Introduction au monde quantique

1. Quantum d'action Déterminer la dimension de la constante de Planck h. Montrer en particulier que $[h] = [\text{énergie}] \times [\text{temps}]$ et que $[h] = [\text{quantité de mouvement}] \times [\text{longueur}]$.

On appellera **action** une grandeur ayant la même dimension que h.

2. Histoires de tailles Comment peut-on dire sans connaître les ordres de grandeur que la longueur d'onde de la lumière visible est bien plus grande que la taille d'un atome ?

3. Vrai ou faux ?

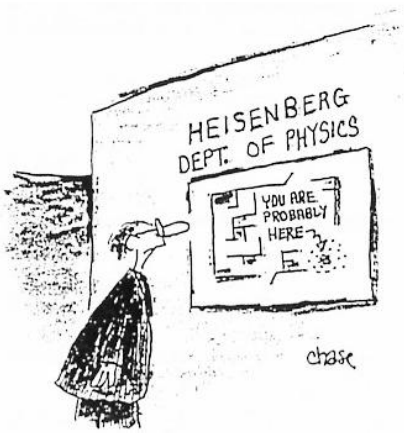
1. Tous les photons ont la même énergie.
2. Lorsque la fréquence de la lumière augmente, sa longueur d'onde diminue.
3. Si de la lumière violette avec $\lambda = 400$ nm ne cause pas d'effet photoélectrique dans un métal, alors il est certain que de la lumière rouge avec $\lambda = 700$ nm ne causera pas d'effet photoélectrique dans ce métal.
4. La longueur d'onde de de Broglie d'une molécule H_2 se déplaçant à la vitesse moyenne v_{rms} (root mean square en anglais) des molécules d'un gaz de H_2 à la température T est plus grande que celle d'une molécule de O_2 voyageant à la vitesse moyenne v_{rms} des molécules d'un gaz de O_2 à la même T. (Aide : la théorie cinétique des gaz donne $mv_{\text{rms}}^2/2 = 3k_B T/2$ avec k_B la constante de Boltzmann.)

4. Longueur d'onde associée à une particule

1. Un ballon de football de masse $m = 500$ g se déplace avec une vitesse de $v = 54$ km/h. Déterminer la longueur d'onde associée à ce ballon et en conclure qu'il est impossible de diffracter des corps macroscopiques.
2. Un électron possède une énergie 1,0 GeV. Déterminer la longueur d'onde associée à cet électron. Peut-il être diffracté ? Justifier la réponse !

5. Principe d'incertitude On considère que tous les systèmes qui suivent ont une trajectoire rectiligne (axe noté x par exemple). Calculer l'incertitude sur la vitesse ou sur les positions dans les cas suivants :

1. Automobile roulant à $100 \pm 0{,}01$ km.h^{-1} (masse : 1 tonne).
2. Balle de fusil dont la position à l'instant t est connue à $\pm 0{,}01$ mm près (masse 100 g).
3. Atome d'hydrogène dont la vitesse est connue à ± 1 cm.s^{-1} près.
4. Électron dont la position est connue à ± 1Å près.



6. Compétition lampe/robinet Vous êtes dans votre cuisine le soir en train de faire la vaisselle. La lampe est allumée. Y a-t-il plus de photons émis par votre lampe que de molécules d'eau sortant d



7. Téléviseur Dans un téléviseur, des électrons sont accélérés par une tension U = 15 kV. Quelles sont les longueurs d'onde de de Broglie de ces électrons ?

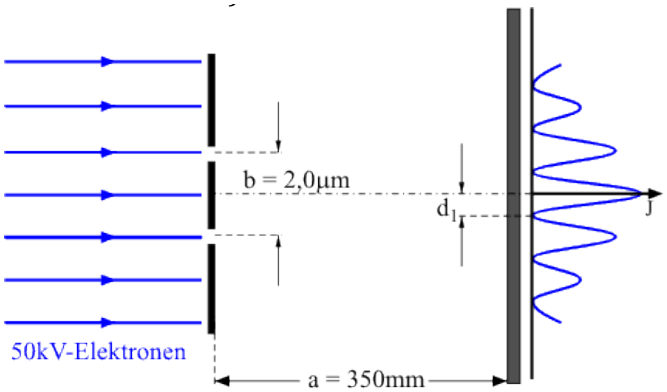
8. ☣ Virus ☣ On désire étudier un virus de 20 nm de diamètre. Ne pouvant pas l'observer au microscope optique (pourquoi?), on décide de travailler avec un microscope électronique (pourquoi?). Sachant que l'image sera bonne si la longueur d'onde associée aux électrons est 1000 fois plus petite que la taille du virus, calculez la différence de potentiel à appliquer dans le microscope pour accélérer ceux-ci. Considérez d'abord des électrons classiques, puis relativistes.

9. Quantalouette Robert Bidochon a une masse de 90 kg et vit avec sa femme Raimonde (90 kg également) dans une banlieue imaginaire, Quantalouette, où la constante de Planck vaut $h = 100$ J.s. Il se trouve dans son salon qui possède 2 portes situées sur le même mur qui donnent sur la cuisine où officie Raimonde.

1. Calculer la longueur d'onde associée à Robert s'il se déplace à une vitesse de 1,1 m/s.
2. Robert est installé dans son fauteuil avec une marge de mouvement de 10 cm. Peut-on être certain que Robert lit son journal tranquillement installé dans son fauteuil?
3. Les deux portes sont ouvertes. Quel phénomène subit Robert lorsqu'il va à la cuisine pour goûter la cuisine de son épouse?

10. Expérience de Jönsson Le schéma ci-contre montre les conditions expérimentales de Jönsson (1961) qui a étudié le comportement de faisceaux d'électrons sur des fentes d'Young :

1. Déterminer la longueur d'onde des électrons d'énergie cinétique 50 keV. Faut-il utiliser les formules de la mécanique relativiste?
2. Déterminer la valeur numérique de la distance d_1 de la figure [1].



11. Cellule photo-électrique

1. Décrire le principe d'une cellule photo-électrique (avec un schéma explicatif) et expliquer comment déterminer expérimentalement l'énergie cinétique des électrons arrachés. Quel graphe de votre cours montre que l'énergie cinétique maximale ne dépend que de la fréquence de la radiation et non pas de son intensité?
2. On donne le tableau suivant :

Nature de la cathode	Cs	Na	Zn	Ag	Pt
Énergie de liaison de l'électron arraché (eV)	1,94	2,28	4,27	4,70	5,36

   Comment peut-on expliquer ces valeurs différentes de l'énergie de liaison?
3. On effectue les mesures suivantes :

f (Hz)	$5{,}85.10^{14}$	$6{,}88.10^{14}$	$7{,}41.10^{14}$	$8{,}09.10^{14}$	$9{,}60.10^{14}$
U (V)	0,137	0,565	0,784	1,06	2,04

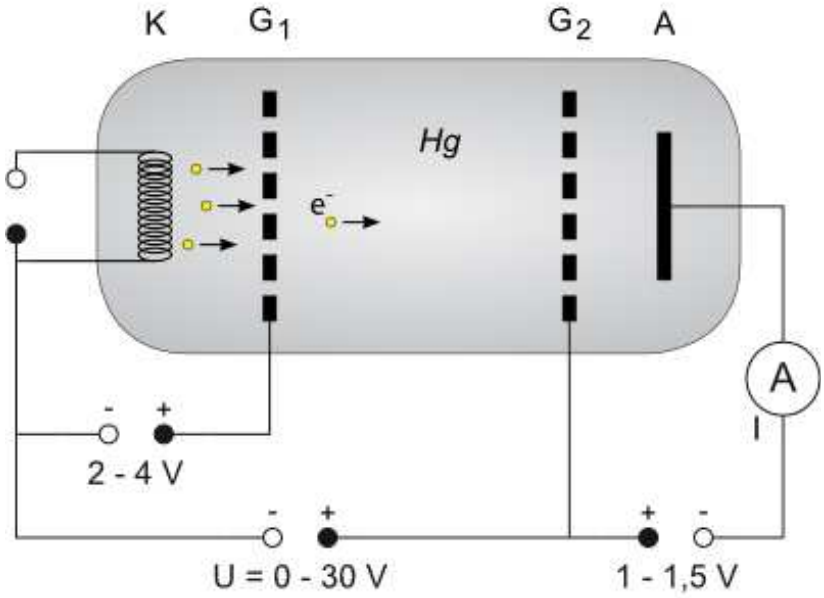
   Déterminer les longueurs d'onde correspondantes et les situer dans le spectre (visible, UV,..).
   Faire un graphe de U en fonction de la fréquence pour en déduire quel était le matériau de la cathode.
4. Existe-t-il une fréquence (longueur d'onde) limite à ne pas dépasser (dans quel sens?) pour observer l'effet photo-électrique sur ce matériau?

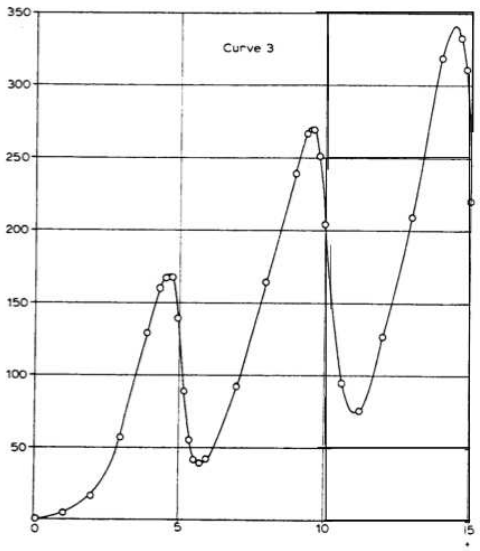
1. La figure n'est pas forcément à l'échelle...

12. Effet photo-électrique Quelle est l'énergie cinétique des photoélectrons émis par une surface de tungstène (photocathode) à l'aide d'une lumière ultraviolette de longueur d'onde 1940 Å? Exprimer le résultat en eV. Le seuil photoélectrique du tungstène est de 230 nm.

13. Expérience de Franck et Hertz Cette expérience a été réalisée pour la première fois en 1914 par Gustav Hertz et James Franck, d'où son nom. Le but était de comprendre l'interaction entre un faisceau d'électrons et un gaz atomique (du mercure gazeux).

Description de l'expérience : La cathode (K) émet des électrons qui passent la grille G_1 puis sont accélérés vers la grille G_2 , le tout dans un tube contenant de la vapeur de mercure. L'anode est portée à un potentiel légèrement négatif par rapport à G_2, de sorte que seulement les électrons ayant une énergie cinétique suffisante peuvent l'atteindre : $V(G_2) - V(A) = \varepsilon$.





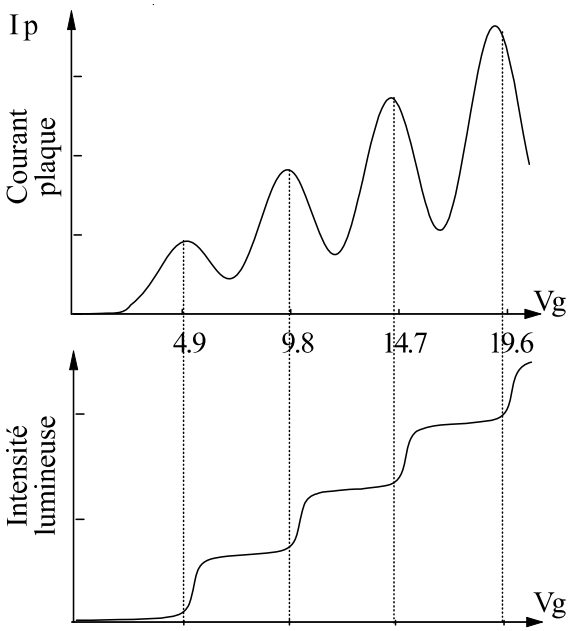
Résultats et interprétations : $V_g = V(G_1) - V(K)$ est le potentiel accélérateur de la grille par rapport à la cathode : les électrons possèdent lorsqu'ils ont été accélérés sous un potentiel V_g une énergie cinétique $e \cdot V_g$. La courbe expérimentale de l'intensité du courant en fonction de V_g est ci-dessus à droite avec en rond les valeurs mesurées.

— Tant que $V_g \leqslant 4{,}9$ V, le courant plaque augmente régulièrement, parce que l'on améliore la collection des charges (électrons) sur la plaque. Les électrons ne subissent que de chocs élastiques avec les atomes, l'énergie perdue dans chaque choc élastique est négligeable (du fait de la grande différence de masse électron-atome) et cet électron atteint l'anode qui n'est que légèrement répulsive.

— Lorsque V_g dépasse un certain seuil correspondant ici à $V_r = 4{,}9$ Volts, on constate une diminution brutale du courant, qu'on explique par l'apparition de collisions inélastiques au cours desquelles l'électron peut céder la totalité de son énergie cinétique à un atome de mercure. Ces électrons ne peuvent alors plus atteindre la plaque, à cause du potentiel antagoniste entre G_2 et A.

— Au delà, le courant recommence à croître : ceci s'explique bien si on suppose que les électrons continuent à céder la même énergie $W_r = e \cdot V_r$ aux atomes : pour $V_g \geqslant V_r + \varepsilon$, ils gardent après une collision inélastique une énergie suffisante pour atteindre la plaque. Lorsque Vg continue à croître, la collection des charges s'améliore à nouveau et le courant augmente de nouveau.

— Pour $V_g \geqslant 2V_r$, les électrons deviennent capables de subir deux collisions inélastiques successives sur deux atomes différents, en perdant à chaque fois $W_r = e \cdot V_r$: ils peuvent de nouveau perdre toute leur énergie cinétique et le courant diminue à nouveau brutalement. Le phénomène se répète pour $3V_r$, $4V_r$, etc.



On est donc conduit à conclure que les atomes de la vapeur ne peuvent prendre aux électrons qu'une quantité d'énergie parfaitement déterminée : $W_r = e \cdot V_r$. Franck et Hertz trouvent $V_r = 4{,}9$ V, valeur inférieure à la tension d'ionisation du mercure qui est $V_I = 10{,}5$ V. L'atome n'a donc pas perdu d'électrons mais a absorbé de l'énergie. Ce phénomène est dit résonant et V_r est appelé potentiel de résonance. Ils observent l'émission d'une lumière (voir graphe ci-contre) qui est interprétée comme l'émission de photons d'énergie $h\nu = E_f - E_i$ où E_i est le niveau d'énergie de l'atome avant le choc et E_f le niveau « excité ». Ce grain d'énergie est égal à l'énergie reçue lors du choc soit $h\nu = e \cdot V_r$ et compte tenu de $\lambda = c/\nu$, on calcule $\lambda_r = (hc)/(e \cdot V_r) = 2537$Å. L'atome se « désexcite » par une transition brutale entre 2 niveaux discrets.

Ce dispositif met en évidence l'existence de niveaux d'énergie dans l'atome. Franck et Hertz ont pu déduire de leurs résultats que les échanges d'énergie au niveau microscopique sont quantifiés, c'est-à-dire que la quantité d'énergie échangée ne peut prendre que certaines valeurs particulières. Ils reçurent le prix Nobel de physique en 1925 pour leur découverte des lois régissant la collision d'un électron sur un atome.

1. Pourquoi le graphe donnant I_P en fonction de V_g est en moyenne une courbe croissante ?
2. Expliquer quel(s) résultat(s) expérimental(aux) permet(tent) de dire que les électrons donnent toujours la même énergie aux atomes de mercure.
3. Pourquoi sait-on que cette énergie est égale à $e \cdot V_r$?
4. Évaluer la valeur de la tension ε citée dans le texte.
5. À quel domaine du spectre des ondes électromagnétiques (lumière) appartient l'onde émise lors de la désexcitation ?
6. Quelle aurait été l'allure du graphe donnant I_P en fonction de V_g si l'énergie dans un atome n'était pas quantifiée ?

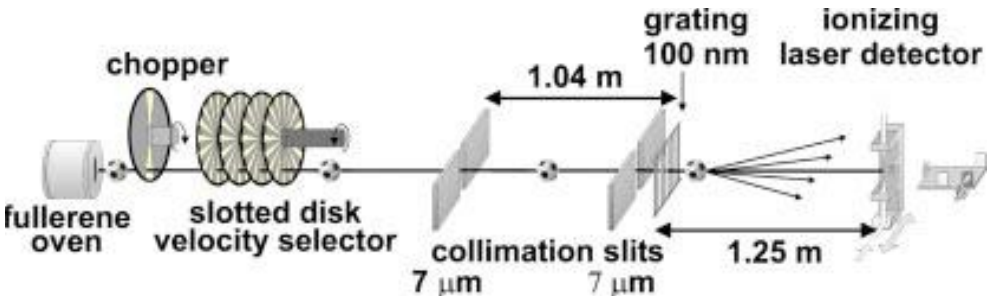
14. Quantum interference experiment with large molecules (American Association of Physics Teachers 2002) « Waveparticle duality is frequently the first topic students encounter in elementary quantum physics. Although this phenomenon has been demonstrated with photons, electrons, neutrons, and atoms, the dual quantum character of the famous double-slit experiment can be best explained with the largest and most classical objects, which are currently the fullerene molecules. This molecule of pure carbon was discovered in 1985 by Kroto et al. (Nobel Prize 1996) and shown to be particularly stable and abundant when exactly 60 carbon atoms are arranged in one molecule to form the smallest natural soccer ball we know, the buckyball, as shown in next figure.



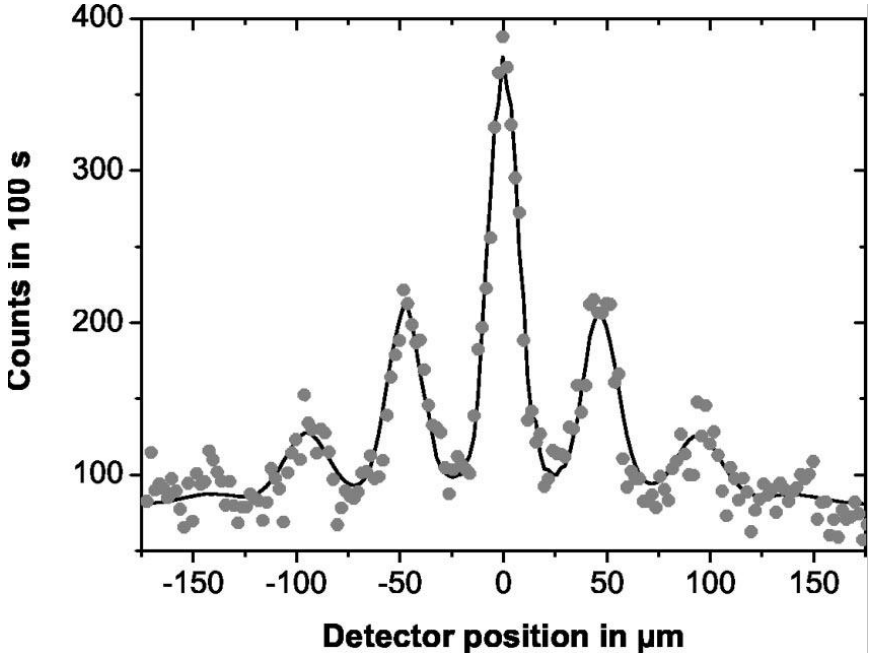
The soccer-ball-shaped carbon cages C_{60} are large, massive, and appealing objects for which it is clear that they must behave like particles under ordinary circumstances.

We present the results of a multislit diffraction experiment with such objects to demonstrate their wave nature. Because the de Broglie wavelength is about five orders of magnitude smaller than any realistic free-standing mechanical structure, we expect the characteristic size of the interference phenomena to be small. A sophisticated machinery is therefore necessary to actually show them. As the diffracting element we used a free-standing silicon nitride grating with a nominal grating constant of $d = 100$ nm, slit openings of $s = 55 \pm 5$ nm and thickness of only

200 nm along the beam trajectory. These gratings are at the cutting edge of current technology and only a few specialists worldwide can actually make them.



Errata : the correct distance between grating and detector was L = 1,20 ± 0,01 m as also stated in the text.



Far-field diffraction of C_{60} using the slotted disk velocity selector. The mean velocity was $\langle v \rangle = 117$ m/s, and the width was $\Delta v / \langle v \rangle = 17\%$. Full circles represent the experimental data. The full line is a numerical model based on KirchhoffFresnel diffraction theory. The Van der Waals interaction between the molecule and the grating wall is taken into account in form of a reduced slit width. Grating defects holes additionally contribute to the zeroth order. »

1. Quelle est la largeur angulaire du faisceau de molécules de fullerène à la sortie de la seconde fente de collimation de largeur 7 µm (juste avant le réseau de diffraction) ?
2. En appliquant la « formule des réseaux », déterminez les angles donnant une interférence maximale.
3. En déduire la distance séparant deux pics de détection des molécules sur l'écran d'observation située à une distance L du réseau.
4. La figure confirme-t-elle vos calculs ?

15. De l'électron en boîte

1. Un électron dans un puits quantique infini absorbe de la lumière. La plus grande longueur d'onde dans le spectre d'absorption est de 600 nm. Quelle est la taille de la boite quantique ?
2. Un électron dans un puits infini émet des photons de longueur d'onde 1484 nm lors de la transition $3 \longrightarrow 2$. Décrire son spectre d'émission et donnez la dimension de la boite.

16. La polarisation vue comme une expérience quantique Si une onde traverse l'analyseur qui transmet les polarisations parallèles à Ox, mais absorbe les polarisations parallèles à Oy, que pouvons-nous dire du comportement quantique des quanta de lumière (photons) ?

Le photon d'énergie $h\nu$ franchit ou ne franchit pas l'analyseur. L'analyseur perturbe donc l'état des photons. En effet, on sait avec certitude que le photon va franchir l'analyseur lorsque son vecteur de polarisation est selon Ox. Au contraire, s'il est selon Oy, le photon est sûrement arrêté.

Lorsque l'état de polarisation du photon avant le passage de l'analyseur est quelconque, on ne peut prédire que les probabilités attachées aux différents états propres. Dans le cas de notre exemple, on décompose alors l'état de polarisation du photon en une combinaison linéaire des états « propres » selon Ox et Oy : $|\theta\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle$ et la probabilité d'obtenir $|x\rangle$ vaut $\cos^2\theta$ c'est-à-dire le carré du module du coefficient de l'état propre. Nous dirons alors que chaque photon a une probabilité $\cos^2\theta$ de franchir l'analyseur et $\sin^2\theta$ d'y être absorbé. **Comme seulement ces deux états de polarisation sont possibles, il est naturel que** $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Commenter la phrase en **gras** et discuter de la loi de Malus dans cette « optique ».

17. Principe de superposition linéaire Une particule de masse m dans un puits de potentiel infini de longueur L ($0 < x < \mathrm{L}$) se trouve à l'instant $t = 0$ dans l'état :

$$\psi(x,0) = \psi_1(x,0) + \psi_2(x,0) \qquad \text{avec} \qquad \psi_1(x,0) = \mathrm{A}\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right) \quad \text{et} \quad \psi_2(x,0) = \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)$$

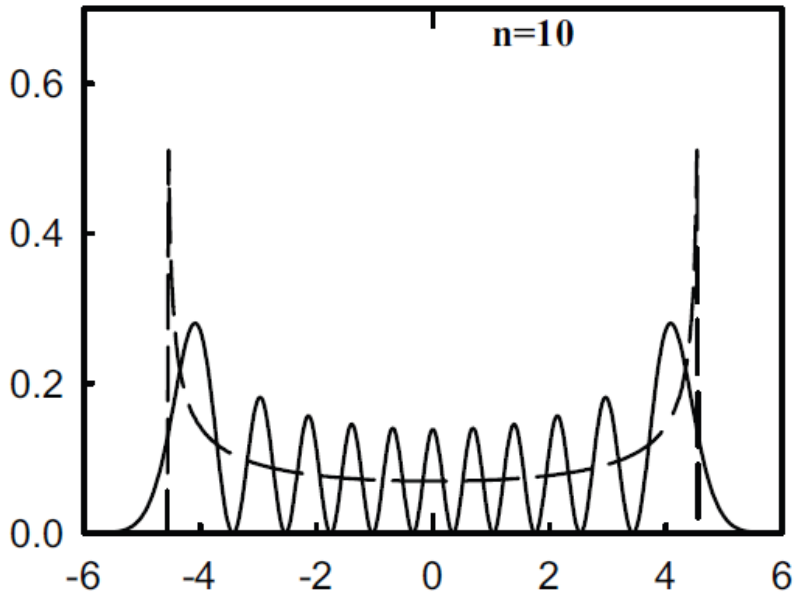
1. Quel est l'énergie E_1 de l'état stationnaire ψ_1 ?
   Même question pour l'état stationnaire ψ_2 d'énergie E_2 ?
2. Sachant que l'évolution temporelle d'un état stationnaire d'énergie E est de la forme
   $$\psi(x,t) = f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mathrm{E}t/\hbar}$$
   calculer $\psi_1(x,t)$ et $\psi_2(x,t)$.
3. On considère maintenant la superposition des deux états décrit par la fonction d'onde
   $$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$
   (a) Déterminez la constante de normalisation A en exploitant l'expression de $\psi(x,0)$.
   (b) Exprimez la fonction d'onde $\psi(x,t)$ du système à l'instant t.
   (c) Indiquez les résultats possibles d'une mesure de l'énergie du système, donnez la distribution de probabilité de ces résultats et calculez leur moyenne.

18. Superposition non stationnaire d'états stationnaires Soit une particule dans un puits de potentiel symétrique défini par $\mathrm{V}(x) = 0$ pour $-\mathrm{L} < x < \mathrm{L}$ et $\mathrm{V}(x) = \infty$ sinon. Supposons que l'énergie de cette particule ne soit pas définie : une mesure de l'énergie peut donner deux valeurs E_1 ou $\mathrm{E}_3 = 9\mathrm{E}_1$. La particule n'est pas dans un état stationnaire mais dans une superposition de deux états de ce type. La fonction d'onde qui la décrit est supposée être de la forme

$$\underline{\psi}(x,t) = 2\mathrm{A}\cos\left(\frac{\pi x}{2\mathrm{L}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mathrm{E}_1 t/\hbar} + \mathrm{A}\cos\left(\frac{3\pi x}{2\mathrm{L}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mathrm{E}_3 t/\hbar}$$

où A est une constante définie par la normalisation de la fonction d'onde. La notation $\underline{\psi}$ indique que la fonction d'onde est complexe comme il se doit. La densité de probabilité de présence est notée $\underline{\psi}\,\underline{\psi}^*$. La notation $\underline{\psi}^*$ indique que l'on prend le complexe conjugué de la fonction d'onde.

1. Calculez $\underline{\psi}(x=0,t=0)\underline{\psi}^*(x=0,t=0)$
2. De même exprimez $\underline{\psi}(x=0,t)\underline{\psi}^*(x=0,t)$ à un instant t quelconque.
3. Montrez que cette fonction varie entre deux valeurs extrêmes que l'on déterminera.
4. Quelle est la fréquence des oscillations entre ces deux valeurs extrêmes.
5. En est-il de même de la densité de probabilité au point $x = \mathrm{L}/3$ soit $\underline{\psi}(\mathrm{L}/3,t)\underline{\psi}^*(\mathrm{L}/3,t)$.



19. Du quantique au classique La densité de probabilité de présence d'un oscillateur harmonique est indiquée sur la figure ci-dessous pour la valeur $n = 10$ du nombre quantique. On peut voir que la densité de probabilité de présence est plus importante aux limites $\pm X_m$ de la trajectoire classique (ici $X_m = 4{,}5$) qu'au centre en $x = 0$. Ceci s'interprète classiquement la vitesse est grande au centre donc on a peu de chances d'y trouver la particule si on mesure sa position. Au contraire au voisinage des points extrêmes X_m, la vitesse est faible donc on le détecte plus souvent dans ces zones. Nous allons déterminer dans cet exercice la courbe de densité de probabilité dans le cadre de la mécanique classique.

Imaginons un oscillateur harmonique de période propre T (par exemple une masse glissant sans frottements sur une table horizontale sous l'action d'un ressort). Il part à la date $t = 0$ de la position $x(0) = X_m$ avec une vitesse initiale nulle. À la date $t = T/2$, le mobile arrive en $x(T/2) = -X_m$. On prend une série de photographie quasi instantanées réparties de manière aléatoire.

1. Quelle est la probabilité $dP(t)$ que la photographie soit faite entre les dates t et $t + dt$?
2. En déduire la probabilité $dP(x)$ que la photographie soit faite entre les positions x et $x + dx$?.
3. La ligne en pointillés est la courbe $\dfrac{dP(x)}{dx}$. Commentez.
   Pour voir la courbe se construire, allez faire un tour sur

   `http://www.st-andrews.ac.uk/ qmanim/embed_item_3.php?anim_id=40`

20. Puit infini et niveau de Fermi On considère un électron de masse m en mouvement dans un puits de potentiel infini $V(x)$ de largeur L tel que $V(x) = 0$ pour $0 < x < L$ et $V(x) = \infty$ sinon.

1. En utilisant les conditions aux limites pour $x = 0$ et $x = L$, montrer que les énergies de l'électron sont données par
$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$
2. On place maintenant dans le puits N électrons libres obéissant au principe d'exclusion de Pauli, principe qui interdit à deux électrons d'occuper le même état quantique. Chaque niveau ne peut alors être occupé que par deux électrons de spins antiparallèles. Le niveau rempli le plus élevé est appelé niveau de Fermi. Calculer l'énergie de ce niveau.

21. Particule confinée Dans la molécule organique β-carotène, on a la présence de 22 électrons délocalisés (doubles liaisons conjuguées) sur la molécule. Ces électrons occupent les 11 niveaux les plus bas d'énergie à raison de 2 électrons par niveau (principe d'exclusion de Pauli et règle de Hund). On peut approximativement décrire l'état de ces électrons comme étant celui d'un puits de potentiel infini de largeur a (qui est la taille de la molécule) et de valeur plancher $U = 0$.

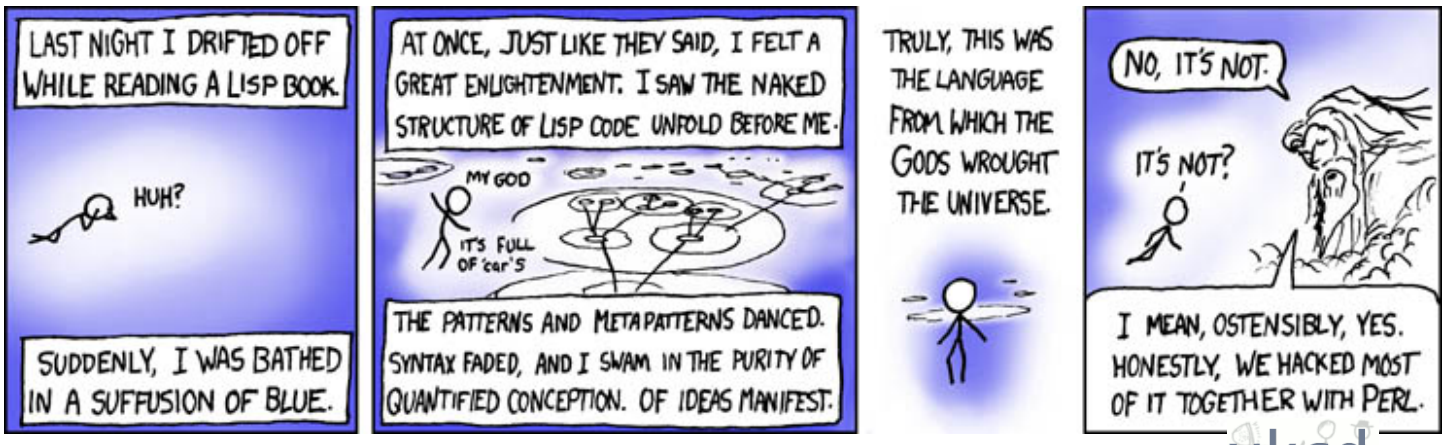
1. Déterminer l'expression des niveaux d'énergie E_n d'un électron en fonction de n, h, m (masse d'un électron) et a.
2. Décrire à l'aide d'une figure la probabilité de présence d'un électron sur le niveau d'énergie $n = 2$.
3. Dans le spectre d'absorption du β-carotène se trouve une raie de longueur d'onde $\lambda = 451$ nm. Cette radiation correspond à l'énergie minimale d'excitation de la molécule. Déterminer la valeur numérique de a.

22. Constante de structure fine La quantité $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c}$ est appelée constante de structure fine. Cette constante sans dimension peut être considérée comme une constante de couplage, elle nous renseigne sur la force d'interaction entre les électrons et le champ électromagnétique. Sa faible valeur numérique traduit la faiblesse de l'interaction électromagnétique par rapport aux interactions fortes et faibles. Pour analyser la pertinence de cette approche, il est judicieux de comparer l'énergie $|E_{fond}| = \frac{m\,e^4}{8{\varepsilon_0}^2\,h^2}$ niveau fondamental de l'atome d'hydrogène à l'énergie de masse $m\,c^2$ de l'électron.

1. Calculez la valeur numérique de α. Montrez que $\alpha \ll 1$.
2. Exprimez l'énergie $|E_{fond}|$ en fonction de α et de $m\,c^2$. Conclure.




```
You can also just ignore any science assertion
where "quantum mechanics" is the most complicated phrase in it.
```




```
We lost the documentation on quantum mechanics.
You'll have to decode the regexes yourself.
```

♫