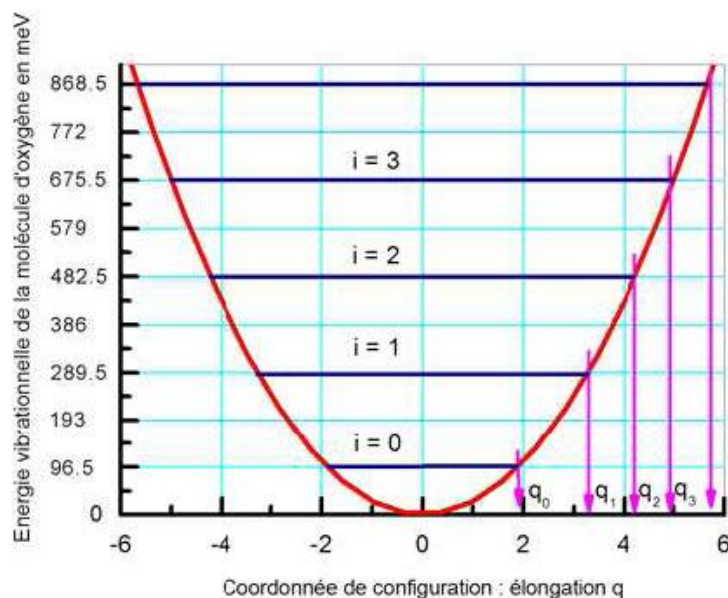
16. Pneu de fourgonnette* Les pneus d'une fourgonnette de 2100 kg (poids réparti uniformément sur les quatre pneus) sont gonflés à une pression de 250 kPa. La largeur de ces pneus est de 200 mm. (Prenez $g = 10$ N/kg)

1. Quelle est la surface de contact en cm², d'un pneu avec le sol ?
2. Quelle est la longueur de contact, en cm, du pneu avec le sol (L sur le schéma) ?



17. Niveaux de population dans le dioxygène*

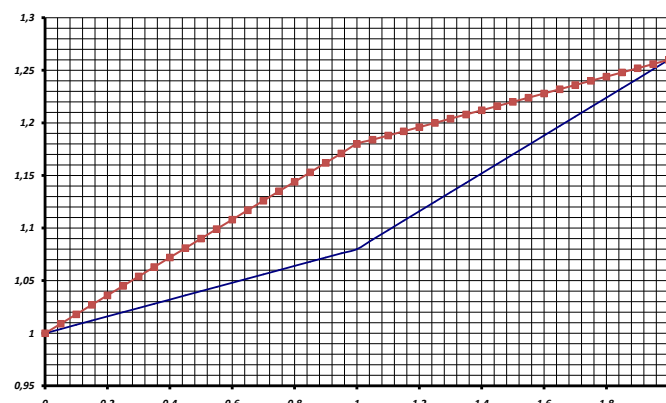
Le diagramme ci-contre représente l'énergie de l'oscillateur quantique associé à la molécule de dioxygène, en fonction de la longueur de la liaison chimique. Supposons que la population du niveau $i = 0$ soit égale à 10^{15} molécules. Déterminez les populations dans les niveaux excités $i = 1, 2, 3, 4$.



18. Distribution canonique dans l'hélium* La différence d'énergie entre le niveau fondamental et le premier état excité de l'atome d'hélium est 20 eV. Quelle est la fraction d'atomes excités dans de l'hélium à 6000 K (température de surface du Soleil) ? On peut négliger tous les autres états excités.

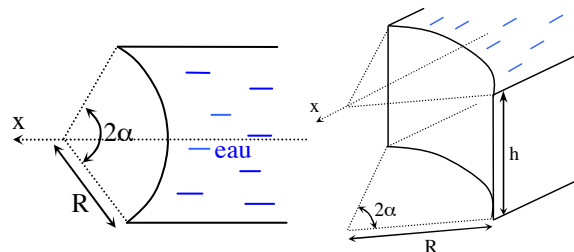
19. Évolution de la pression dans deux liquides non miscibles*

On considère deux liquides non miscibles de masse volumique différente surmontés d'un gaz à la pression atmosphérique. On propose deux courbes donnant l'évolution de la pression en bar en fonction de la profondeur en m comptée à partir de la surface libre. Quelle est la bonne courbe ? Que pouvez-vous en déduire quantitativement ?



20. Vidange de piscine par siphon* On désire vider une piscine et on ne dispose que d'un simple tuyau d'arrosage. Le fond de la piscine repose sur une dalle en béton située à 30 cm au dessus du sol. Le rebord de la piscine à une hauteur de 1,2 m, et le niveau d'eau initial est 70 cm. On remplit le tuyau d'eau, on en plonge une extrémité au fond de la piscine, et l'autre extrémité dans un égout situé à 40 cm en dessous du niveau du sol. Le milieu du tuyau passe par dessus le rebord de la piscine. Faire un schéma, puis calculer en mbar effectif² la pression aux différents points du tuyau (extrémité au fond de la piscine, milieu, et extrémité dans l'égout). Conclure sur le sens d'écoulement. Refaire les mêmes calculs lorsque le niveau d'eau dans la piscine est descendu à 5 cm.

21. Barrage hémicylindrique** Calculer la résultante $\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur le barrage décrit ci-contre. L'air est à la pression P_0 et la masse volumique de l'eau est notée ρ .



22. Résultante des forces de pression** Soit un récipient cylindrique percé au fond d'une ouverture circulaire de rayon R fermée par un cône de hauteur h et rempli jusqu'à la hauteur H d'un liquide de masse volumique ρ . Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le cône. Comparer les cas $H > h$ et $H < h$.



2. C'est-à-dire par rapport à la pression atmosphérique prise à 1 bar.

23. Montgolfière** Une montgolfière est constituée d'une enveloppe de volume $V = 2000 \text{ m}^3$ gonflée avec de l'air chauffé à la température $T_c = 100^\circ\text{C}$, emportant une nacelle, des accessoires et un passager. La masse de l'ensemble, lorsque l'enveloppe est pliée, est $m = 200 \text{ kg}$. Le remplissage de l'enveloppe se fait par une ouverture située à sa base. L'équilibre de pression entre l'air chaud et l'atmosphère est constamment réalisé. La température de l'air dans le ballon est maintenue constante grâce à un brûleur. La montgolfière est solidement amarrée au sol jusqu'au remplissage complet de l'enveloppe.

1. Calculer la force ascensionnelle F au moment du décollage. Les gaz sont supposés parfaits, la masse molaire de l'air est $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. L'atmosphère est à la température $T = 20^\circ\text{C}$ et à la pression $P = 1 \text{ bar}$ au niveau du sol.
2. Déterminer le plafond d'altitude atteint par la montgolfière. L'atmosphère est supposée en équilibre isotherme.

24. Modèle d'atmosphère non isotherme** Le service technique de l'aéronautique définit une troposphère standard (partie de l'atmosphère entre 0 et 11000 mètres d'altitude, assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$) dont la température varie linéairement avec l'altitude z suivant la loi $T(z) = T_0 - bz$ où $T_0 = 288 \text{ K}$ et $b = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$ et une stratosphère standard ($11000 \text{ m} < z < 25000 \text{ m}$) où $T = T_s = 216,5 \text{ K}$.

1. Établir la loi de variation de la pression P en fonction de l'altitude z . On note P_0 la pression atmosphérique à l'altitude $z = 0$.
2. Un vélipanchiste veut naviguer sur le lagon Khara Khotia (Cordillère des Andes) à 4700 m d'altitude. La planche construite et scellée au niveau de la mer a éclaté. Calculer la pression à 4700 m et expliquer pourquoi la planche n'a pas résisté à l'altitude. On donne $P_0 = 1,0 \text{ bar}$.
3. Établir que $P/\rho = C^{\text{te}}$ pour la stratosphère et $P/\rho^k = C^{\text{te}}$ pour la troposphère où ρ est la masse volumique au point étudié et k un coefficient (appelé coefficient polytropique) que vous déterminerez.

25. Ballon atmosphérique** Le modèle de l'atmosphère à gradient thermique constant permet d'établir qu'entre 0 et 11 km d'altitude, la pression atmosphérique varie en fonction de l'altitude z suivant la relation $P = P_0(1 - Az)^\alpha$ si la température est mise sous la forme $T = T_0(1 - Az)$.

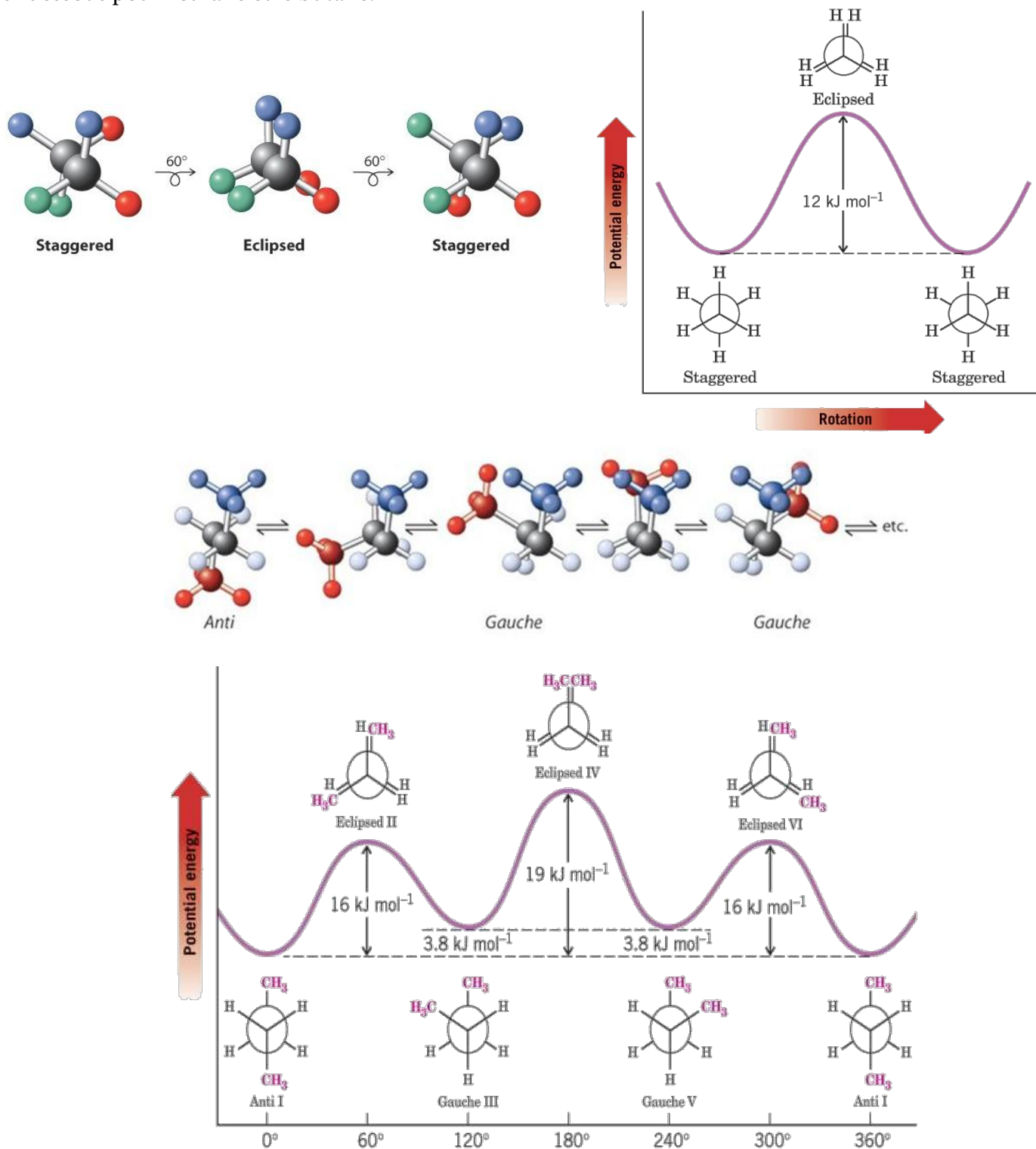
Un ballon sonde gonflé à l'hydrogène est assimilé à une sphère indéformable de diamètre D . La masse totale de l'enveloppe (non gonflée), de la nacelle et des appareils est m et cet ensemble a un volume négligeable devant celui de la sphère.

Par ailleurs l'hydrogène est constamment en équilibre thermique avec l'air atmosphérique. À l'altitude $z = 0$, les masses volumiques de l'air et de l'hydrogène, assimilés tous deux à des gaz parfaits sont respectivement ρ_0 (sous la pression P_0) et ρ'_0 (sous une pression de gonflage P'_0).

1. Exprimer la différence de pression qui s'exerce sur l'enveloppe du ballon en fonction de l'altitude.
2. Exprimer la masse volumique ρ de l'air en fonction de l'altitude z .
3. Exprimer la résultante des actions qui s'exercent sur le ballon en fonction de l'altitude et en déduire :
 - (a) la masse maximale M_0 que le ballon peut élever du sol;
 - (b) la masse maximale M_1 que le ballon peut élever à une altitude de 11 km.
4. Un ballon sonde identique au précédent est équipé d'une soupape différentielle qui maintient constante la différence $\Delta P = \Delta P_0$ entre la pression P' de l'hydrogène et la pression P de l'air atmosphérique, toutes les autres données sont inchangées.
 - (a) Exprimer la masse volumique ρ' de l'hydrogène en fonction de l'altitude z à partir de ρ'_0 , P_0 , ΔP et des constantes A et α .
 - (b) Résoudre pour ce nouveau ballon les questions posées en 3a et 3b.
 - (c) Quelle masse d'hydrogène a dû être dégazée pour élever la masse maximale à 11 km?

Données : $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $\rho_0 = 1,225 \text{ kg.m}^{-3}$; $P'_0 = 1,127 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $\rho'_0 = 0,094 \text{ kg.m}^{-3}$;
 $A = 2,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$; $\alpha = 5,25$; $D = 4,0 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, indépendant de z .

26. Facteur de Boltzmann et conformation moléculaire** On donne les graphes d'énergie potentielle de l'éthane et du butane en fonction de l'angle de rotation autour de l'axe de la liaison carbone/carbone centrale. On note N_0 le nombre de molécules se trouvant dans la conformation d'énergie potentielle minimale. Déterminez à 300 K le nombre de molécules se trouvant dans les autres conformations particulières rappelées ci-dessous pour l'éthane et le butane.



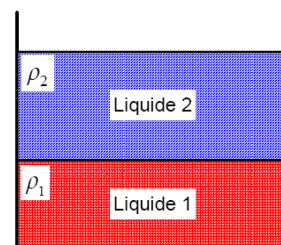
27. Masse totale de l'atmosphère** La Terre est supposée sphérique de rayon $R_T = 6400 \text{ km}$. L'atmosphère est considérée comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g/mol}$ s'étendant depuis le sol jusqu'à une altitude h qu'on peut évaluer à environ 100 km . Déterminer la masse totale de l'atmosphère et comparer à celle de la Terre $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$.

28. Atmosphère isotherme à g variable** On se place dans le cadre de l'atmosphère isotherme (à la température T_0) et on considère que l'accélération de la pesanteur varie avec l'altitude suivant la relation $g(z) = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + z} \right)^2$ (R_T est le rayon de la Terre et z l'altitude du point considéré). On note enfin P_0 la pression à la surface de la mer ($z = 0$).

1. Justifier l'expression de $g(z)$ et définir en particulier g_0 .
2. Calculer $p(z)$.

29. Deux liquides avec un capteur différentiel de pression**

1. Décrire comment on peut mesurer la hauteur d'une interface entre deux liquides de densité différente avec deux capteurs de pression. Expliquer le calcul à faire pour trouver la position de l'interface.
2. Calculer la hauteur totale de liquide et la hauteur de l'interface au dessus du fond du réservoir pour la situation suivante :
 - Distance entre les deux capteurs de pression est de 1 mètre;
 - Capteur de pression du bas à 5 cm du fond;
 - Liquide 1 de masse volumique 1500 kg/m^3 ;
 - Liquide 2 de masse volumique 1000 kg/m^3 ;
 - Pression mesurée sur le capteur du haut de 9400 Pa (en plus de la pression atmosphérique);
 - Pression mesurée sur le capteur du bas de 22565 Pa (en plus de la pression atmosphérique).
3. Calculer l'erreur de position de l'interface, sachant que les capteurs de pression ont les spécifications suivantes :
 - Capteur du haut : Échelle de Mesure E.M. = 0 à 20 kPa ; Classe de précision = $\pm 0.1\%$ E.M.;
 - Capteur du bas : Echelle de Mesure E.M. = 0 à 35 kPa ; Classe de précision = $\pm 0.1\%$ E.M.



30. Comment la sève monte-t-elle dans les arbres? L'objet de ce problème est l'analyse de divers mécanismes physico-chimiques susceptibles d'expliquer la montée de la sève brute dans les arbres. La sève brute est le grand courant ascendant qui conduit l'eau et les sels minéraux aux feuilles, bourgeons et fleurs. Dans une première partie, on étudie différentes causes possibles de l'ascension de la sève : pression hydrostatique, capillarité, osmose... Cependant, une évaluation des ordres de grandeurs montre qu'aucun de ces mécanismes ne peut rendre compte d'une ascension très élevée, comme dans le cas du pin Douglas où elle atteint 60 m . Le mécanisme principal est en fait la transpiration dont la description fait l'objet de la seconde partie.

Toutes les sous-parties sont très largement indépendantes les unes des autres. Dans tout le problème, on admettra que la sève brute est une solution si diluée que ses propriétés physiques (masse volumique, tension superficielle, équation d'état...) sont celles de l'eau pure. Sauf cas contraire, la température T sera prise égale à 20°C .

Accélération de la pesanteur	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,3145 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Pression atmosphérique normale	$P_0 = 1,01325 \text{ bar} = 0,101325 \text{ MPa} \approx 760 \text{ mm.Hg}$
Masse volumique de l'eau à 20°C	$\rho = 0,99821 \text{ g.cm}^{-3}$
Tension superficielle de l'eau à 20°C	$\sigma = 72,75.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'eau à 20°C	$\eta = 1,002.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Rayon des canaux de xylème (bois)	$R = 25 \text{ }\mu\text{m}$ (conifères) à $200 \text{ }\mu\text{m}$ (chêne)

Masses molaires en g.mol^{-1}

C	Cl	H	O	K	Na	S
12	35,5	1	16	39,1	23	32,1

I. L'IMPOSSIBLE MONTÉE

1. La poussée atmosphérique

- En supposant que l'eau est incompressible, quelle est la pression $P(h)$ au sommet d'une colonne d'eau de hauteur h dont la (seule) base est à la pression atmosphérique P_0 ?
- Application numérique*: Quelle hauteur maximale h_A peut atteindre l'eau soumise à une aspiration sous vide?

2. La capillarité

À l'interface entre une phase liquide et une phase gazeuse, un accroissement réversible $d\mathcal{A}$ de la surface de contact, à température constante, nécessite un apport énergétique par travail donné par $\sigma d\mathcal{A}$ où σ est la constante de tension superficielle entre les deux phases.

On considère une bulle d'air dans l'eau ou une goutte d'eau dans l'air. À l'interface entre une phase liquide et une phase gazeuse, les forces de tension superficielle tendent donc à réduire la surface de contact et créent du côté interne à la bulle ou à la goutte une surpression δP par rapport au côté externe. Cette surpression est donnée, pour une interface sphérique de rayon r , par $\delta P = 2\sigma/r$

- On considère une goutte de liquide sphérique, de rayon r , à l'équilibre avec l'air environnant de pression uniforme P_0 . Soit P_i la pression au sein de la goutte.
 - Donner l'expression de P_i en fonction de P_0 , σ et r .
 - Application numérique*: À partir de quel rayon la pression est-elle supérieure de $\varepsilon = 1\%$ (1 pour 1000) à la pression atmosphérique?
 - Que se passe-t-il si l'on met en contact deux gouttes de rayons r_1 et r_2 de sorte qu'il puisse y avoir échange de matière entre les deux? Dans quel sens cet échange se fera-t-il?
- Lorsque l'on plonge un tube très propre, cylindrique, de rayon R , dans un liquide, on constate que le liquide s'élève dans le tube d'une hauteur h . Le ménisque a la forme d'une calotte sphérique qui se raccorde à la paroi avec un angle ψ (cf figure ci-contre).

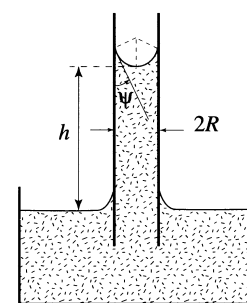
- En calculant la pression à la base du ménisque de deux façons différentes, montrer que

$$h = 2 \frac{\lambda_C^2}{R} \cos \psi$$

où λ_C ne dépend que de σ , ρ et g . On donnera son expression et sa dimension.

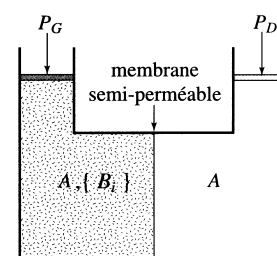
- Que se passe-t-il si $\psi > \frac{\pi}{2}$?

- Application numérique*: Calculer λ_C pour l'eau. De quelle hauteur h_C la sève brute peut-elle au maximum s'élever par capillarité dans les canaux de xylème qui la transportent?



3. L'osmose

- On considère un récipient, formé de deux compartiments, de même volume V et à la même température T , séparés par une membrane semi-perméable, c'est-à-dire perméable au solvant A mais non aux solutés B_i . Le compartiment de gauche G contient une solution supposée idéale³ celui de droite le solvant pur (voir la figure ci-contre).



On définit le potentiel chimique⁴ d'une mole de composant i dans un mélange idéal à la température T et à la pression P par

3. C'est-à-dire $\sum_i x_{B_i} \ll 1$

4. qui sera vu plus en détail en Spé.

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T, P) + RT \ln(x_i)$$

où $\mu_i^\circ(T, P)$ est le potentiel chimique du composant i pur dans sa phase et x_i sa fraction molaire dans le mélange.

Le potentiel chimique est tel qu'un composant i est à l'équilibre des deux côtés d'une interface qui lui est perméable si et seulement si il y a égalité des potentiels chimiques du constituant de part et d'autre de l'interface.

Dans cette partie, on négligera toute variation de la pression avec la position d'étude dans le compartiment. On admet en outre que pour un corps pur $d\mu^\circ = \nu dP$ avec ν le volume molaire (c'est-à-dire le volume correspondant à 1 mole) du corps pur considéré.

- i. Donner les fractions molaires $x_A^{(G)}$ et $x_A^{(D)}$ du solvant A respectivement dans les compartiments G et D en fonction des fractions molaires x_{B_i} des autres constituants dans G.
- ii. Écrire la condition d'équilibre pour le solvant A. En déduire que les pressions dans les deux compartiments ne peuvent pas être égales.
- iii. En supposant que la solution est très diluée et que le solvant est incompressible, montrer que la surpression Π qui s'exerce dans le compartiment G, appelée *pression osmotique*, est de la forme

$$\Pi = RT \sum_i \frac{n_i}{V}$$

où n_i est le nombre de moles du soluté B_i .

- iv. Commenter cette loi. Où intervient la nature du ou des solutés? En quoi cette loi est-elle remarquable?
- (b) La sève brute contient en général moins d'un gramme par litre de minéraux divers (ions Na^+ , Cl^- , K^+ , HCO_3^-) et parfois des substances organiques.
- i. Estimer la pression osmotique de la sève brute par rapport à l'eau pure en ne tenant compte que des sels minéraux.
 - ii. Certains arbres, comme l'érable, ont au début du printemps une sève riche en sucres : la concentration de disaccharides (formule brute $\text{C}_{12}(\text{H}_2\text{O})_{11}$) peut alors atteindre 20 à 30 grammes par litre. Quelle est alors la pression osmotique de la sève brute par rapport à l'eau pure?
 - iii. Expérimentalement, on constate qu'à la base des végétaux, la sève brute est bien émise sous pression : on trouve des pressions de l'ordre de 1 bar et plus, en excès par rapport à la pression atmosphérique. Est-il raisonnable de considérer cette *poussée radiculaire* comme étant pour une large part de nature osmotique?
 - iv. Application numérique : De quelle hauteur h_0 la sève brute peut-elle s'élever sous l'effet de la poussée radiculaire?

4. La perte de charge

L'eau est un fluide visqueux et son écoulement s'accompagne nécessairement d'une perte de pression. Pour un écoulement stationnaire dans un conduit cylindrique vertical, de longueur h et de section circulaire R , la perte de charge ΔP qui se produit *en plus* de la variation hydrostatique étudiée à la question 1, est reliée au débit volumique Q (en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) par la loi de Poiseuille :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{h}$$

- (a) Les canaux de xylème, approximativement cylindriques, présentent une dispersion en taille. Quels sont ceux qui transportent principalement la sève brute?
- (b) Des mesures donnent des vitesses moyennes d'ascension de l'ordre de $0,5 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$ pour les conifères et jusqu'à $50 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$ pour des arbres à gros canaux comme le chêne.

- i. En déduire la perte de charge théorique par unité de longueur pour ces deux types d'arbres. Que constate-t-on?
- ii. Les mesures expérimentales sont dans un facteur 2 environ par rapport aux prévisions théoriques. Dans quel sens ce facteur joue-t-il? Justifier.
- iii. La perte de charge est-elle significative par rapport à la poussée radiculaire?

5. Conclusion intermédiaire

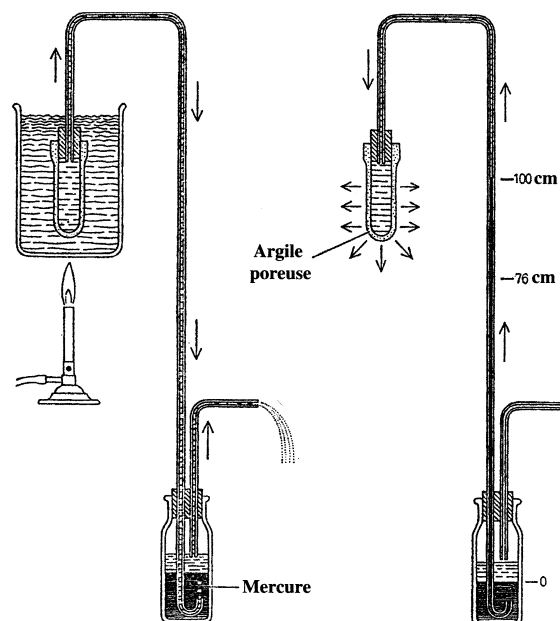
Quels sont, parmi les mécanismes précités, ceux qui vous semblent les plus à même d'expliquer la montée de la sève? Montrer que la montée de la sève dans les très grands conifères demeure inexplicable à ce stade.

II. LA TRANSPIRATION

En fait, l'essentiel de la sève s'évapore dans l'atmosphère au niveau des feuilles. De plus, on sait par traçage radioactif qu'il y a continuité de la colonne d'eau depuis les racines jusqu'aux feuilles.

1. Expérience de Böhm

Un analogue saisissant de ce mode de transport de la sève est donné par l'expérience de J. Böhm (1893). Un récipient en argile poreuse est plongé dans un bain d'eau bouillante. L'eau du récipient est siphonnée, par l'intermédiaire d'un tube capillaire, au travers d'une bouteille contenant du mercure. Lorsqu'on retire le bain bouillant, on constate que l'eau reflue dans le tube en tirant à elle une colonne de mercure qui peut atteindre 1 m de hauteur (cf figure ci-contre).

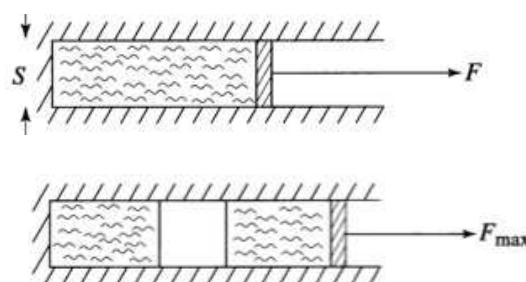


- (a) Quelle est la pression dans le tube au niveau de l'interface eau/mercure? En quoi est-ce remarquable?
- (b) Expliquer en quelques lignes en quoi cette expérience éclaire le mécanisme de montée de la sève par transpiration.
- (c) L'argile poreuse est un entrelacs de pores de tailles et de formes variées dans lesquels existent des ménisques entre l'air et l'eau liquide. Quelle doit être la largeur approximative de ces pores pour provoquer une telle dépression? (on se référera au I.2)
- (d) Qu'advierait-il si jamais une bulle apparaissait dans l'eau?

2. Forces de cohésion

L'expérience de Böhm montre que l'eau liquide peut être stable sous traction. Dans tout ce qui suit, on cherche à évaluer quelle tension (force de traction par unité de surface) l'eau liquide peut supporter sans se rompre.

Un cylindre de section S , parfaitement étanche et fermé par un piston sur lequel on tire avec une force F (voir figure suivante à gauche) contient un liquide maintenu à température constante. À partir d'une certaine force, le liquide se rompt.



- (a) On admet que la colonne de liquide se rompt en deux, tout en conservant son volume, et que la surface de séparation créée est plane et bien nette (bas de la figure ci-dessus). Exprimer à l'aide de la tension superficielle σ du liquide (cf. 2) le travail W qu'il a fallu fournir pour créer cette séparation.

- (b) W est l'opposé du travail des forces attractives à très courte portée (moins de 10 nm) qui s'exercent entre les molécules de part et d'autre de la surface de séparation. Quelle est l'origine microscopique de ces forces attractives?
- (c) Application numérique : en supposant que W soit fourni par une force constante $F_{\max}$ sur la distance adéquate ℓ , calculer $F_{\max}$ pour l'eau à 20°C puis la tension correspondante $F_{\max}/S$, que l'on exprimera en bar. On prendra $S = 10 \text{ cm}^2$.
- (d) Que vaut la pression de l'eau juste avant la rupture? Ce résultat est-il compatible avec l'expérience de Böhm?

31. Liquide dans un référentiel tournant ^(limite HP) Un récipient cylindrique vertical de révolution, de rayon intérieur R , contient un liquide homogène et incompressible de masse volumique ρ . Le récipient et le liquide qu'il contient tournent «en bloc» à la vitesse angulaire ω , c'est-à-dire que l'ensemble est au repos par rapport au référentiel lié aux parois du récipient.

1. Écrire la relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel tournant et l'intégrer afin de déterminer $P(r, z)$ (on travaille en coordonnées cylindriques). On ne cherchera pas à déterminer la constante d'intégration.
2. La surface libre du liquide étant surmontée de l'air ambiant à la pression P_0 , déterminer la forme de la surface libre.

32. Aspiration par un tube en rotation ^(limite HP) Considérons un tube coudé de faible section S plongeant dans un récipient contenant de l'eau (liquide incompressible de masse volumique ρ_e) et tournant à la vitesse angulaire ω constante. L'ensemble est placé dans l'atmosphère considérée comme un gaz parfait à la pression P_0 et à la température T . Quelle est la dénivellation h entre la surface libre de l'eau dans le récipient et son niveau dans le tube? On négligera tout phénomène de capillarité. Application numérique : $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T = 293 \text{ K}$, $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $\omega = 60 \text{ rad.s}^{-1}$, $\ell = 10 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $\rho_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

