Introduction au monde quantique

1. Quantum d'action https://youtu.be/r5mHWGwlj74

2. Histoires de tailles https://youtu.be/r5mHWGwlj74?t=156

3. Vrai ou faux ? https://youtu.be/r5mHWGwlj74?t=295

Faux : L'énergie dépend de leur fréquence : $\mathrm{E} = h\nu$.

Vrai : Comme $\lambda\,\nu = c$, on a $\lambda = c/\nu$ fonction décroissante de ν.

Vrai : Les photons rouges contiennent moins d'énergie que les photons violet, donc si un violet (violent) n'arrive pas à éjecter un électron, un rouge (molasson) n'y arrivera pas non plus.

Vrai : Là, il faut réfléchir un peu. L'important est d'estimer la quantité de mouvement puisque $\lambda = h/p$. Or $p = m\,v$ avec $v = v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{3k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}/m}$, d'où

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_{\mathrm{rms}}} = \frac{h}{m\sqrt{\dfrac{3k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{3k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}m}}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\lambda_{\mathrm{H_2}}}{\lambda_{\mathrm{O_2}}} = \frac{h}{\sqrt{3k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}m_{\mathrm{H_2}}}} \times \frac{\sqrt{3k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}m_{\mathrm{O_2}}}}{h} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{O_2}}}{m_{\mathrm{H_2}}}} > 1}$$

4. Longueur d'onde associée à une particule https://youtu.be/r5mHWGwlj74?t=650

1. On a
$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 8{,}8.10^{-35}\ \mathrm{m}}$$

   Il faudra faire passer la balle par un trou sacrément plus petit qu'un noyau atomique (taille de l'ordre de 10^{-15} m) pour espérer pouvoir sensiblement la diffracter... Les gardiens de but n'ont pas de souci à se faire...

2. L'électron possède cette énergie sous forme d'énergie cinétique, d'où
$$v = \sqrt{\frac{2\mathrm{E_c}}{m}} = 1{,}9.10^{10}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

   Avec une valeur pareille de la vitesse, on se rend compte que l'électron est relativiste... Il faut donc utiliser la formule relativiste donnant le lien entre l'énergie, la masse et la quantité de mouvement, soit
$$\mathrm{E}^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{\sqrt{\mathrm{E}^2 - (mc^2)^2}}{c} = 5{,}3.10^{-19}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$

> En mécanique relativiste, la quantité de mouvement est définie par $p = \gamma mv$ où
> $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$
> est le facteur gamma relativiste. Si l'on suppose que la vitesse v est proche de c, on voit que la valeur de γ explose. Ici, on peut calculer

$$\gamma \approx \frac{p}{mc} = 2{,}0.10^3 \qquad \text{soit} \qquad v = c\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = c \times 0{,}999\,999\,7$$

soit très proche de la vitesse de la lumière effectivement.

La longueur d'onde est alors $\boxed{\lambda = \dfrac{h}{p} = 1{,}2.10^{-15}\ \text{m}}$

Ces électrons (ultra-énergétiques !) ne peuvent être diffractés que par un noyau atomique, rien de plus !

5. Principe d'incertitude

1. $\Delta x_{\text{automobile}} \approx \dfrac{\hbar}{m\,\Delta v} = 3{,}8.10^{-35}\ \text{m}$

2. $\Delta v_{\text{balle}} = \dfrac{\hbar}{m\,\Delta x} = 1{,}1.10^{-28}\ \text{m.s}^{-1}$

3. $\Delta x_{\text{H}} = \dfrac{\hbar}{m\,\Delta v} = 6{,}3.10^{-6}\ \text{m}$

4. $\Delta v_{\text{électron}} = \dfrac{\hbar}{m\,\Delta x} = 1{,}2.10^{6}\ \text{m.s}^{-1}$

6. Compétition lampe/robinet* Commençons par estimer les ordre de grandeurs. D'abord pour le robinet : il me faut environ 5 secondes pour remplir le pichet d'eau d'un litre pour la table, ce qui donne un débit d'eau (maximal) de l'ordre de $\text{D}_{\text{max}} = 200$ mL/s, soit la même chose en g/s puisqu'un mL d'eau a une masse d'un gramme par définition. Pour obtenir le nombre N_{eau} de molécules d'eau s'écoulant durant un temps t, il faut commencer par calculer le nombre n de moles d'eau, puis le multiplier par le nombre d'Avogadro, soit

$$\text{N}_{\text{eau}} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \times n = \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \times \frac{m_{\text{eau}}}{\text{M}_{\text{eau}}} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \times \frac{\text{D}_{\text{max}} \times t}{\text{M}_{\text{eau}}}$$

Concernant la lumière, l'ampoule développe une puissance d'environ $\mathscr{P} = 20$ W, ce qui correspond[1] à une énergie $\mathscr{P} \times t$ émise sous forme de lumière pendant un temps t. Supposons que toute la lumière est émise à la longueur d'onde $\lambda = 500$ nm, donc avec des photons d'énergie $\text{E}_\nu = h\nu = hc/\lambda$, de sorte que le nombre N_ν de photons émis pendant ce temps t vaille

$$\text{N}_\nu = \frac{\mathscr{P} \times t}{\text{E}_\nu} = \frac{\mathscr{P} \times t}{hc/\lambda}$$

Par comparaison, $\boxed{\dfrac{\text{N}_{\text{eau}}}{\text{N}_\nu} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \times \dfrac{\text{D}_{\text{max}} \times t}{\text{M}_{\text{eau}}} \times \dfrac{hc/\lambda}{\mathscr{P} \times t} = \dfrac{\mathcal{N}_{\mathcal{A}}\, hc}{\lambda\, \text{M}_{\text{eau}}} \times \dfrac{\text{D}_{\text{max}}}{\mathscr{P}} = 1.10^5}$

Même si l'on diminue le débit d'eau d'un facteur 10 et qu'on augmente la puissance lumineuse d'un facteur 10, c'est encore clairement le nombre de molécules d'eau (7.10^{23} molec/s) qui gagne sur le nombre de photons produits pour les observer (5.10^{20} photons/s).

7. Téléviseur None available

[1] En fait, toute cette énergie n'est pas produite sous forme de radiations visibles. On obtiendra donc une borne supérieure au nombre de photos visibles effectiement émis.

8. ☣ Virus ☣ Le virus a une taille inférieure à la longueur d'onde d'une lumière visible, donc on ne pourra pas le distinguer avec un microscope optique. Le microscope électronique fonctionne en envoyant des électrons (et non des photons) dont on peut se débrouiller pour que la longueur d'onde soit encore plus faible (il suffit de leur donner plus d'énergie). On veut une longueur d'onde de l'ordre de $\lambda = 2{,}0.10^{-11}$ m, donc de quantité de mouvement $p = h/\lambda$. En utilisant la formule classique, on doit donc lui communiquer une énergie cinétique de

$$\mathrm{E_c} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 6{,}1.10^{-16}\ \mathrm{J} = 3{,}8.10^{3}\ \mathrm{eV} \qquad \text{soit une tension accélératrice} \qquad \boxed{u = 3{,}8\ \mathrm{kV}}$$

Si on utilise les formules relativistes, il faut prendre en compte que *l'incrément* d'énergie de l'électron entre le cas au repos ($\mathrm{E} = mc^2$) et le cas du mouvement $\mathrm{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$ vaut $e \times u$, soit

$$\boxed{u = \frac{\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2}{e} = 3{,}8\ \mathrm{kV}}$$

On ne remarque aucune différence à 2CS, il faudrait aller à plus pour trouver $u_{\text{classique}} = 3\,811$ V et $u_{\text{relativiste}} = 3\,797$ V. Cela est dû au fait que le terme en mc^2 vaut pour un électron 506 keV, donc largement plus que le terme cinétique pc.

9. Quantalouette* https://youtu.be/7bW6xF9MF1I

1. $$\lambda = \frac{h}{mv} = 1{,}0\ \mathrm{m}$$

2. $$\Delta v \approx \frac{\hbar}{m\Delta x} = 1{,}8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

3. Les deux portes étant distantes de quelques mètres, Robert va interférer avec lui-même s'il essaie d'en passer une (sauf si Raymonde le regarde auquel cas son paquet d'onde sera réduit et il passera par l'une ou l'autre mais pas les deux).

10. Expérience de Jönsson*

1. La vitesse est donnée par $$v = \sqrt{\frac{2\mathrm{E_c}}{m}} = 1{,}3.10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

   On s'approche dangeureusement de la valeur de la vitesse de la lumière ($\gamma = 1{,}2$), mais l'ordre de grandeur devrait rester correct. Ainsi,

   $$\lambda = \frac{h}{mv} = 5{,}5.10^{-12}\ \mathrm{m}$$

   Si l'on voulait utiliser la relativité, il faudrait prendre les formules suivantes (non encore fournies en cours, cela attendra le cours de mécanique) :

   $$\mathrm{E_c} = (\gamma - 1)\, mc^2 \qquad \text{et} \qquad p = \gamma\, mv \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

   L'expression de $\mathrm{E_c}$ permet de trouver γ puis la vitesse v

   $$\gamma = \frac{\mathrm{E_c} + mc^2}{mc^2} = 1{,}1 \qquad \text{soit} \qquad v = c\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 1{,}2.10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

   On utilise alors l'expression de la quantité de mouvement relativiste pour obtenir la longueur d'onde

   $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv} = 5{,}4.10^{-12}\ \mathrm{m}$$

On voit que même jusqu'à 1/3 de la vitesse de la lumière, les estimations à 2CS sont parfaitement équivalentes (seul le dernier chiffres significatif change d'une unité).

2. Une distance de 35 cm peut être considérée comme l'infini pour des trous distant de 2 μm et des onde de $\lambda = 5{,}4.10^{-12}$ m. Ainsi, on peut utiliser la formule de l'interfrange des interférence à grande distance : $i = \lambda a/b$. Ici, la distance d_1 recherchée est le demi-interfrange, soit

$$\boxed{d_1 = \frac{\lambda a}{2b} = 4{,}7.10^{-7} \text{ m}}$$

Le schéma n'est finalement pas trop mal à l'échelle au niveau de la verticale.

11. Cellule photo-électrique* None available

12. Effet photo-électrique* L'énergie cinétique est l'énergie qui reste à l'électron après qu'on ait réussi à l'arracher au métal. L'énergie permettant pile d'arracher l'électron est donné par le photon correspondant au seuil photoélectrique, de sorte que

$$\mathrm{E_c} = \mathrm{E_{tot}} - \mathrm{E_{seuil}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{\text{seuil}}} = 1{,}60.10^{-19} \text{ J} = 1{,}00 \text{ eV}$$

13. Expérience de Franck et Hertz* None available

14. Quantum interference experiment with large molecules (American Association of Physics Teachers 2002)* https://youtu.be/UqVaLmI_6yg

15. De l'électron en boîte

1. La plus petite énergie de transition entre deux état correspond à la transition de $n = 2$ à $n = 1$, d'où

$$\Delta\mathrm{E} = \mathrm{E_2} - \mathrm{E_1} = 4\,\mathrm{E_1} - \mathrm{E_1} = 3\,\mathrm{E_1} = \frac{3h^2}{8ma^2} \qquad \text{car} \qquad \mathrm{E}_n = n^2\,\mathrm{E_1}$$

avec a la taille de la boîte. De plus, le photon émis est tel que $\Delta\mathrm{E} = h\nu = hc/\lambda$, soit

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{3h^2\lambda}{8mhc}} = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}} = 0{,}74 \text{ nm}}$$

2. Pour la transition de 3 vers 2, la variation énergétique vaut

$$\Delta\mathrm{E} = \mathrm{E_3} - \mathrm{E_2} = 9\,\mathrm{E_1} - 4\,\mathrm{E_1} = 5\,\mathrm{E_1} = \frac{5h^2}{8ma^2}$$

On trouve alors avec le même raisonnement

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{5h\lambda}{8mc}} = 1{,}5 \text{ nm}}$$

16. La polarisation vue comme une expérience quantique* None available

17. Principe de superposition linéaire** https://youtu.be/l1aT0Rz2Dfg

1. La longueur d'onde associée à ψ_1 vaut $\lambda_1 = 2\mathrm{L}$ puisque $\psi_1(x,0)$ s'écrit sous la forme $\mathrm{A}\sin\left(\dfrac{2\pi\, x}{\lambda_1}\right)$. Ainsi, la quantité de mouvement associée à cette onde électronique vaut $p_1 = h/\lambda_1 = h/2\mathrm{L}$ et son énergie au fond du puits est simplement associée à son énergie cinétique à savoir
$$\boxed{\mathrm{E}_1 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8m\,\mathrm{L}^2}}$$
Le même raisonnement donne $\lambda_2 = \mathrm{L}$ et $\mathrm{E}_2 = \dfrac{h^2}{2m\,\mathrm{L}^2}$
2. À $t = 0$, l'argument de l'exponentielle est nul et l'exponentielle vaut donc 1. Ainsi, à chaque fois $\psi_i(x,t) = \psi_i(x,0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mathrm{E}_i t/\hbar}$. En particulier,
$$\boxed{\psi_1(x,t) = \mathrm{A}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi h t/4m\mathrm{L}^2} \qquad \text{et} \qquad \psi_2(x,t) = \mathrm{A}\,\sin\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi h t/m\mathrm{L}^2}}$$
3. Superposition de deux états
   (a) La constante A est telle que l'intégrale du module au carré de $\psi(x,0)$ sur tout l'espace (donc en particulier entre 0 et L, seuls endroits où peut se trouver la particule) donne 1.
$$1 = \int_0^{\mathrm{L}} |\psi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{A}^2 \int_0^{\mathrm{L}} \left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$\text{soit} \qquad \mathrm{A} = \sqrt{\frac{1}{\displaystyle\int_0^{\mathrm{L}} \left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)\right]\mathrm{d}x}}$$

> Le calcul explicite n'a pas vraiment d'intérêt physique mais peut servir d'entraînement quand vous aurez vu les intégrales en maths. Typiquement, ici on essaie de « linéariser » les produits de sinus. Déjà, en utilisant le fait que $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, on peut calculer que
> $$\int_0^{\mathrm{L}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x/\mathrm{L})}{4\pi/\mathrm{L}}\right]_0^{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{2}$$
> par périodicité du cosinus. On montre de même que
> $$\int_0^{\mathrm{L}} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(4\pi x/\mathrm{L})}{8\pi/\mathrm{L}}\right]_0^{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{2}$$
> Le double produit se calcule en remarquant que $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, donc
> $$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{L}} 2\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\mathrm{L}} \left[\cos\left(\frac{-\pi x}{\mathrm{L}}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{\mathrm{L}}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\mathrm{L}}{\pi}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right) - \frac{\mathrm{L}}{3\pi}\,\sin\left(\frac{3\pi x}{\mathrm{L}}\right)\right]_0^{\mathrm{L}}\end{aligned}$$
> ce qui vaut 0 puisqu'on regarde $\sin(0)$, $\sin(\pi)$ et $\sin(3\pi)$ qui valent tous 0.
>
> Ainsi, on en déduit $\boxed{\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{L}}}}$

(b) Pour avoir la forme explicite de la fonction d'onde, il suffit de remplacer les expressions de $\psi_i(x,t)$ et on obtient

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}}}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{\mathrm{L}}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi ht/4m\mathrm{L}^2} + \sin\left(\frac{2\pi x}{\mathrm{L}}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi ht/m\mathrm{L}^2}\right)}$$

L'animation python suivante permet de visualiser l'évolution résultante pour la densité de probabilité de présence de l'électron dans ce trou (à condition de fixer n à 2).

https://github.com/jjfPCSI1/py4phys/blob/master/lib/S06_principe_de_superposition_lineaire.py

(c) La mesure de l'énergie d'une telle superposition donne soit E_1, soit E_2 (on ne peut obtenir qu'un état propre comme résultat d'une mesure). Comme la fonction d'onde est composée à 50% de ψ_1 et à 50% de ψ_2, on obtiendra donc E_1 dans 50% des cas et E_2 dans les autres 50% des cas. La valeur moyenne sera donc $(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2)/2$, soit $5\mathrm{E}_1/2$.

18. Superposition non stationnaire d'états stationnaires** Il suffit de faire les calculs (mathématiques) en manipulant correctement les complexes (tout est fourni...). Pour avoir une visualisation globale, voir le lien suivant en spécifiant `n=3` dans le programme.

https://github.com/jjfPCSI1/py4phys/blob/master/lib/S06_principe_de_superposition_lineaire.py

19. Du quantique au classique*** None available

20. Puit infini et niveau de Fermi* https://youtu.be/DbZuuv_a7vI

21. Particule confinée*

1. Il s'agit ni plus ni moins du cours, mais redonnons ici tous les arguments.
   La probabilité de trouver l'électron hors du puits ou (par continuité) sur les bords est nulle, ce qui implique que la fonction d'onde (dont le module carré donne la densité de probabilité de présence) est nulle en $x = 0$ et $x = a$. Par analogie avec une corde vibrante attachée aux deux extrémités, on peut dire que la partie spatiale de la fonction d'onde pour un état stationnaire peut s'écrire

   $$\psi(x) = \mathrm{A}\,\sin(kx)$$

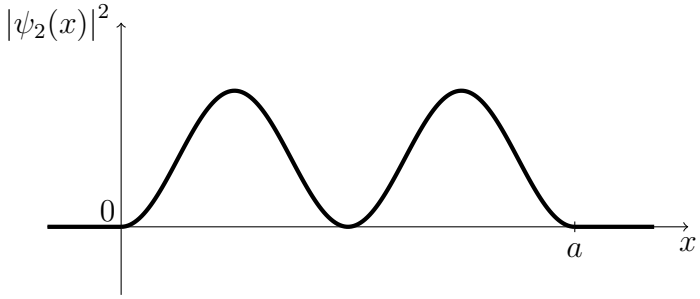
   où le sinus a été choisi pour automatiquement vérifier $\psi(0) = 0$ et il reste encore à imposer la seconde condition aux limites. Ainsi, $\psi(a) = 0$ impose nécessairement que

   $$k_n a = n\pi \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

   Or, comme $k = 2\pi/\lambda$, cette condition de quantification impose $a = n\lambda_n/2$, soit que le puits contient un nombre entier de demi-longueurs d'ondes (exactement comme pour la corde vibrante). Mais ceci n'est qu'un intermédiaire pour parvenir à l'expression de l'énergie de la particule coincée dans le puits de potentiel. En effet, dans le puits, l'énergie de la particule est confondue avec son énergie cinétique $p^2/2m$ puisque l'énergie potentielle y est prise nulle par convention. On a donc besoin d'exprimer la quantité de mouvement, ce que permet la formule de De Broglie qui a associé à chaque particule une longueur d'onde $\lambda = h/p$, de sorte que la quantité de mouvement de l'électron coincé dans sa boîte est aussi quantifiée selon

   $$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2a} \qquad \text{et finalement} \qquad \boxed{\mathrm{E}_n = \frac{{p_n}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2a}\right)^2 = \frac{n^2\,h^2}{8m\,a^2}}$$

2. La probabilité de présence est donnée par le carré du module de la fonction d'onde qui correspond au cas $n = 2$. Or, pour ce cas $n = 2$, on a $k_2 = 2\pi/a$ de sorte que $\psi_2(x) = \mathrm{A}\sin(2\pi x/a)$. Il suffit alors de représenter son carré pour visualiser la probabilité de présence de l'électron en un point x donné du puits de potentiel.



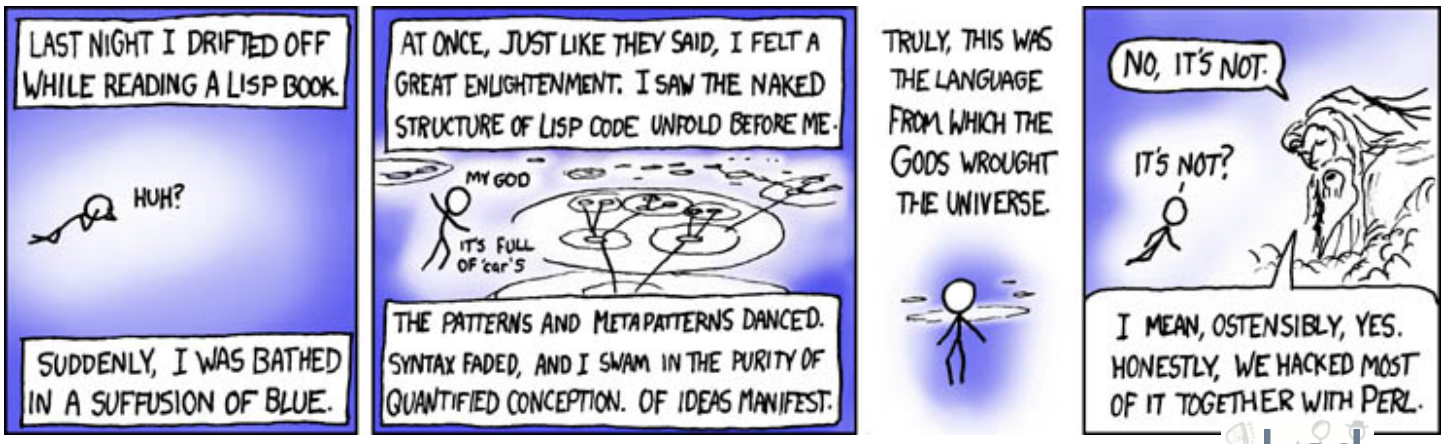
3. Dans le puits infini étudié précédemment, il y a 22 électrons à caser. Sachant que les électrons ne supportent pas d'être plus de deux par étages (et qu'ils n'aiment pas non plus monter les escaliers), on doit donc remplir entièrement les 11 premiers niveaux. Le plus petit saut qu'un électron pourrait faire entre un niveau d'énergie et le suivant sera donc du 11e au 12e étage, c'est-à-dire la transition $n = 11 \to n = 12$. Ainsi, l'énergie $h\nu_{\mathrm{ph}}$ apportée par le photon absorbée est utilisée pour faire passer un électron de l'énergie E_{11} vers l'énergie E_{12}. De la sorte, on a

$$\frac{hc}{\lambda_{\mathrm{ph}}} = \mathrm{E}_{12} - \mathrm{E}_{11} = (12^2 - 11^2)\,\frac{h^2}{8m\,a^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = \sqrt{\frac{23\,h\,\lambda_{\mathrm{ph}}}{8m\,c}} = 1{,}8\ \mathrm{nm}}$$

22. Constante de structure fine None available



You can also just ignore any science assertion
where "quantum mechanics" is the most complicated phrase in it.



We lost the documentation on quantum mechanics.
You'll have to decode the regexes yourself.

♫