

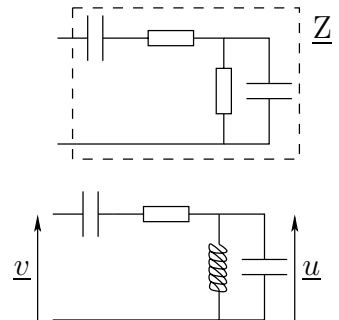
## Oscillateurs amortis : régime forcé

### 1. Questions de cours

1. Quelle est la période des fréquences usuelles suivantes : 50 Hz, 100 Hz, 1 kHz, 1 MHz?
2. Soit un signal périodique toujours négatif. Que peut-on dire du signe de sa valeur moyenne? du signe de sa valeur efficace?
3. Montrer que  $[C\omega] = \Omega^{-1}$  et  $[L\omega] = \Omega$ .

### 2. Applications directes du cours

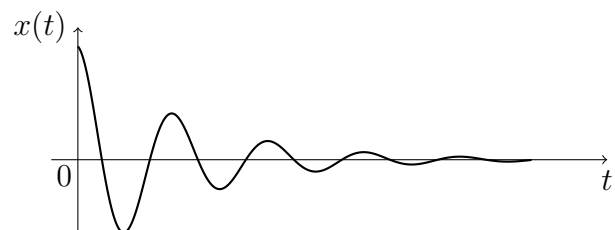
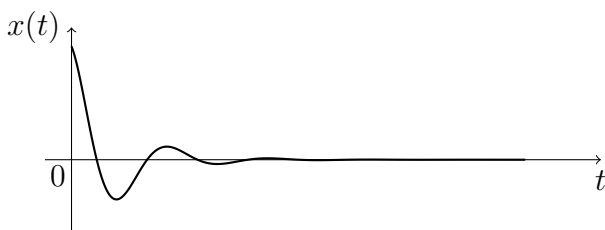
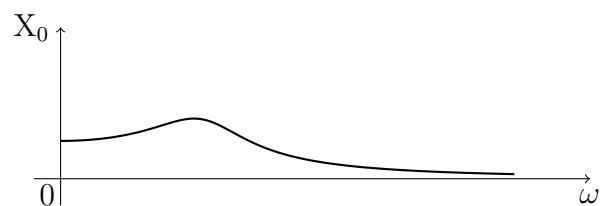
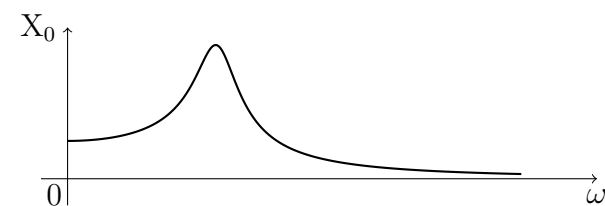
1. Déterminer l'impédance  $\underline{Z}$ . En déduire l'impédance réelle  $Z$  et le déphasage  $\varphi$  de la tension sur le courant sachant que les résistors ont une résistance  $R$  et les condensateurs une capacité  $C$ .
2. Déterminer  $\underline{u}$  en fonction de  $\underline{v}$ . Les condensateurs ont une capacité  $C$ , la bobine une inductance  $L$  et le résistor une résistance  $R$ .



### 3. Calculs d'impédances

1. Calculez, pour une fréquence de 1 kHz l'impédance d'un condensateur de  $1 \mu\text{F}$  d'une self de 2 mH Idem pour une fréquence de 1 MHz
2. Une résistance de  $25 \Omega$ , un condensateur de  $10 \mu\text{F}$  et un inducteur de 0,1 H qui possède une résistance de  $12 \Omega$  sont connectés en série. Déterminer pour des fréquences de 100 Hz et de 1000 Hz :
  - (a) le module de l'impédance du circuit;
  - (b) le module de l'impédance de l'inducteur.
3. Soit une résistance de  $2 \text{ k}\Omega$  en parallèle avec un condensateur de  $3 \mu\text{F}$ . Calculez l'impédance complexe équivalente à une fréquence de 50 Hz.

**4. Qui est qui?** Les courbes de réponse en amplitude et de réponse libre (régime transitoire) pour deux oscillateurs mécaniques différents sont données ci-dessous. Associer, en justifiant sans calcul, à chacune des courbes de réponse en fréquence la courbe de réponse libre correspondante.



**5. Impédance simple** L'impédance complexe d'un dipôle peut s'écrire  $\underline{Z} = a + jb\omega$  avec  $a = 50 \text{ SI}$  et  $b = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ SI}$ .

1. Quelles sont les dimensions et les unités des coefficients  $a$  et  $b$ ?
2. À quel élément est équivalent ce dipôle en hautes fréquences? En basses fréquences? Quelle est la limite basses fréquences / hautes fréquences?
3. On le branche aux bornes d'un réseau tel que ( $U_{\text{eff}} = 200 \text{ V}$ ,  $f = 1,0 \text{ kHz}$ ), calculer  $I_{\text{eff}}$  et le déphasage de l'intensité du courant par rapport à la tension.
4. Même question si on le branche aux bornes du réseau domestique ( $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ).

**6. Vrai-Faux : résonance RLC série** Le terme «tension» représente la tension du générateur.

1. Pour des valeurs de  $L$ ,  $C$  et  $f$  données, le déphasage tension/courant dépend de la valeur de  $R$ .
2. Pour des valeurs de  $L$ ,  $C$  et  $R$  données, le déphasage tension/courant dépend de la valeur de  $f$ .
3. Lorsque  $R = 50 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $E = 0,1 \text{ V}$  et  $f = 100 \text{ Hz}$ , l'intensité du courant est en avance de phase par rapport à la tension.
4. Pour des valeurs de  $L$ ,  $C$  et  $R$  données, il est possible d'avoir tension et intensité en phase pour une fréquence particulière (non nulle).
5. Pour des valeurs de  $L$ ,  $C$  et  $R$  données, il est possible d'avoir tension et intensité en opposition de phase pour une fréquence particulière (non nulle).
6. L'impédance du circuit augmente avec la fréquence.
7. L'impédance augmente lorsqu'on augmente  $L$  (tous les autres paramètres restant constants)
8. L'impédance augmente lorsqu'on augmente  $C$ .
9. L'impédance augmente lorsqu'on augmente  $R$ .

**7. Sommes de sinusoïdes\***

1. Rechercher l'amplitude et la phase à l'origine de la fonction  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  sachant que  $u_1 = 5 \cos(\omega t)$  et  $u_2 = 8 \cos(\omega t + \pi/4)$ . On pourra chercher une solution graphique (règle et rapporteur) ou une solution analytique via le théorème de Pythagore généralisé.
2. Soient deux tensions sinusoïdales synchrones  $u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t)$  et  $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \pi/2)$ .
  - (a) Exprimer  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  en utilisant la méthode des nombres complexes avec les valeurs numériques suivantes  $U_{m1} = 3,0 \text{ V}$  et  $U_{m2} = 4,0 \text{ V}$ .
  - (b) Retrouver ce résultat par une représentation de Fresnel (ou dans le plan complexe).
3. Soient deux intensités sinusoïdales synchrones  $i_1(t) = I_{m1} \sin(2\omega t)$  et  $i_2(t) = I_{m2} \cos(2\omega t + \pi/3)$ . Exprimer  $i(t) = i_1(t) - 2i_2(t)$  en utilisant la méthode des nombres complexes avec les valeurs numériques suivantes  $I_{m1} = 0,50 \text{ A}$  et  $I_{m2} = 1,0 \text{ A}$ .

**8. Jeux complexes\***

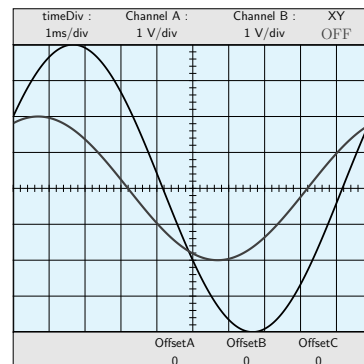
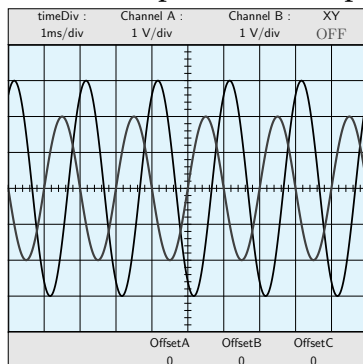
1. Une tension  $u_1$  a pour amplitude  $4 \text{ V}$  et présente une avance de phase de  $\pi/3$  par rapport à  $u_2 = 0,1 \cos(\omega t - \pi/4)$ . Calculer  $u_1(t)$  et  $\underline{u}_1$ .
2. Quelles sont la représentation complexe de la fonction en quadrature avance et de même amplitude que  $\underline{v} = 50 e^{j(\omega t - \pi/4)}$ ? Même question pour une quadrature retard.
3. Quel est le déphasage entre les deux tensions  $v_1$  et  $v_2$  tel que  $\underline{v}_2 = \underline{v}_1 \frac{1 + j\pi/5}{1 - j\pi/5}$ . Comparer leur amplitude et leur valeur efficace.

**9. Résonance en intensité pour le RLC série\*** Une bobine d'inductance  $L = 1,0 \text{ H}$ , de résistance  $R = 10 \Omega$  est montée en série avec un condensateur de capacité  $C = 5,0 \mu\text{F}$ . On applique à ce circuit une tension sinusoïdale de valeur  $U_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$  et de fréquence  $f$ .

1. Calculer la fréquence de résonance en intensité. Quelle est l'intensité efficace à la résonance?
2. Calculer la largeur de la bande passante.
3. À la résonance en intensité, quelle est la tension efficace aux bornes du condensateur? Commenter.

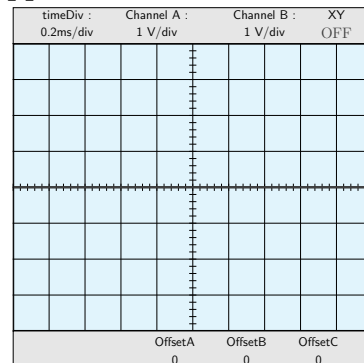
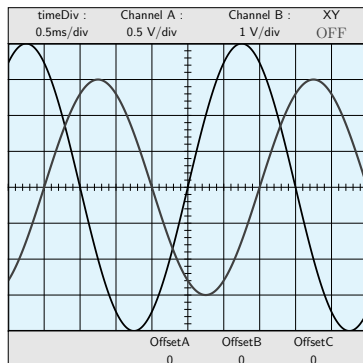
## 10. Déphasage et oscilloscope\*

1. Les figures ci-dessous représentent deux oscillogrammes. Pour chaque oscillogramme, déterminer le déphasage de la voie A (de plus faible amplitude) par rapport à la voie B.



2. Soit la tension  $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$  avec  $U_1 = 2 \text{ V}$  et la tension  $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $U_2 = 3 \text{ V}$ . Déterminer à partir de l'oscillogramme ci-dessous à gauche :
  - (a) La courbe correspondant à la voie 1 (la surligner en rouge)
  - (b) La courbe correspondant à la voie 2 (la surligner en vert)
  - (c) La période  $T$ , la fréquence  $f$  et la valeur du déphasage  $\varphi$  (en degré).

Indiquer si la tension  $u_2(t)$  est en retard ou en avance par rapport à la tension  $u_1(t)$ .



3. Soit la tension  $U(t) = E + U_0 \cos(\omega t)$  avec  $E = 1 \text{ V}$ ,  $U_0 = 2 \text{ V}$ ,  $\omega = 6,28 \text{ krad.s}^{-1}$ . Les sensibilités de sont notées ci-dessus (à droite). Représenter la tension visualisée à l'oscilloscope (en mode DC).

## 11. Notation complexe\*

1. Rechercher le nombre complexe associé aux fonctions suivantes ; les représenter dans le plan complexe.

$$i = 0,5 \cos(\omega t + \pi/3) \quad \text{et} \quad u = 3 \cos(\omega t - 3\pi/4)$$

$$v = 5 \sin(\omega t + \pi/6) \quad i = -5 \cos(\omega t + \pi/4) \quad \text{et} \quad u = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2)$$

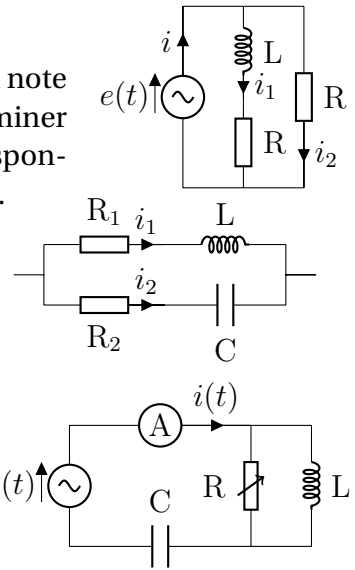
2. Quelles sont les fonctions réelles du temps décrites par les nombres complexes ci-dessous? Placer les vecteurs du plan complexe. Indiquer l'amplitude et la phase à l'origine<sup>1</sup>.

$$\underline{u} = 8\sqrt{2}e^{j(\omega t + 5\pi/4)} \quad \underline{i} = -4je^{j(\omega t - \pi/6)} \quad \underline{V} = 0,2je^{j\pi/4} \quad \text{et} \quad \underline{I} = 4e^{j\pi/8}$$

1. La notation en majuscule  $\underline{U}$  est aussi utilisée pour représenter l'amplitude complexe  $\underline{u}_0$  du cours.

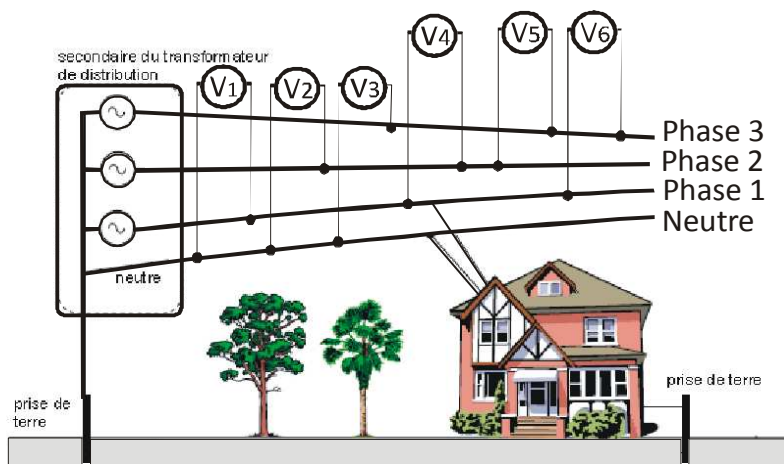
## 12. Calculs de courants\*

1. Le générateur idéal délivre une tension sinusoïdale  $e(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$ . On note  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi$  les déphasages respectifs de  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i$  par rapport à  $e(t)$ . Déterminer les valeurs efficaces des intensités  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i$  ainsi que les déphasages correspondants. Application numérique :  $U = 127 \text{ V}$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ ,  $R = 500 \Omega$ ,  $f = 500 \text{ Hz}$ .
2. On considère le dipôle ci-contre alimenté en régime sinusoïdal forcé. Trouver la relation à laquelle satisfont  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  et  $C$  pour que  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  soient en quadrature.
3. On considère le montage de la figure ci-contre. Le générateur idéal délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace constante et de pulsation  $\omega$  que l'on peut faire varier.  $R$  est un potentiomètre (résistor de résistance variable). On constate que pour une valeur  $\omega_0$  de  $\omega$ , l'ampèremètre indique toujours la même valeur quelle que soit la valeur de  $R$ .
  - (a) Déterminer la relation liant  $L$ ,  $C$  et  $\omega_0$ .
  - (b) Pour quelle valeur de  $R$ ,  $e(t)$  et  $i(t)$  sont-ils en phase?



**13. Tension triphasée\*** Dans une installation triphasée la distribution d'énergie électrique est assurée par un fil neutre de potentiel pris égal à 0 et trois fils de phase portés aux potentiels respectifs

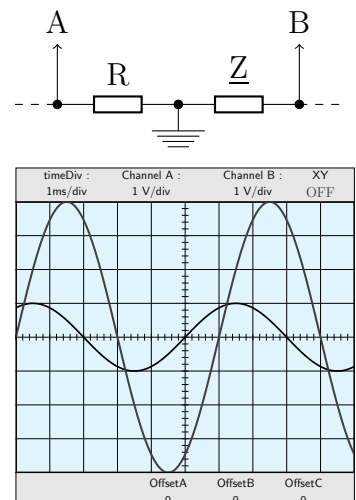
$$V_1 = 311 \cos(\omega t) \quad V_2 = 311 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad V_3 = 311 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$



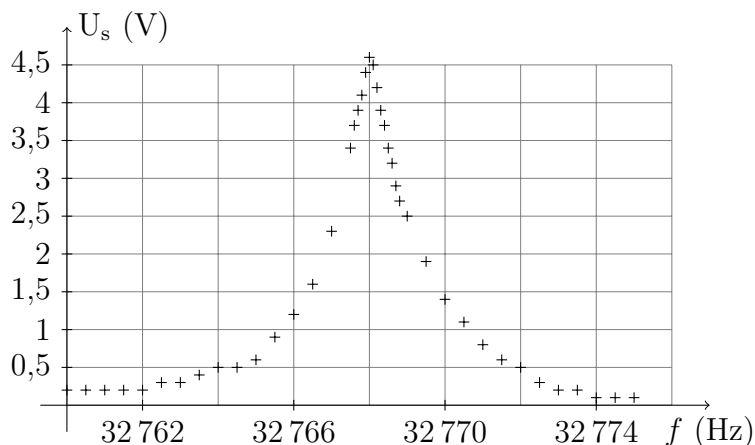
1. Quelle est l'indication des 6 voltmètres dessinés sur la figure?
2. Montrer que  $V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) = 0$ .

**14. Détermination expérimentale d'une impédance\*** On réalise un circuit linéaire fonctionnant en régime sinusoïdal forcé dont seule une portion est représentée ci-contre : le dipôle à gauche est un résistor de résistance connue  $R = 100 \text{ Ohm}$  tandis que le dipôle de droite est un dipôle passif linéaire d'impédance  $Z$  que l'on cherche à déterminer. Pour ce faire, on a connecté un oscilloscope. La fonction invert a été mise en fonction pour la voie B : c'est donc -voie B que l'on observe. La voie A correspond au signal de plus faible amplitude.

1. Déterminer les période  $T$ , fréquence  $f$  et pulsation  $\omega$  communes de ces signaux.
2. Déterminer l'impédance  $Z$  de ce dipôle. Possède-il un comportement inductif ou capacitif?



**15. Résonance d'un quartz horloger\*** Depuis la mise au point industrielle du premier résonateur à quartz pour une montre en 1967 à Neuchâtel, les oscillateurs à quartz se sont étendus à une multitude d'appareils tant scientifiques qu'industriels. En démontrant le réveil, on peut distinguer un petit cylindre (le quartz), une puce électronique, ainsi qu'une bobine associée à la roue dentée manœuvrant l'aiguille des secondes. Le graphe ci-contre donne la courbe de résonance d'un quartz identique à celui de votre montre.



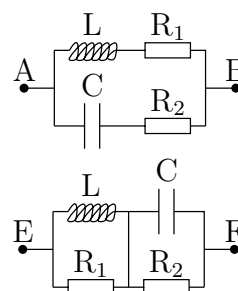
1. Déterminer le facteur de qualité de cet oscillateur.
2. Combien de temps faut-il exciter le cristal pour qu'il ait eu le temps d'atteindre le régime sinusoïdal forcé?

**16. QCM résonance pour un RLC série\*** On considère un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale  $E = 100 \sin(2\pi f t)$  de fréquence variable. Le courant dans le circuit passe par un maximum pour une fréquence  $f_0$ . La valeur efficace de l'intensité du courant maximal est égale à 0,707 A. La valeur efficace du courant est égale à 0,500 A pour deux valeurs  $f_1$  et  $f_2$  de la fréquence égales respectivement à 13627 Hz et 7338 Hz.

1. La fréquence de résonance du circuit est égale à  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{A: } 10,5 \text{ kHz} & \text{B: } 10,0 \text{ kHz} \\ \text{C: } 9,5 \text{ kHz} & \text{D: } 9,0 \text{ kHz} \end{array} \right.$
2. La résistance R est égale à  $\begin{array}{ll} \text{A: } 100 \, \Omega & \text{B: } 141 \, \Omega \end{array}$
3. Le facteur de qualité du circuit vaut  $\begin{array}{ll} \text{A: } 1,59 & \text{B: } 3,18 \end{array}$
4. Les valeurs de L et de C sont égales à  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{A: } L = 2,53 \text{ mH} & \text{et } C = 100 \text{ nF} \\ \text{B: } L = 25,3 \text{ mH} & \text{et } C = 10,0 \text{ nF} \end{array} \right.$
5. À la résonance,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{A: } u_L \text{ et } u_C \text{ sont en phase.} \\ \text{B: } \text{La valeur efficace de } u_C \text{ vaut } 112 \text{ V.} \\ \text{C: } \text{La valeur efficace de } u_C \text{ vaut } 159 \text{ V.} \\ \text{D: } \text{Les valeurs efficaces de } u_L \text{ et } u_C \text{ sont égales.} \end{array} \right.$

### 17. Impédances réelles\*\*

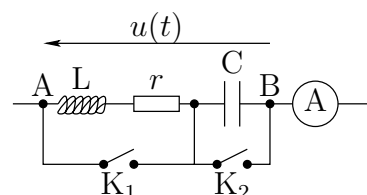
1. À quelles relations doivent satisfaire L,  $R_1$ ,  $R_2$  et C pour que l'impédance équivalente du dipôle AB soit réelle quel que soit  $\omega$ ?
2. Quelle est alors la valeur de cette impédance?
3. Mêmes questions pour le dipôle EF.



**18. Circuit RLC\*\*** Avec  $u(t) = U \cos(\omega t)$ , l'ampèremètre fournit la même valeur lorsque :

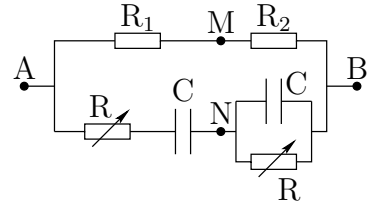
- $K_1$  et  $K_2$  sont ouverts;
- $K_1$  est seul ouvert;
- $K_2$  est seul ouvert.

Quelles relations existent entre  $r$ , L, C et  $\omega$ ?



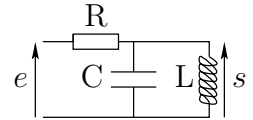
**19. Fréquence-mètre\*\*** On dit qu'un pont est en équilibre lorsque la tension  $\underline{u}_{MN}$  est nulle quelle que soit la tension d'entrée  $\underline{u}_{AB}$ .

1. Trouver les conditions d'équilibre du pont de Nernst ci-contre.
2. Expliquer le titre de cet exercice.
3. Si  $C = 1,0 \mu\text{F}$ , quel est le domaine de variation de  $R$  permettant de mesurer des fréquences entre 1,0 et 100 kHz?



**20. Résonance\*\*** On considère le circuit suivant, où  $e$  est une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .

1. Donner l'expression complexe de la tension  $s$ .
2. Montrer qu'il y a un phénomène de résonance pour la tension  $s$ . On précisera la pulsation à laquelle ce phénomène se produit.
3. Déterminer la bande passante correspondante.
4. En déduire l'expression du facteur de qualité.
5. Que peut-on dire du déphasage à la résonance de la tension  $s$ ?



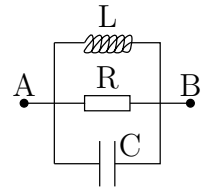
**21. Circuit bouchon\*\*** On considère le dipôle AB ci-contre.

1. Déterminer l'impédance  $\underline{Z}_{AB}$  et la mettre sous la forme

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{Z_0}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$$

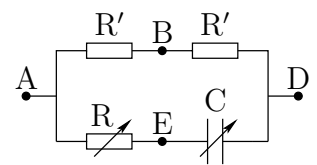
avec  $Z_0$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  à déterminer.

2. (a) Montrer que le module  $Z_{AB}$  passe par un maximum pour une pulsation  $\omega_a$  à déterminer.  
(b) Comment se comporte le dipôle à cette pulsation?



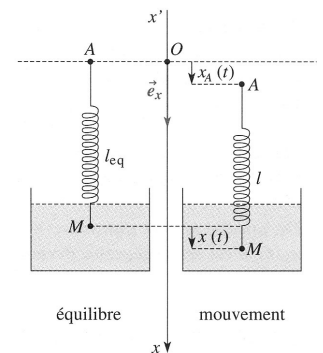
**22. Pont déphaseur\*\*** On applique entre A et D une tension sinusoïdale  $u = U_0 \cos \omega t$ .

1. (a) Avec la représentation de Fresnel, construire géométriquement la somme des tensions complexes  $\underline{u}_{AD} = \underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BD} = \underline{u}_{AE} + \underline{u}_{ED}$ .  
(b) En déduire  $\underline{u}_{BE}$  et ses particularités.
2. Retrouver les résultats de la question précédente en appliquant les lois des circuits en complexe.



**23. Bande passante de la réponse en vitesse\*\*** Une petite sphère de masse  $m$  est suspendue à l'extrémité inférieure M d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Cette sphère plonge dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité  $\eta$ . Lorsqu'elle se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au fluide, ce dernier exerce la force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , pour des vitesses faibles. À  $t = 0$ , l'extrémité supérieure A du ressort est soumise à un déplacement  $x_A(t) = x_{Am} \cos(\omega t)$ .

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M.
2. Déterminer l'amplitude de la vitesse  $V_m$  en fonction de  $\omega$ .
3. On appelle bande passante (à 3 dB) la bande de fréquence  $\Delta f = (f_2 - f_1)$  à l'intérieur de laquelle l'amplitude de la vitesse  $V_m(\omega)$  satisfait à l'inégalité  $V_m(\omega) \geq V_r / \sqrt{2}$ , où  $V_r$  est l'amplitude de la vitesse à la résonance. Calculer  $\Delta f$ .



**24. Vibration d'un moteur\*\*** Lorsqu'un moteur fonctionne, un balourd provoque des vibrations du châssis. Il est nécessaire de prévoir un système de suspension. Le moteur est assimilé à un matériel M de masse  $m$ . La suspension peut être modélisée par un ressort de longueur à vide  $\ell_0$  et de raideur  $k$ , placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce sur le moteur une force de freinage  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\vec{v}$  désigne la vitesse du point M par rapport au référentiel d'étude lié au sol, supposé galiléen. On note  $\ell$  la longueur du ressort.

1. Le moteur ne fonctionne pas et il est immobile. Déterminer la longueur  $\ell_{\text{eq}}$  du ressort. Dans la suite du sujet, la position du moteur à l'équilibre est prise comme origine O de l'axe  $z$ .
2. Le moteur étant toujours arrêté, on l'écarte de sa position d'équilibre puis on le laisse évoluer librement.
  - (a) Établir avec soin l'équation différentielle vérifiée par  $z(t)$ .
  - (b) On pose  $\lambda = \alpha/2m$ ,  $\omega_0^2 = k/m$  et on suppose  $\lambda < \omega_0$ . Donner la forme générale de la solution  $z(t)$  en fonction des paramètres  $\lambda$  et  $\omega_0$ . Comment appelle-t-on ce type de régime?
3. Le moteur fonctionne, tout se passe alors comme s'il apparaissait une force supplémentaire s'exerçant sur le moteur :  $\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ .

- (a) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $z(t)$  est

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

- (b) En régime sinusoïdal établi, on recherche une solution de la forme  $z(t) = Z_0 \cos(\omega t - \varphi)$ .

- i. Exprimer  $Z_0$  et  $\varphi$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\omega_0$ ,  $F_0$  et  $m$ .
- ii. Établir une condition sur  $\lambda$  pour qu'il y ait une possible résonance en amplitude.
- iii. Donner l'allure de  $Z_0(\omega)$  pour  $\lambda = 2\omega_0$  et  $\lambda = \omega_0/10$  (on tracera les deux courbes sur un même graphique). Commentaires.

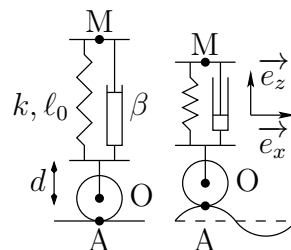
- (c) La pulsation  $\omega$  vaut  $0,63 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le moteur a une masse  $m = 10 \text{ kg}$  et on dispose de deux ressorts de raideur  $k_1 = 4,0 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$  et  $k_2 = 10,0 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}$ . Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension sachant que  $\lambda = \omega_0/10$ ?

**25. Résonance d'un lave linge\*\*** Selon la masse de linge introduit dans une machine à laver, et selon la vitesse de rotation du moteur de la machine, celle-ci essore avec plus ou moins de vibrations et de bruits. C'est ce phénomène que l'on va interpréter.

1. Étude des phénomènes périodiques
  - (a) Le moteur de la machine à laver peut tourner aux vitesses suivantes N exprimées en tours par minute :  $N = 300, 500, 600, 700, 800$ . Calculer les fréquences  $f$  correspondantes ainsi que les périodes  $T$ .
  - (b) La cuve de masse  $M = 6,0 \text{ kg}$  est suspendue grâce à un système équivalent à un ressort de raideur  $k$  égal à  $3,0 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ . La machine peut contenir jusqu'à  $5,0 \text{ kg}$  de linge. Calculer la période propre des oscillations de la cuve lorsqu'elle contient les masses suivantes  $m$  de linge :  $m = 1,0 \text{ kg}, 1,6 \text{ kg}, 2,0 \text{ kg}, 3,0 \text{ kg}, 4,0 \text{ kg}, 5,0 \text{ kg}$ .
2. Oscillations forcées et résonance
  - (a) La machine tourne à la vitesse de 600 tours par minute et contient  $1,6 \text{ kg}$  de linge. Lors de l'essorage, la machine vibre beaucoup et devient très bruyante. Expliquer ce phénomène.
  - (b) Si la machine contient  $4,0 \text{ kg}$  de linge, a-t-on les mêmes inconvénients?
  - (c) La machine tourne à la vitesse de 800 tours par minute. Pourrait-on observer les mêmes inconvénients?

## 26. Amortisseur de véhicule\*\*

Un véhicule automobile est modélisé par une masse  $m$  placée en M et reposant sur une roue de centre O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement  $\beta$ . On rappelle qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de M par rapport à O. En toutes circonstances, l'axe OM reste vertical. On se propose d'étudier le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse  $v$  suivant  $x$  sur une route dont le profil est défini par  $z_A(x) = a \cos(2\pi x/\lambda)$ . La roue et la partie basse de la suspension sont supposées indéformables (OA et  $d$  sont constantes).



Pour simplifier, on pourra supposer  $d = 0$ . On note  $z_O(t)$  la variation d'altitude du point O par rapport à la position de repos. On repère le mouvement de la masse par son élongation  $z(t)$  par rapport à sa position d'équilibre stable quand le véhicule est au repos. On admet que le référentiel lié au sol est galiléen.

1. Que représente  $\lambda$  dans l'expression de  $z_A(x)$  ?
2. Montrer que la force de frottement fluide peut s'écrire  $\vec{f} = -\beta(\dot{z} - \dot{z}_O)\vec{e}_z$ .
3. Établir l'équation différentielle en  $z(t)$  du mouvement de la masse lorsque la vitesse  $v$  suivant  $x$  est constante.
4. Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical en régime permanent. À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?
5. Connaissez-vous un film (un grand classique des années 1950) qui «illustrerait» cet exercice ?

**27. Résonance en intensité pour le RLC série (bis)\*\*** Une bobine ( $b$ ) d'inductance  $L = 0,10$  H et de résistance  $r = 50 \Omega$  en série avec un résistor de résistance  $R = 50 \Omega$  et un condensateur de capacité  $C$  est montée aux bornes d'un générateur imposant une tension  $u(t)$  sinusoïdale de fréquence  $f = 250$  Hz à ses bornes. On constate que l'intensité  $i(t)$  du courant traversant le circuit et la tension  $u(t)$  sont en phase.

1. Proposer un montage qui permette de mesurer le déphasage de la tension  $u(t)$  par rapport au courant.
2. Calculer la valeur de la capacité du condensateur.
3. Calculer la tension efficace  $U_{\text{eff}}$  aux bornes du générateur et la tension efficace  $U_{\text{eff},C}$  aux bornes du condensateur sachant que la tension efficace aux bornes de l'association  $\{R; b\}$  est 11 V.
4. Quelle est la puissance fournie par le générateur ?

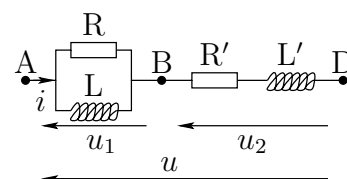
**28. Choix des éléments à résonance pour un RLC série\*\*** Trouver des valeurs pour les éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  d'un montage RLC série avec  $f_0 = 20$  kHz (fréquence de résonance) et  $Q = 2$  (facteur de qualité) telles que la résistance interne du générateur ( $50 \Omega$ ) et les résistance et capacité d'entrée de l'oscilloscope aient une influence négligeable à  $f_0$  (pour l'oscilloscope  $R_e = 1 \text{ M}\Omega$  et  $C_e = 20 \text{ pF}$ ). Commencer par faire un schéma du montage avec tous les éléments présents (on observe  $u_C(t)$  à l'oscilloscope).

## 29. Équivalence de dipôles\*\*\*

1. Soit le dipôle AB constitué d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$  associées en parallèle. Soit le dipôle A'B' constitué d'une résistance  $R'$  et d'une bobine d'inductance  $L'$  associées en série. Ces deux dipôles sont soumis à une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ .
  - (a) Déterminer  $R'$  et  $L'$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $\omega$  pour que, à la pulsation  $\omega$ , ces dipôles soient équivalents, c'est-à-dire qu'ils aient la même impédance.
  - (b) Quelle est alors la pulsation  $\omega_0$  pour laquelle on a, en plus de la condition précédente,  $\frac{R}{R'} = \frac{L}{L'}$  ?
  - (c) Calculer  $\omega_0$  avec  $R = 1,0 \cdot 10^2 \Omega$  et  $L = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ H}$ .

2. On considère le montage ci-dessous. On applique entre les bornes A et D du dipôle une tension de la forme :  $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$ . Les dipôles AB et BD sont équivalents et la pulsation est  $\omega_0$ . Dans cette question, on écrira les expressions demandées de la façon la plus simple possible en tenant compte des hypothèses. En particulier, on substituera  $R'$  et  $L'$  par leurs expressions en fonction de  $R$  et  $L$ .

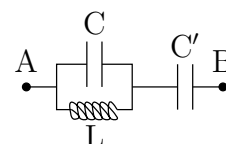
- (a) Établir l'expression de  $i(t)$  (intensité réelle).  
 (b) Déterminer les amplitudes complexes  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  des intensités traversant respectivement  $R$  et  $L$ .  
 (c) En déduire les valeurs efficaces de  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  et leurs déphasages par rapport à  $u(t)$ .



3. Donner l'expression de la capacité  $C$  qu'il faut mettre en série avec le dipôle AD pour que l'intensité du courant  $i(t)$  soit en phase avec  $u(t)$ , tension aux bornes de l'ensemble (dipôle AD et condensateur) à la pulsation  $\omega_0$ . Calculer  $C$  avec les données numériques précédentes.

### 30. Circuits équivalents au quartz piézoélectrique\*\*\*

Un quartz piézoélectrique peut être modélisé par l'association représentée ci-contre. On applique au dipôle AB une tension sinusoïdale  $u(t) = U_0 \cos \omega t$ . Les données des valeurs caractéristiques des composants intervenant dans le modèle sont à la question 30.2 : pour les questions ultérieures, **on fera systématiquement les applications numériques des grandeurs calculées.**



- Exprimer les pulsations  $\omega_r$  et  $\omega_a$  pour lesquelles le courant dans le circuit principal est infini ou nul. Compte tenu de cette définition des pulsations caractéristiques, on proposera une signification aux indices «r» et «a». Vérifier (analytiquement) que l'on a toujours  $\omega_a > \omega_r$ .
- Calculer numériquement  $\omega_a$  et  $\omega_r$  ainsi que les fréquences associées avec  $L = 1,00 \text{ mH}$ ;  $C = 2,00 \text{ nF}$  et  $C' = 10,0 \text{ pF}$ . Vérifier sur les valeurs numériques que les deux pulsations  $\omega_a$  et  $\omega_r$  sont certes différentes mais très proches.
- Exprimer l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_a$  et  $C'$ . Tracer alors l'allure de l'impédance réelle  $Z$  en fonction de  $\omega$ . Préciser les points caractéristiques et veiller à préciser la démarche retenue pour obtenir cette allure<sup>2</sup>.

### Une propriété intéressante

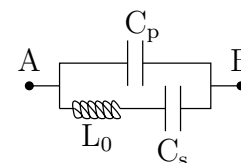
On fait osciller le quartz à la pulsation  $\omega_r$ . L'intensité du courant dans le circuit principal est très grande mais néanmoins finie car le quartz présente une résistance faible mais non rigoureusement nulle<sup>3</sup>.

- Sans faire aucun calcul supplémentaire, donnez l'allure de l'impédance réelle (voir la question 30.3) si l'on tient compte de la résistance non nulle du quartz.
- Calculer le rapport  $\eta_r = \Delta Z / \Delta f$  qui représente la variation d'impédance (complexe) lorsque la fréquence de la source fluctue légèrement autour de  $f_r$  (l'amplitude  $U_0$  est supposée constante). En déduire une propriété intéressante du quartz. On pourra à nouveau supposer négligeable la résistance du quartz.

### Autre modélisation

On propose ci-contre une autre modélisation pour le quartz.

- Calculer les valeurs des composants  $L_0$ ,  $C_s$  et  $C_p$  pour que l'on ait effectivement équivalence avec le premier modèle.
- Montrer que le rapport  $\eta_r$  ne dépend que de  $L_0$ .

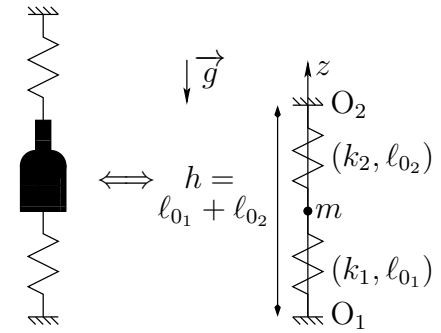


2. Une étude de fonction est bien sûr possible mais est totalement inutile et trop peu physique pour servir ici...  
 3. Par exemple au niveau de la bobine.

### 31. Zorro : Transport de la nitro par le méchant français\*\*\*

Le grand méchant français a affrété un train pour transporter ses bouteilles de nitroglycérine. Elles sont fixées au wagon par la base et le goulot via deux ressorts  $(k_1, \ell_{01})$  et  $(k_2, \ell_{02})$  comme représenté ci-contre.

Pour simplifier l'étude, on va assimiler la bouteille à un point de masse  $m$  accrochée à un support de hauteur totale  $h = \ell_{01} + \ell_{02}$ . L'axe des  $z$  est orienté vers le haut et son origine  $O$  est confondue avec la base  $O_1$  du ressort du bas lorsque le train est à l'arrêt. On commence par étudier le système dans le train à l'arrêt et on néglige tout frottement.



1. Par une méthode énergétique (ou à défaut par une autre méthode<sup>4</sup>), déterminer en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  et  $\ell_{01}$  la position d'équilibre  $z_{\text{éq}}$  de la masse.
2. Montrer que  $Z = z - z_{\text{éq}}$  vérifie une équation différentielle de type oscillateur harmonique dont on déterminera la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $k' = k_1 + k_2$  et  $m$ .
3. Quelle est la caractéristique du régime « transitoire » ici? Quelle approximation va-t-on devoir faire pour pouvoir l'oublier lors de l'excitation sinusoïdale future?

Le train roule à présent à une vitesse constante  $v$  en direction de l'armée ennemie. Pour ce faire, il utilise un système de propulsion qui induit des vibrations dans toute la structure de pulsation  $\omega$  identique à la vitesse de rotation des roues.

4. Sachant que les roues ont un rayon  $R$ , déterminer le lien entre  $\omega$  et  $v$ .

Les vibrations du train font que les bases  $O_1$  et  $O_2$  des deux ressorts oscillent selon les lois  $z_{O_1} = a \cos \omega t$  et  $z_{O_2} = h + a \cos \omega t$  par rapport au référentiel galiléen centré sur  $O$  se déplaçant à la même vitesse  $v$  du train à l'horizontale.

5. Déterminer la longueur des ressorts en fonction de  $z$ ,  $z_{O_1}$  et  $z_{O_2}$ .
6. En passant par la RFD, déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $z$  et par  $Z$ .
7. Laquelle de ces deux équations peut être passée en complexe et pourquoi?
8. Donner l'expression de l'amplitude réelle  $Z_0$  du mouvement de  $m$  par rapport à  $z_{\text{éq}}$  selon la valeur de la pulsation  $\omega$ .

On suppose à présent et pour la suite que l'amplitude de l'excitation vaut  $a = h/1000$ . Sauf pour son influence dans l'équation différentielle, on peut donc négliger le mouvement du cadre comparé au mouvement de la masse.

9. Sachant que la nitro n'aime pas les chocs, quelle est l'amplitude critique du mouvement de la bouteille? Pour quelles pulsations la nitro risque-t-elle d'exploser? On distinguera plusieurs cas selon les valeurs respectives de  $z_{\text{éq}}$  et  $h$ .
10. Que faut-il rajouter pour éviter l'explosion?

Pour laisser une chance aux méchants, on va considérer que l'air est responsable d'un frottement fluide linéaire de la forme  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ .

11. Estimer la valeur de  $\alpha$  sachant qu'un parachutiste (que l'on supposera uniquement soumis au poids et à ce frottement<sup>5</sup>) peut atteindre une vitesse limite de  $360 \text{ km.h}^{-1}$ . Qu'oublie-t-on si on assimile le  $\alpha$  du parachutiste au  $\alpha$  de la bouteille?
12. Montrer qu'en rajoutant cet ingrédient, la nouvelle équation différentielle pour  $Z$  peut s'écrire

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 a \cos \omega t$$

où l'on explicitera l'expression de  $Q$  en fonction de  $\alpha$ ,  $m$  et  $\omega_0$ .

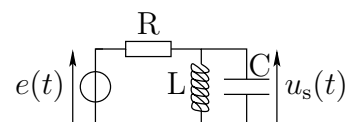
4. mais qui ne comptera que pour la moitié des points.

5. Même si à cette vitesse, il est peu probable que les frottements soient encore linéaires, faisons comme si.

13. Quelle valeur de  $Q$  doit-on choisir pour empêcher l'explosion des bouteilles? Faire une estimation en ordres de grandeurs<sup>6</sup> pour savoir si le frottement de l'air est suffisant.

**32. Détection de vitesse  $\nu_0$ \*\*\*** En supposant que le méchant a réussi à régler le problème de résonance de son dispositif (voir TD de RSF en mécanique), il faut que Zorro se débrouille pour faire sauter la cargaison avant qu'elle n'arrive à destination. Il va donc voir son ami Ethan Hunt qui tourne « Mission Impossible IV » dans le studio d'à côté pour lui demander de fabriquer un petit détonateur. Le but est de faire sauter le train sur une section droite complètement isolée où il atteint pour la première fois une vitesse  $\nu_0$ .

Un capteur piézoélectrique transforme les vibrations du wagon en signal électrique sous la forme d'un petit générateur  $e(t) = e_0 \cos \omega t$  avec  $e_0$  une constante et comportant une résistance interne  $R$ . On place en série au capteur un « circuit bouchon » constitué d'une bobine  $L$  (supposée parfaite) en parallèle avec un condensateur parfait  $C$ .



1. Déterminer l'impédance complexe du dipôle LC parallèle.

On voudrait que  $u_s(t)$  prenne une amplitude maximale lorsque le train roule à la vitesse  $\nu_0$ .

2. Quelle est la relation entre les amplitudes complexes  $\underline{e}$  et  $\underline{u}_s$  de  $e(t)$  et  $u_s(t)$ ?

3. Montrer alors que l'amplitude réelle  $U_s$  de  $u_s(t)$  s'écrit 
$$U_s = \frac{e_0}{\sqrt{1 + R^2 \left( \frac{1}{L\omega} - C\omega \right)^2}}$$

4. Pour quelle valeur de  $\omega$   $U_s$  est-elle maximale?

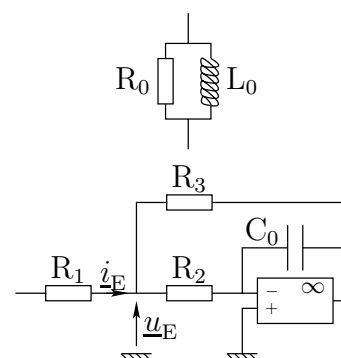
5. Comment doit-on choisir  $L$  et  $C$  pour avoir le maximum de  $U_s$  quand le train atteint  $\nu_0$  (on nommera  $\delta$  le rayon des roues du train pour éviter de confondre avec la résistance  $R$ )?

6. Quel est le déphasage entre  $u_s(t)$  et  $e(t)$  quand l'amplitude est maximale?

7. Tracer le graphe de  $U_s(\omega)$  puis lui superposer le même graphique en supposant que l'appareil de mesure branché en parallèle au circuit bouchon est de résistance  $R_0$  non infinie (faire un rapide raisonnement permettant de trouver directement l'expression de  $U'_s$ ).

**33. Simulation d'une inductance parfaite\*\*\*** Le problème du montage précédent est qu'il lui faut une bobine pour fonctionner. Or les bobines ne se miniaturisent pas forcément et pour faire un dispositif discret, il doit être assez petit. On va donc voir comment simuler une bobine à l'aide d'un condensateur, de résistances et d'un amplificateur opérationnel.

1. Exprimer l'admittance complexe du dipôle constitué d'une bobine parfaite  $L_0$  en parallèle avec une résistance  $R_0$ .
2. Dans le montage ci-contre, l'AO est idéal<sup>a</sup> fonctionne en régime linéaire<sup>b</sup>. Trouver la relation entre  $\underline{i}_E$  et  $\underline{u}_E$ .
3. Montrer que le dipôle de tension  $u_E$  ainsi constitué est équivalent à l'ensemble  $L_0 \parallel R_0$ . On donnera les expressions de  $L_0$  et  $R_0$  en fonction de la capacité  $C_0$  et des résistances  $R_2$  et  $R_3$ .
4. Faire un schéma complet des branchements à effectuer pour reproduire le filtre de la question 32.7



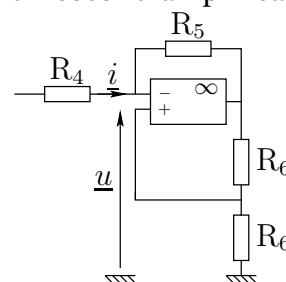
<sup>a</sup>. On peut supposer qu'aucun courant ne pénètre via aucune des deux entrées + et -, c'est-à-dire  $i^+ = 0$  et  $i^- = 0$

<sup>b</sup>. C'est-à-dire que l'on peut supposer que les potentiels des deux bornes d'entrées + et - sont égaux :  $V^+ = V^-$

6. À vous de donner des estimations raisonnables des paramètres importants.

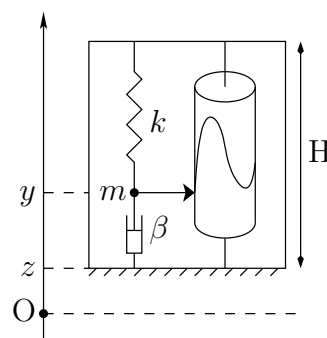
On aimerait à présent se débarrasser de la résistance  $R_0$ . À cet effet, on utilise un second amplificateur opérationnel en régime linéaire dans un montage dit à « résistance négative ».

5. Trouver la relation entre  $\underline{i}$  et  $\underline{u}$ .
6. Pourquoi appelle-t-on ce montage « montage à résistance négative »? Que vaut la puissance *fournie* au dipôle par l'extérieur? Qu'a-t-elle de particulier et comment peut-on l'expliquer?
7. Faire un schéma complet des branchements à effectuer sur le montage de la question 33.2 pour se débarrasser de  $R_0$ .
8. Peut-on améliorer le facteur de qualité du filtre de la partie 32 en choisissant d'autres valeurs pour les résistances? On dessinera aussi un schéma complet des branchements pour le filtre total.



### 34. Sismographe\*\*\*

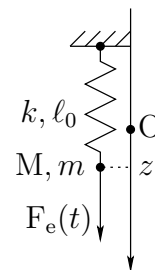
Un sismographe est constitué d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur naturelle  $\ell_0$ , d'un amortisseur de coefficient de frottement  $\beta$  et d'une masse  $m$  considérée comme ponctuelle. Le ressort et l'amortisseur sont fixés à un cadre rigide. Un stylet reproduisant les déplacements verticaux de la masse  $m$  par rapport au cadre est fixé au niveau de la masse  $m$  (voir figure). Le cadre est mis en mouvement vertical sinusoïdal :  $z(t) = Z \cos(\omega t)$ . Le référentiel  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_z)$  est supposé galiléen.



1. Déterminer l'équation d'évolution de  $y$ , cote de M dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
2. En déduire l'équation d'évolution de  $x$ , écart entre la longueur  $\ell$  du ressort à un instant  $t$  et sa longueur  $\ell_{eq}$  à l'équilibre.
3. Déterminer l'amplitude réelle  $X$  des oscillations de la masse et tracer l'allure pour quelques valeurs du facteur de qualité.
4. Comment choisir  $Q$  pour que  $X$  vaille  $Z$  à 5% près sur la plus grande plage de pulsations possible?

### 35. Bilan énergétique en régime sinusoïdal forcé\*\*\*

Un ressort élastique, de masse négligeable, de raideur  $k$  et de longueur au repos  $\ell_0$  est disposé verticalement. Son extrémité supérieure est fixe et il supporte un point matériel M de masse  $m$ . La présence de l'air induit une force de frottement du type  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ . Le point M est également soumis à une force excitatrice  $\vec{F}_e(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On considère que le régime sinusoïdal forcé est établi.



1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique, en notant  $z$  la position du point M par rapport à sa position d'équilibre, à excitation nulle.
2. Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{v}$  de la vitesse  $v(t)$  du point matériel M en fonction de  $Q = m\omega_0/\alpha$  et de  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , pulsation propre de l'oscillateur. Que représente le paramètre  $Q$ ? Justifier son expression par une analogie électromécanique.
3. En déduire l'amplitude  $v_0$  et le déphasage  $\varphi$  entre la vitesse  $v(t)$  et la force  $F_e(t)$ .
4. Dans le cas où  $\omega = \omega_0$ , calculer les expressions des grandeurs suivantes :
  - l'énergie mécanique  $\Delta E$  dissipée en une période;
  - l'énergie cinétique maximale  $E_{cm}$ ;
  - la différence  $\Delta E_p = E_{p(max)} - E_p(z=0)$  des énergies élastiques entre  $z = z_0$  et  $z = 0$ ,  $z_0$  désignant la valeur maximale de  $z(t)$ .
5. En déduire la valeur du rapport  $E_{cm}/|\Delta E|$  puis conclure.

