

Statique des fluides

1. **Quelques ordres de grandeur** <https://youtu.be/d18akoqTae4?t=24>

2. **Poussée d'Archimède** None available

3. **Application directe du cours** [\url{https://youtu.be/E7cgV81d0Rc}](https://youtu.be/E7cgV81d0Rc)

4. **Transmission des pressions**

5. **Talons aiguilles** None available

6. **Limiteur de pression** <https://youtu.be/rNdWPLfwtvA>

7. **Cric hydraulique*** None available

8. **Glaçons et écologie*** <https://youtu.be/fTHAJgOo6IU>

9. **Flottaison de deux boules*** <https://youtu.be/Njm3KBUJQkE>

10. **Oscillateur d'Archimède*** None available

11. **Bulle au fond d'un lac*** None available

12. **Centimètres de mercure**** <https://youtu.be/E7cgV81d0Rc>

13. **Hémisphères de Magdebourg*** None available

14. **Détermination du nombre d'Avogadro***

1. Dans le champ de pesanteur terrestre, la loi fondamentale de l'hydrostatique s'écrit, avec z ascendant,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

2. La loi des gaz parfait permet d'obtenir la masse volumique ρ sous la forme

$$\rho = \frac{MP}{RT}$$

avec M la masse molaire du gaz. En remplaçant dans la loi fondamentale, il vient l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT} P = 0$$

La température étant constante, il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants (car T est constant) qui s'intègre, en prenant la condition $P(z=0) = P_0$, sous la forme

$$P(z) = P_0 e^{-Mgz/RT}$$

La densité volumique n_V s'écrit

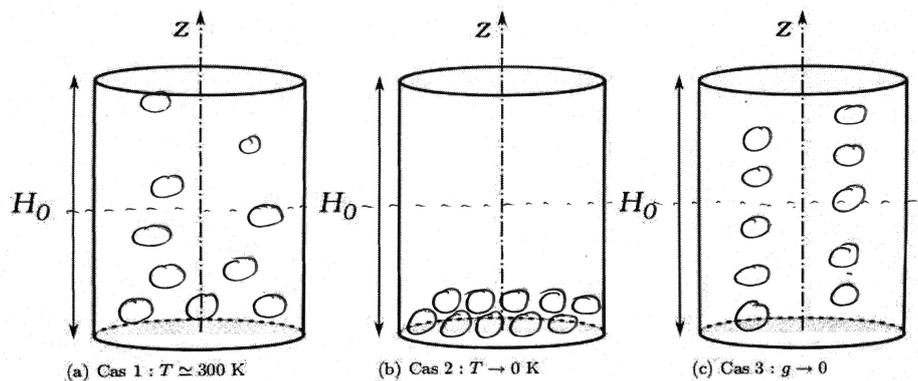
$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{n}{V} \mathcal{N}_A = \frac{\mathcal{N}_A}{RT} P = n_0 e^{-Mgz/RT}$$

où l'on a posé $n_0 = \frac{\mathcal{N}_A}{RT} P_0$ la densité volumique du gaz à $z = 0$.

3. Si l'on prend des tranches d'épaisseur fixe, le nombre de particules dans chaque tranche suit la même loi exponentielle précédente. Ainsi, pour un nombre fini de particules, la hauteur totale atteinte sera proportionnelle à la hauteur caractéristique $H = RT/Mg$ du gaz considéré. Cette hauteur est d'autant plus faible que la masse molaire du gaz est grande donc à nombre de particules égal, un gaz « léger » va se répartir sur une hauteur bien plus importante qu'un gaz « lourd ». Par conséquent,

h_1 correspond au dihydrogène ($M_{H_2} = 2 \text{ g.mol}^{-1}$), h_2 correspond à l'hélium ($M_{He} = 4 \text{ g.mol}^{-1}$) et h_3 correspond au dioxygène ($M_{O_2} = 32 \text{ g.mol}^{-1}$).

4. À 300 K, la répartition est exponentielle donc il doit y avoir plus d'atomes d'hélium dans la partie basse que dans la partie haute (par exemple 7 dans la moitié inférieure pour 3 dans la moitié supérieure). Quand $T \rightarrow 0 \text{ K}$, les atomes sont « scotchés » à $z = 0$. Alors que quand $g \rightarrow 0 \text{ m.s}^{-2}$, la répartition doit être uniforme dans tout le volume.



15. Mesure de la constante de Boltzmann* <https://youtu.be/d18akoqTae4?t=1322>

16. Pneu de fourgonnette* <https://youtu.be/OP2YWCss-O8>

17. Niveaux de population dans le dioxygène* https://youtu.be/_VjkVGft9nU

18. Distribution canonique dans l'hélium* <https://youtu.be/VdAzLxjNz4A>

19. Évolution de la pression dans deux liquides non miscibles* None available

20. Vidange de piscine par siphon* None available

21. Barrage hémicylindrique** <https://youtu.be/o45jq4sXtMI>

22. Résultante des forces de pression** None available

23. Montgolfière** None available

24. Modèle d'atmosphère non isotherme** <https://youtu.be/tJq8GvrwOrY?t=1162>

25. Ballon atmosphérique** <https://youtu.be/Pl1DIUqYwCo>

26. Facteur de Boltzmann et conformation moléculaire** None available

27. Masse totale de l'atmosphère** <https://youtu.be/tJq8GvrwOrY?t=1996>

28. Atmosphère isotherme à g variable** <https://youtu.be/tJq8GvrwOrY?t=2389>

29. Deux liquides avec un capteur différentiel de pression** <https://youtu.be/tJq8GvrwOrY?t=2724>

30. Comment la sève monte-t-elle dans les arbres?

I. L'IMPOSSIBLE MONTÉE

1. La poussée atmosphérique

(a) La loi fondamentale de l'hydrostatique s'écrit, avec z orienté vers le haut,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

L'eau étant supposée incompressible, on obtient directement en intégrant entre $z = 0$ et $z = h$

$$P(h) = P_0 - \rho g h$$

(b) La hauteur maximale est atteinte lorsque $P(h_A) = 0$, d'où

$$h_A = \frac{P_0}{\rho g} = 10,35 \text{ m}$$

2. La capillarité

(a) Histoires de gouttes

i. D'après l'énoncé, la pression à l'intérieur de la goutte est plus élevée que la pression extérieure et est donnée en fonction du rayon r de la goutte par

$$P_i = P_0 + \frac{2\sigma}{r}$$

ii. On cherche à partir de quel rayon on a

$$\frac{P_i - P_0}{P_0} = \frac{2\sigma}{r P_0} \geq \varepsilon$$

d'où

$$r \leq \frac{2\sigma}{\varepsilon P_0} = 1,44 \text{ mm}$$

- iii. Si deux bulles sont mises en contact avec échange de matière possible, comme la plus petite bulle a une pression interne plus élevée que la plus grosse, elle se videra spontanément dans la grosse¹.

Les grosses bulles mangent les petites.

(b) Histoires de ménisques

- i. D'une part, en M sous le ménisque, s'exerce la pression hydrostatique P calculée à la question 1.1a pour une hauteur h, soit

$$P = P_0 - \rho g h$$

D'autre part, toujours en M, on a une dépression dans le liquide due à la courbure du ménisque (on se retrouve à l'extérieur de la « bulle »),

$$P = P_0 - \frac{2\sigma}{r}$$

Un peu de géométrie nous donne la relation suivante, pour une calotte sphérique (voir dessin ci-contre) :

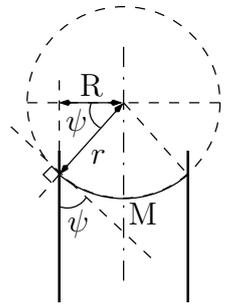
$$r \cos \psi = R \quad \text{et donc} \quad P = P_0 - \frac{2\sigma \cos \psi}{R}$$

En égalant ces deux expressions de la pression, on obtient :

$$P_0 - \frac{2\sigma \cos \psi}{R} = P_0 - \rho g h$$

$$\frac{2\sigma \cos \psi}{R} = \rho g h$$

$$h = \frac{2\sigma \cos \psi}{R \rho g}$$



d'où

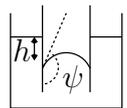
$$h = 2 \cos \psi \frac{\lambda_C^2}{R} \quad \text{avec} \quad \lambda_C = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

λ_C est la longueur capillaire. Si $\lambda_C \ll R$, les forces de tension de surface sont négligeables devant les forces de gravité. Inversement, si $\lambda_C \gg R$, on peut négliger la gravité devant les phénomènes capillaires. La loi qu'on vient d'établir est la **loi de Jurin**. On vérifie que λ_C s'exprime bien en mètre :

$$[\lambda_C] = \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\rho][g]}} = \sqrt{\frac{\text{M.L.T}^{-2} \cdot \text{L}^{-1}}{\text{M.L}^{-3} \times \text{L.T}^{-2}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{L}^{-2}}} = \text{L}$$

- ii. Si $\psi > \frac{\pi}{2}$, alors $\cos \psi < 0$, et donc $h < 0$

En effet, la surpression est du côté de la concavité (voir dessin ci-contre).



- iii. Pour l'eau, $\lambda_C = 2,73 \text{ mm}$

On peut calculer la hauteur maximum d'élévation en utilisant l'expression de la question 2.2(b)i et en prenant $\cos \psi = 1$, ce qui correspond à un mouillage parfait. Pour les conifères, $R = 25 \mu\text{m}$, et pour le chêne $R \approx 200 \mu\text{m}$. Ainsi,

$$h_C^{\text{conifère}} \leq 59 \text{ cm} \quad \text{et} \quad h_C^{\text{chêne}} \leq 7,4 \text{ cm}$$

1. Il suffit d'observer la surface d'une eau gazeuse pour s'en convaincre.

3. L'osmose

(a) Calcul théorique

i. Le solvant est seul à droite mais accompagné des constituants B_i à gauche. On a donc

$$x_A^{(D)} = 1 \quad \text{et} \quad x_A^{(G)} = 1 - \sum_i x_{B_i}$$

ii. Seul le solvant A est en équilibre des deux côtés de l'interface, on peut donc écrire l'égalité des potentiels chimiques pour A :

$$\begin{aligned} \mu_A^{(D)} &= \mu_A^{(G)} \\ \mu_A^\circ(T, P_D) + RT \ln(x_A^{(D)}) &= \mu_A^\circ(T, P_G) + RT \ln(x_A^{(G)}) \end{aligned}$$

Comme $x_A^{(D)} \neq x_A^{(G)}$, on a $\mu_A^\circ(T, P_D) \neq \mu_A^\circ(T, P_G)$, c'est-à-dire

$$P_D \neq P_G$$

iii. Le liquide étant incompressible, son volume molaire est constant. Comme l'énoncé donne la relation $d\mu^\circ = \nu dP$, on en déduit

$$\Delta\mu^\circ = \nu \Delta P \quad \text{en l'occurrence} \quad \mu_A^\circ(T, P_D) - \mu_A^\circ(T, P_G) = \nu_A (P_D - P_G)$$

Or d'après l'égalité des potentiels chimiques donnée précédemment, on en déduit que

$$\nu_A (P_D - P_G) = RT \ln(1 - \sum_i x_{B_i}) \approx -RT \sum_i x_{B_i}$$

En définissant la surpression $\Pi = P_G - P_D$, et en considérant que le solvant représente pratiquement le nombre total de moles en solution $n_{\text{tot}} \approx n_A$, on en déduit que

$$\Pi = \frac{RT}{\nu_A} \sum_i \frac{n_i}{n_A} = RT \sum_i \frac{n_i}{V}$$

iv. La nature des constituants n'intervient pas dans cette relation, seul leur nombre de moles est important. Cela ressemble à une loi des gaz parfaits où l'on ferait intervenir la « pression partielle » des solutés dans la solution.

(b) Applications numériques

i. Tous les ions cités ont en moyenne une masse molaire de $M_{\text{moy}} \approx 40 \text{ g.mol}^{-1}$. En notant $c_m = 1 \text{ g.L}^{-1}$ la concentration massique donnée par l'énoncé, on obtient

$$\Pi = RT \frac{c_m}{M_{\text{moy}}} \approx 6.10^4 \text{ Pa} = 0,6 \text{ bar}$$

ii. La masse molaire d'un disaccharide vaut $M = 12 \times 12 + 11 \times 18 = 342 \text{ g.mol}^{-1}$, d'où une pression osmotique qui vaut, en prenant $c_m = 30 \text{ g.L}^{-1}$,

$$\Pi = RT \frac{c_m}{M} \approx 2 \text{ bar}$$

iii. La pression osmotique totale (sucre+minéraux) approche les 3 bar, on peut donc penser que la poussée radiculaire est effectivement en grande part d'origine osmotique.

iv. Sous trois bar de pression au sol, on a

$$h_C = \frac{P}{\rho g} \approx 30 \text{ m}$$

4. La perte de charge

- (a) Pour une même perte de charge, le débit est plus important dans les canaux de plus grand rayon, c'est donc eux qui transporteront préférentiellement la sève brute.
- (b) Applications numériques
- i. Le débit volumique est le nombre de mètres cubes de liquide passant par seconde dans les conduits. On a donc $Q = v \times S = v \times \pi R^2$, d'où

$$\frac{\Delta P}{h} = \frac{Q 8\eta}{\pi R^4} = \frac{8\eta v}{R^2} = \begin{cases} 1,8 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} & \text{pour un conifère} \\ 2,8 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} & \text{pour un chêne} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on retrouve une perte de charge du même ordre de grandeur, signe que Dame Nature s'arrange pour obtenir le même résultat au travers de deux voies différentes de l'évolution.

- ii. La perte de charge doit être plus importante expérimentalement du fait de la rugosité des surfaces rencontrées : les phénomènes dissipatifs y sont plus importants.
- iii. Sur une hauteur de 30 m, on trouve près de 1 bar de perte de charge, ce qui représente tout de même environ 1/3 de la poussée radiculaire.

5. Conclusion intermédiaire

La pression atmosphérique et la poussée radiculaire sont donc les deux moteurs principaux de la montée de la sève, tout du moins dans la limite d'arbres ne dépassant pas 30 m. Remarquons aussi qu'on n'explique pas comment on atteint une pression nulle au sommet de l'arbre...

II. LA TRANSPIRATION

1. Expérience de Böhm

- (a) La variation de la pression le long de la ligne de mercure donne

$$P(h) = P_0 - \rho_{\text{Hg}} g h < 0$$

En effet, 760 mm de mercure étant l'équivalent d'une atmosphère, si le mercure monte à plus d'un mètre, c'est que la pression à l'interface eau/mercure est négative d'environ $-1/3$ bar.

- (b) La transpiration permet d'obtenir une aspiration encore plus efficace qu'une mise sous vide puisque l'eau se retrouve même à une pression négative au niveau de la zone transpirante.
- (c) On cherche une surpression δP de l'ordre de P_0 , d'où

$$r = \frac{2\sigma}{P_0} = 1,4 \mu\text{m}$$

- (d) Lors de l'apparition d'une bulle (de pression nécessairement positive), l'eau sous forme liquide à pression négative se vaporise instantanément pour combler le déséquilibre et il y a rupture de la colonne d'eau.

2. Forces de cohésion

- (a) La surface créée lors de la rupture vaut $\mathcal{A} = 2 \times S$ (il y a deux interfaces), d'où comme $\delta W = \sigma d\mathcal{A}$,

$$W = \sigma \times \mathcal{A} = 2\sigma \times S$$

- (b) Les forces d'attraction sont les forces dites de **Van der Waals** originaires de l'interaction des dipôles électrostatiques portés ou induits sur les molécules d'eau. Dans l'eau, il y a aussi une grande importance des **liaisons hydrogènes**.

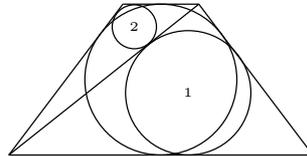
- (c) Le travail d'une force constante est donné par le produit de la force par la distance sur laquelle elle s'exerce : $W = F_{\max} \times \ell$. Ainsi,

$$F_{\max} = \frac{2\sigma S}{\ell} = 15 \text{ kN} \quad \text{et} \quad \frac{F_{\max}}{S} = \frac{2\sigma}{\ell} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ bar}$$

- (d) Juste avant la rupture, la pression à l'intérieur de l'eau vaut $-F_{\max}/S$, c'est-à-dire -150 bar . Ce résultat est parfaitement compatible avec l'expérience de Böhm qui ne demande même pas que l'eau résiste à plus d'un bar de pression négative.

31. Liquide dans un référentiel tournant^(limite HP) None available

32. Aspiration par un tube en rotation^(limite HP) None available



R en fonction de r_1 et r_2