

Oscillateurs amortis : régime forcé

1. **Questions de cours** None available.
2. **Applications directes du cours** None available.
3. **Calculs d'impédances** None available.
4. **Qui est qui ?** None available.
5. **Impédance simple** None available.
6. **Vrai-Faux : résonance RLC série** None available.
7. **Sommes de sinusoides*** None available.

8. Jeux complexes*

$$1. \quad u_1(t) = 4 \cos(\omega t + \pi/12) \quad \text{et} \quad \underline{u}_1 = 4 e^{j(\omega t + \pi/12)}$$

$$2. \quad \underline{v}_{\text{avance}} = 50 e^{j(\omega t + \pi/4)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_{\text{retard}} = 50 e^{j(\omega t - 3\pi/4)}$$

$$\arg\left(\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1}\right) = \arg\left(\frac{1 + j\frac{\pi}{5}}{1 - j\frac{\pi}{5}}\right) = \arg\left(1 + j\frac{\pi}{5}\right) - \arg\left(1 - j\frac{\pi}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{-\pi}{5}\right) = 2 \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$|\underline{v}_2| = |\underline{v}_1| \times \frac{|1 + j\pi/5|}{|1 - j\pi/5|} = |\underline{v}_1|$$

9. Résonance en intensité pour le RLC série*

10. Déphasage et oscilloscope*

11. Notation complexe*

$$1. \quad \underline{i} = 0,5 e^{j(\omega t + \pi/3)} \quad \text{et} \quad \underline{u} = 3 e^{j(\omega t - 3\pi/4)}$$

Comme $v = 5 \sin(\omega t + \pi/6) = 5 \cos(\omega t + \pi/6 - \pi/2) = 5 \cos(\omega t - \pi/3)$ alors

$$\underline{v} = 5 e^{j(\omega t - \pi/3)}$$

Comme $i = -5 \cos(\omega t + \pi/4) = 5 \cos(\omega t + \pi/4 + \pi) = 5 \cos(\omega t + 5\pi/4)$, alors

$$\underline{i} = 5 e^{j(\omega t + 5\pi/4)}$$

Comme $u = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/2 - \pi/2) = 5\sqrt{2} \cos(\omega t)$, alors

$$\underline{u} = 5\sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$2. \quad u(t) = \text{Re}(\underline{u}) = \text{Re}(8\sqrt{2} (\cos(\omega t + 5\pi/4) + j \sin(\omega t + 5\pi/4))) = 8\sqrt{2} \cos(\omega t + 5\pi/4)$$

$$i(t) = \text{Re}(\underline{i}) = \text{Re}(-4j (\cos(\omega t - \pi/6) + j \sin(\omega t - \pi/6))) = 4 \sin(\omega t - \pi/6)$$

$$v(t) = \text{Re}(\underline{v} e^{j\omega t}) = 0,2 \cos(\omega t + 3\pi/4) \quad \text{et} \quad i(t) = \text{Re}(\underline{I} e^{j\omega t}) = 4 \cos(\omega t + \pi/8)$$

12. Calculs de courants*

1. On a assez directement que, avec $\underline{e} = U\sqrt{2}e^{j\omega t}$,

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{e}}{R} \quad \underline{i}_1 = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega} \quad \text{et} \quad \underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{\text{tot}}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{tot}} = \frac{R(R + L\omega)}{2R + jL\omega}$$

La valeur efficace est donnée par le module divisé par $\sqrt{2}$, soit

$$\boxed{i_{2,\text{eff}} = \frac{U}{R} \quad i_{1,\text{eff}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad i_{\text{eff}} = \frac{R\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}{\sqrt{4R^2 + (L\omega)^2}} U}$$

Les déphasages sont quant à eux donnés par les arguments des rapports de intensités complexes par \underline{e} , soit

$$\boxed{\varphi_2 = 0 \quad \varphi_1 = -\text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{2R}\right)}$$

2. Soit \underline{e} la tension d'alimentation du dipôle (en convention récepteur). On a alors

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{e}}{R_1 + jL\omega} \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{R_2} + \underline{Z}_C} = \frac{jC\omega \underline{e}}{1 + jR_2C\omega}$$

Les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont en quadrature à condition que le rapport $\underline{i}_2/\underline{i}_1$ soit imaginaire pur. Or on a

$$\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = jC\omega \frac{R_1 + jL\omega}{1 + jR_2C\omega} = jC\omega \frac{1 + jL\omega/R_1}{1 + jR_2C\omega}$$

Il suffit donc que le rapport de droite soit réel, donc que

$$\boxed{\frac{L}{R_1} = R_2C}$$

3. Calculons l'expression du courant en fonction de la tension du générateur et voyons pour quelle valeur de ω cela peut ne pas dépendre de R . On a

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{R/L} + \underline{Z}_C} = \frac{\underline{e}}{\frac{jRL\omega}{R + jL\omega} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega(R + jL\omega)}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \underline{e}$$

En passant au module et en divisant par $\sqrt{2}$, on trouve la valeur efficace du courant qui s'exprime directement en fonction de la valeur efficace de la tension via

$$i_{\text{eff}} = C\omega \sqrt{\frac{R^2 + (L\omega)^2}{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}} e_{\text{eff}}$$

qui ne dépendra pas de R à condition que $1 - LC\omega^2$ vaille 1 (pas intéressant) ou -1 (mieux!), c'est-à-dire tel que

$$LC\omega_0^2 = 2 \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

Pour cette valeur particulière de ω , le module est indépendant de R , mais pas la phase. La relation entre \underline{i} et \underline{e} se simplifie en $\omega = \omega_0$ en

$$\underline{i} = \frac{jC\omega_0(R + jL\omega_0)}{-R + jL\omega_0} \underline{e}$$

Le déphasage est alors donné par

$$\begin{aligned}
\varphi &= \text{Arg} \left(\frac{\underline{i}}{\underline{e}} \right) \\
&= \text{Arg} (jC\omega_0) + \text{Arg} (R + jL\omega_0) - \text{Arg} (-R + jL\omega_0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \text{Arctan} \left(\frac{L\omega_0}{R} \right) - \left(\pi + \text{Arctan} \left(\frac{L\omega_0}{-R} \right) \right) \\
\varphi &= -\frac{\pi}{2} + 2 \text{Arctan} \left(\frac{L\omega_0}{R} \right)
\end{aligned}$$

On veut que φ vaille 0, donc $\text{Arctan} \left(\frac{L\omega_0}{R} \right) = \frac{\pi}{4}$, soit finalement

$$\boxed{R = L\omega_0}$$

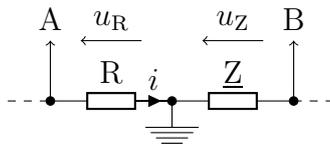
13. Tension triphasée* None available.

14. Détermination expérimentale d'une impédance*

1. On voit sur l'oscillogramme que la période correspond à 6 carreaux, soit

$$\boxed{T = 6 \text{ ms} \quad f = \frac{1}{T} = 170 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$$

2. Première chose à faire : compléter le petit schéma pour poser les notations utilisées.



Sur ce schéma où on a tout placé en convention récepteur, on remarque déjà que les deux tensions signalées s'écrivent respectivement

$$u_R = V_A - V_M = V_A \quad \text{et} \quad u_Z = V_M - V_B = -V_B$$

La voie A permet donc de suivre directement $u_R(t)$ alors que « - voie B » permet d'obtenir une représentation de $u_Z(t)$. En notations complexes, on a, comme on est en convention récepteur, que

$$\underline{u}_R = R \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{u}_Z = \underline{Z} \underline{i}$$

En se débarrassant de \underline{i} dans les deux équations précédentes, on remarque que l'on peut écrire

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}_Z}{\underline{u}_R} R$$

En prenant le module de la relation précédente, on peut relier $Z = |\underline{Z}|$ aux amplitudes des signaux mesurés (1 V pour $u_R(t)$ et 4 V pour $u_Z(t)$) alors que si l'on prend l'argument, cela va être relié à $\text{Arg}(\underline{u}_Z/\underline{u}_R)$, soit au déphasage de $u_Z(t)$ par rapport à $u_R(t)$. Sur l'oscillogramme, on remarque que $u_Z(t)$ est en retard d'un carreau (soit un sixième de période) sur $u_R(t)$, d'où un déphasage de $-2\pi/6 = -\pi/3$. On en déduit

$$\boxed{Z = |\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}_Z|}{|\underline{u}_R|} R = \frac{4}{1} \times 100 = 400 \Omega \quad \text{et} \quad \text{Arg}(\underline{Z}) = \text{Arg} \left(\frac{\underline{u}_Z}{\underline{u}_R} R \right) = \text{Arg} \left(\frac{\underline{u}_Z}{\underline{u}_R} \right) = -\frac{\pi}{3}}$$

L'argument de \underline{Z} est négatif, ce qui signifie que la tension est en retard sur le courant (comme c'est le cas pour un condensateur) de sorte que le dipôle en question est de type capacitif.

15. Résonance d'un quartz horloger* None available.

16. QCM résonance pour un RLC série* None available.

17. Impédances réelles** None available.

18. Circuit RLC*** None available.

19. Fréquencemètre**

1. Trouver la condition d'équilibre du pont revient à trouver la condition pour que \underline{u}_{MN} soit nulle quelle que soit la tension \underline{u}_{AB} appliquée entre entrée du pont. Pour trouver \underline{u}_{MN} , écrivons que par diviseur de tension, on a à la fois

$$\underline{u}_{BM} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{u}_{AB} \quad \text{et} \quad \underline{u}_{BN} = \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\underline{Z}_{R\oplus C} + \underline{Z}_{R//C}} \underline{u}_{AB}$$

Pour que $\underline{u}_{MN} = \underline{u}_{BN} - \underline{u}_{BM}$ soit nulle, il faut donc que $\underline{u}_{BN} = \underline{u}_{BM}$, c'est-à-dire

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\underline{Z}_{R\oplus C} + \underline{Z}_{R//C}}$$

soit $R_2 (\underline{Z}_{R\oplus C} + \underline{Z}_{R//C}) = \underline{Z}_{R//C} (R_1 + R_2)$

ou encore

$$R_2 \underline{Z}_{R\oplus C} = R_1 \underline{Z}_{R//C}$$

$$\underline{Z}_{R\oplus C} \underline{Y}_{R//C} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right) = \frac{R_1}{R_2}$$

$$2 + \frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega = \frac{R_1}{R_2}$$

Comme deux complexes ne sont égaux que si à la fois leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales, les paramètres du circuits doivent donc vérifier (puisque $1/j = -j$) à la fois

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = 2 \quad \text{et} \quad RC\omega = 1}$$

2. Ainsi, si on se débrouille pour imposer initialement que $R_1 = 2R_2$, alors lorsque l'on modifie la valeur de R (conjointement dans $\underline{Z}_{R\oplus C}$ et $\underline{Z}_{R//C}$) jusqu'à mesurer une tension nulle entre les points M et N quelle que soit l'amplitude de la tension d'entrée, forcément, la fréquence de ladite tension d'entrée est donnée par la relation

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}}$$

3. Inversement, la résistance requise pour observer une fréquence f donnée est $R = \frac{1}{2\pi fC}$, soit $R = 0,16 \text{ k}\Omega$ pour $f = 1,0 \text{ kHz}$ et $R = 1,6 \text{ }\Omega$ pour $f = 100 \text{ kHz}$.

20. Résonance**

1. À l'aide de la formule du diviseur de tension, on obtient directement

$$\underline{s} = \frac{Z_{L//C}}{Z_{L//C} + Z_R} \underline{e} = \frac{1}{1 + Z_R Y_{L//C}} \underline{e} = \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)} \underline{e} = \frac{1}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} \underline{e}$$

2. L'amplitude des oscillations de la tension $s(t)$ est donnée par le module de la notation complexe \underline{s} . Ainsi,

$$s_0 = \frac{e_0}{\sqrt{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}}$$

Cette fonction est maximale quand l'argument sous la racine est minimal, c'est-à-dire quand la parenthèse est nulle, soit en $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

3. La bande passante est délimitée par les pulsation ω_1 et ω_2 où $s_0 = s_{0\max}/\sqrt{2}$. Comme $s_{0\max} = e_0$, on en déduit que ω_1 et ω_2 vérifient

$$R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2 = 1$$

Notons $\varepsilon = \pm 1$ de sorte que $\varepsilon^2 = 1$. Les pulsations de coupures doivent donc vérifier

$$R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = \varepsilon \quad \text{soit} \quad \omega^2 - \frac{\varepsilon}{RC} \omega - \frac{1}{LC} = 0$$

Il y a quatre ω solutions des deux trinômes précédent (un pour chaque valeur de ε), mais seules les solutions où l'on rajoute la racine du discriminant sont des solutions positives donc acceptables pour notre problème. En remarquant que le discriminant vaut dans chaque cas $\Delta = \left(\frac{\varepsilon}{RC} \right)^2 + \frac{1}{LC} = \frac{1}{(RC)^2} + \frac{1}{LC}$ (car $\varepsilon^2 = 1$), on a finalement les « bonnes » solutions qui s'écrivent $\frac{\varepsilon}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, soit

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

4. Le facteur de qualité mesure la largeur de la bande passante, c'est-à-dire que l'on a la relation $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$. Dans notre cas,

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \left(-\frac{1}{2RC} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) = \frac{1}{RC} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

où l'on reconnaît $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ qui est aussi la pulsation de résonance pour un tel système et on en déduit que

$$Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ce qui ressemble fortement à celui du RLC série finalement.

5. En $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on voit que $\underline{s} = \underline{e}$ (le terme imaginaire s'annule) de sorte que le déphasage est nul entre $e(t)$ et $s(t)$.

21. Circuit bouchon** None available.

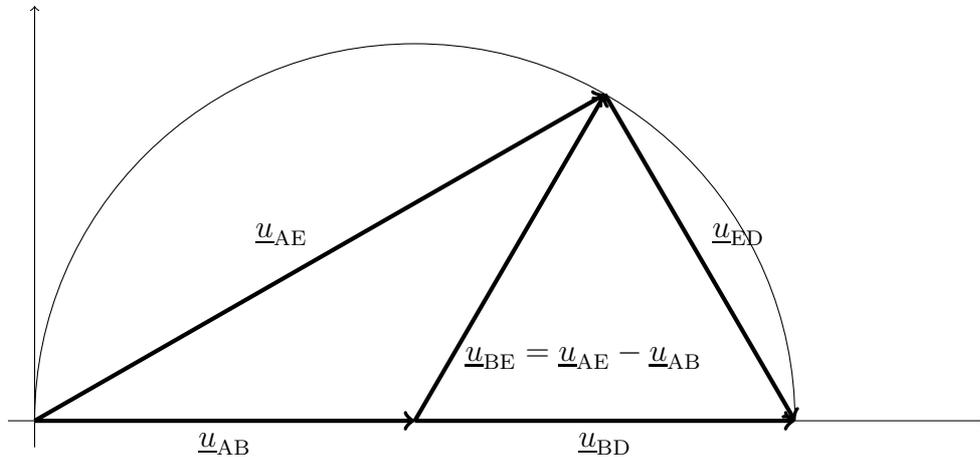
22. Pont déphaseur**

1. On choisit de représenter \underline{u}_{AD} dans le diagramme de Fresnel selon l'horizontale. Les dipôles de la branche supérieure étant des résistances identiques parcourues par le même courant, leurs deux tensions sont égales et nécessairement horizontales puisque leur somme vaut \underline{u}_{AD} .

Dans la seconde branche, les deux dipôles sont aussi parcourus par un même courant (mais différent du précédent), de sorte que selon qu'on l'exprime en fonction de l'une ou l'autre tension, on obtient

$$\frac{\underline{u}_{AE}}{R} = \frac{\underline{u}_{ED}}{Z_C} \quad \text{soit} \quad \underline{u}_{ED} = Z_C \frac{\underline{u}_{AE}}{R} = \frac{\underline{u}_{AE}}{jRC\omega}$$

On en déduit que la flèche représentative de la tension \underline{u}_{ED} est perpendiculaire à \underline{u}_{AE} en tournant dans le sens horaire. On ne connaît pas les longueurs relatives des deux flèches, mais une fois que l'on trace \underline{u}_{AE} dans une direction donnée (car le courant dans la seconde branche est déphasé par rapport à la tension globale du fait du condensateur dans la branche), on n'a plus le choix pour tracer \underline{u}_{ED} , comme dans le schéma suivant



Un ancien théorème de collège concernant le cercle circonscrit à un triangle rectangle (dont le diamètre correspondrait à l'hypoténuse dudit triangle) permet d'affirmer que

$$\boxed{|\underline{u}_{BE}| = |\underline{u}_{AB}| = |\underline{u}_{BD}| = \frac{|\underline{u}_{AD}|}{2}}$$

ce qui permet de dire que l'amplitude de $u_{BE}(t)$ vaut la moitié de celle de $u_{AD}(t)$.

2. On peut appliquer un diviseur de tension dans chacune des branches du pont pour trouver que

$$\underline{u}_{AB} = \frac{R'}{R' + R} \underline{u}_{AD} = \frac{1}{2} \underline{u}_{AD} \quad \text{et} \quad \underline{u}_{AE} = \frac{R}{Z_C + R} \underline{u}_{AD} = \frac{R Y_C}{1 + R Y_C} \underline{u}_{AD} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{u}_{AD}$$

Comme $\underline{u}_{BE} = \underline{V}_B - \underline{V}_E = \underline{V}_B - \underline{V}_A + \underline{V}_A - \underline{V}_E = -\underline{u}_{AB} + \underline{u}_{AE}$, on peut calculer

$$\underline{u}_{BE} = \underline{u}_{AE} - \underline{u}_{AB} = \left(\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} - \frac{1}{2} \right) \underline{u}_{AD} = \frac{jRC\omega - 1}{1 + jRC\omega} \frac{\underline{u}_{AD}}{2}$$

Comme un complexe, son opposé, son conjugué et l'opposé de son conjugué ont même module, on retrouve bien que

$$\boxed{|\underline{u}_{BE}| = \frac{|\underline{u}_{AD}|}{2}} \quad \text{et en outre} \quad \text{Arg} \left(\frac{\underline{u}_{BE}}{\underline{u}_{AD}} \right) = \text{Arg}(jRC\omega - 1) - \text{Arg}(1 + jRC\omega) = \pi - 2 \text{Arctan}(RC\omega)$$

Ainsi, en conservant l'amplitude constante quel que soit le choix de R , on a construit un déphaseur qui permet d'ajuster à l'envie le déphasage de \underline{u}_{BE} par rapport à \underline{u}_{AD} (de presque 0 quand $R \gg 1/C\omega$ à presque π quand $R \ll 1/C\omega$) sans changer l'amplitude, d'où le nom de l'exercice.

23. Bande passante de la réponse en vitesse**

1. La masse m , dans le référentiel terrestre galiléen, est soumise à trois forces

- Le poids $\vec{P} = mg \vec{e}_x$;
- La tension du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x = -k(\ell_{\text{éq}} + x - x_A - \ell_0) \vec{e}_x$;
- la force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{x} \vec{e}_x$.

La RFD projetée selon \vec{e}_x s'écrit alors

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - k(\ell_{\text{éq}} + x - x_A - \ell_0) + mg$$

Par définition de x , à l'équilibre, on a $x = 0$. De plus, la longueur à l'équilibre étant définie pour $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$ et $x_A = 0$, on trouve comme d'habitude $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + mg/k$, d'où l'équation d'évolution

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} x_A(t)$$

On n'aurait *pas* pu ici utiliser une méthode énergétique car la tension du ressort n'est *pas* conservative. Le fait de secouer l'autre extrémité du ressort introduit de l'énergie dans le système : la variation temporelle d'énergie mécanique n'est pas uniquement dû au travail des forces de frottement, mais aussi au travail fourni par l'opérateur qui bouge le ressort.

2. En posant $k/m = \omega_0^2$ et $\alpha/m = \omega_0/Q$, le passage en complexe donne

$$(j\omega)^2 \underline{x} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

soit

$$\underline{x} = \frac{\underline{x}_A}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\omega/(Q\omega_0)}$$

ou encore

$$\underline{\dot{x}} = j\omega \underline{x} = \frac{Q\omega_0 \underline{x}_A j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{Q\omega_0 \underline{x}_A}{jQ \left(-\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1}$$

L'amplitude des oscillations en vitesse est donnée par le module de $\underline{\dot{x}}$. On obtient donc

$$V_m(\omega) = \frac{Q\omega_0 x_{Am}}{\sqrt{Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 + 1}}$$

3. Le maximum de l'expression précédente est obtenu quand la parenthèse s'annule au dénominateur, soit en $\omega = \omega_0$. On a donc

$$V_r = V_m(\omega = \omega_0) = Q\omega_0 x_{Am} \quad \text{et} \quad V_m(\omega) = \frac{V_r}{\sqrt{Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 + 1}}$$

Trouver les pulsations pour lesquelles $V_m = V_r/\sqrt{2}$ revient donc à trouver les pulsations telles que

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

Les pulsations recherchées vérifient le trinôme

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - 1 = 0$$

soit
$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = \frac{\varepsilon}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

Seules les solutions ayant un plus devant la racine sont positives. On en déduit donc

$$\frac{f_1}{f_0} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \quad \text{et} \quad \frac{f_2}{f_0} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}$$

soit

$$\boxed{\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}}$$

24. Vibration d'un moteur** None available.

25. Résonance d'un lave linge** None available.

26. Amortisseur de véhicule** None available.

27. Résonance en intensité pour le RLC série (bis)** None available.

28. Choix des élément à résonance pour un RLC série** None available.

29. Équivalence de dipôles***

1. Équivalence des dipôles AB et A'B'

(a) Le dipôle AB est constitué d'une bobine L en parallèle avec une résistance R. L'impédance équivalente vaut donc

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{j R L \omega}{R + j L \omega} = \frac{j R L \omega (R - j L \omega)}{R^2 + L^2 \omega^2} = \frac{L^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} R + j \frac{R^2}{R^2 + L^2 \omega^2} L \omega$$

Le dipôle A'B' est simplement la mise en série de R' et L', d'où

$$\underline{Z}_{A'B'} = \underline{Z}_{R'} + \underline{Z}_{L'} = R' + j L' \omega$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{R' = \frac{L^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} R \quad \text{et} \quad L' = \frac{R^2}{R^2 + L^2 \omega^2} L}$$

(b) Des relations précédentes, on sort directement

$$\frac{R'}{R} = \frac{L^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad \frac{L'}{L} = \frac{R^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

d'où, pour avoir égalité des rapport R'/R et L'/L à la pulsation ω_0 ,

$$\boxed{L^2 \omega_0^2 = R^2 \quad \text{donc} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}}$$

(c) Application numérique :

$$\boxed{\omega_0 = 1,010^4 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Attention, pour une pulsation, il faut bien rajouter les radians pour ne pas confondre avec une fréquence. Les radians étant « sans unités », on ne peut pas le retrouver par analyse dimensionnelle. Néanmoins, une fréquence est un nombre de tours par secondes

|(cos(2π ft)) alors qu'une pulsation est la quantité d'angle parcourue par seconde (cos ωt) et comme il y a 2π radians dans un tour, on a la relation ω = 2π f.

2. On se place à ω = ω₀, donc Lω₀ = R et R' = L'ω₀ = R/2.

(a) On connaît \underline{u} , il faut donc connaître l'impédance totale équivalente pour obtenir l'intensité complexe \underline{i} puis l'intensité réelle $i(t) = \text{Re}(\underline{i})$. Comme $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{A'B'}$,

$$\underline{Z}_{\text{tot}} = \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BD} = 2\underline{Z}_{A'B'} = R(1 + j) = R\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

Ainsi,
$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{\text{tot}}} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} e^{j(\omega_0 t - \pi/4)}$$

d'où
$$i(t) = \text{Re}(\underline{i}) = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

| Rappel : l'amplitude complexe \underline{U} d'un signal $u(t)$ est ce qui est en facteur du $e^{j\omega t}$ dans l'écriture complexe \underline{u} de $u(t)$.

(b) Par diviseur de tension, les deux impédances étant équivalentes, $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{u}/2$. Ainsi,

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_R} = \frac{U_m}{2R} e^{j\omega_0 t} \quad \text{d'où} \quad \underline{I}_1 = \frac{U_m}{2R}$$

de même
$$\underline{i}_2 = \frac{U_m}{2jL\omega_0} e^{j\omega_0 t} = \frac{U_m}{2R} e^{-j\pi/2} e^{j\omega_0 t} \quad \text{d'où} \quad \underline{I}_2 = \frac{U_m}{2R} e^{-j\pi/2}$$

(c) Comme on se trouve en régime sinusoïdal, les valeurs efficaces sont les amplitudes divisées par $\sqrt{2}$. On a donc le tableau suivant

	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$i_1(t)$	$i_2(t)$
Valeur efficace	$\frac{U_m}{2\sqrt{2}}$	$\frac{U_m}{2\sqrt{2}}$	$\frac{U_m}{2R\sqrt{2}}$	$\frac{U_m}{2R\sqrt{2}}$
Déphasage avec $u(t)$	0	0	0	$-\pi/2$

3. Pour que le déphasage soit nul entre courant et tension globale, il faut que l'impédance équivalente de l'ensemble série {dipôle+capacité} soit réelle. Ainsi,

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_{\text{tot}} + \underline{Z}_C = R(1 + j) + \frac{1}{jC\omega_0} = R + j\left(R - \frac{1}{C\omega_0}\right) \quad \text{soit} \quad C = \frac{1}{R\omega_0} = \frac{L}{R^2} = 1,0 \mu\text{F}$$

30. Circuits équivalents au quartz piézoélectrique***

1. Le courant du circuit principal est infini pour une admittance infinie, c'est-à-dire une impédance globale \underline{Z} nulle. Inversement, le courant sera nul si l'impédance \underline{Z} est infinie. Il reste donc à calculer \underline{Z} .

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_{L//C} + \underline{Z}_{C'} \\ &= \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} + \underline{Z}_{C'} \\ &= \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L \underline{Y}_C + 1} + \frac{1}{\underline{Y}_{C'}} \\ &= \frac{\underline{Z}_L \underline{Y}_{C'} + \underline{Z}_L \underline{Y}_C + 1}{\underline{Y}_{C'} (\underline{Z}_L \underline{Y}_C + 1)} \end{aligned}$$

$$\underline{Z} = \frac{1 - (LC' + LC)\omega^2}{jC'\omega(1 - LC\omega^2)}$$

On en déduit immédiatement la pulsation ω_r (pour « résonance » en courant) où \underline{Z} s'annule et ω_a (pour « antirésonance » ou « annulation » de courant) où \underline{Z} devient infini

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC' + LC}} \quad \text{et} \quad \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Comme $LC' + LC > LC$ car $LC' > 0$

Alors on a bien

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC' + LC}} < \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_a$$

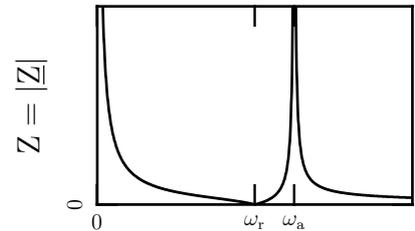
2. L'application numérique donne deux valeurs proches mais différentes pour ces deux pulsations

$$\omega_r = 705.10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_a = 707.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

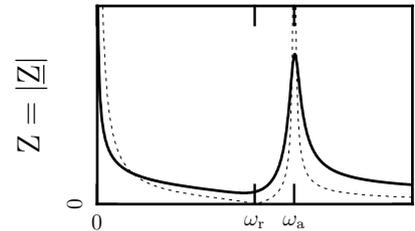
3. En remplaçant les expressions dans \underline{Z} , on obtient

$$\underline{Z} = \frac{1 - (\omega/\omega_r)^2}{j C' \omega (1 - (\omega/\omega_a)^2)}$$

On a une impédance \underline{Z} imaginaire pure donc l'impédance réelle ($Z = |\underline{Z}|$) est directement donnée (au facteur j près) par la valeur absolue de l'expression ci-dessus. Elle diverge en $\omega \rightarrow 0$ comme $1/\omega$, s'annule en $\omega = \omega_r$ et diverge à nouveau juste après en $\omega = \omega_a$. Finalement elle tend vers 0 quand $\omega \rightarrow \infty$.



4. Rajouter une résistance interne va amener une partie réelle au niveau du dénominateur et une partie imaginaire au numérateur de l'expression précédente, empêchant à la fois une annulation complète pour $\omega = \omega_r$ et une divergence en $\omega = \omega_a$. Le graphe a alors l'allure suivante



5. En terme de fréquences, l'impédance complexe \underline{Z} s'écrit

$$\underline{Z} = \frac{1 - (f/f_r)^2}{2\pi j C' f (1 - (f/f_a)^2)}$$

La dérivée étant pénible à calculer, on va faire un développement au premier ordre en posant que $f = f_r + \Delta f$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{Z} = \underline{Z}(f) - \underline{Z}(f_r) &= \frac{1 - \left(1 + \frac{\Delta f}{f_r}\right)^2}{2\pi j C' f_r \left(1 + \frac{\Delta f}{f_r}\right) \left[1 - \left(\frac{f_r}{f_a}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta f}{f_r}\right)^2\right]} - 0 \\ &\approx -2 \frac{\Delta f}{f_r} \times \frac{1}{2\pi j C' f_r \left(1 + \frac{\Delta f}{f_r}\right) \left[1 - \left(\frac{f_r}{f_a}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta f}{f_r}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

Comme le numérateur est déjà du premier ordre en $\Delta f/f_r$, il ne sert à rien de développer plus avant le dénominateur qui n'apportera que des termes d'ordre supérieur et il ne reste que

$$\eta_r = \frac{\Delta \underline{Z}}{\Delta f} = \frac{-1}{\pi j C' f_r^2 [1 - (f_r/f_a)^2]} \quad \text{et} \quad |\eta_r| = 510 \text{ } \Omega \cdot \text{Hz}^{-1}$$

On remarque que comme f_r est très proche de f_a , ce facteur η_r est grand en règle générale, ce qui signifie qu'autour de f_r , l'impédance peut passer brutalement de 0 à une valeur très importante. Ainsi le quartz fait office de filtre très sélectif puisqu'il conduit fortement le courant à $f = f_r$ mais « coupe les vivres » dès lors que l'on s'éloigne de cette fréquence.

6. Cette deuxième modélisation fait intervenir une capacité C_s en série avec une bobine L_0 , le tout en parallèle avec une capacité C_p , d'où

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_{C_p} (\underline{Z}_{L_0} + \underline{Z}_{C_s})}{\underline{Z}_{C_p} + (\underline{Z}_{L_0} + \underline{Z}_{C_s})} \\ &= \frac{\underline{Z}_{L_0} \underline{Y}_{C_s} + 1}{\underline{Y}_{C_s} + \underline{Z}_{L_0} \underline{Y}_{C_s} \underline{Y}_{C_p} + \underline{Y}_{C_p}} \\ \underline{Z} &= \frac{1 - L_0 C_s \omega^2}{j(C_s + C_p) \omega \left[1 - \frac{L_0 C_s C_p \omega^2}{C_s + C_p} \right]}\end{aligned}$$

En comparant avec l'expression obtenue en 30.3, on en déduit les trois équations que doit vérifier le triplet (L_0, C_s, C_p)

$$\begin{cases} C' = C_s + C_p \\ \frac{1}{\omega_r^2} = L_0 C_s \\ \frac{1}{\omega_a^2} = L_0 \frac{C_s C_p}{C_s + C_p} \end{cases} \iff \begin{cases} C_p = C' \left(\frac{\omega_r}{\omega_a} \right)^2 = \frac{C C'}{C + C'} = 9,95 \text{ pF} \\ C_s = C' \left[1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_a} \right)^2 \right] = \frac{C'^2}{C + C'} = 49,8 \text{ fF} \\ L_0 = \frac{1}{C' \omega_r^2 \left[1 - (\omega_r/\omega_a)^2 \right]} = L \frac{(C + C')^2}{C'^2} = 40,4 \text{ H} \end{cases}$$

7. En remplaçant les pulsations par les fréquences, on reconnaît dans l'expression de L_0

$$L_0 = \frac{1}{C' (2\pi f_r)^2 \left[1 - (f_r/f_a)^2 \right]} = \frac{-j \eta_r}{4\pi}$$

d'où

$$\boxed{\eta_r = j 4\pi L_0 \quad \text{et} \quad |\eta_r| = 510 \Omega \cdot \text{Hz}^{-1}}$$

31. Zorro : Transport de la nitro par le méchant français*** No Way

32. Détection de vitesse v_0 *** No Way

33. Simulation d'une inductance parfaite***

1. Pour deux dipôles en parallèles, c'est bien les admittances que l'on somme. Ainsi,

$$\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_{R_0} + \underline{Y}_{L_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{jL_0\omega}}$$

2. Le courant \underline{i}_E se répartit dans les courants \underline{i}_2 et \underline{i}_3 traversant respectivement les résistances R_2 et R_3 . On va donc exprimer ces deux courants en fonctions de \underline{u}_E et des dipôles en utilisant tour à tour le fait que, l'AO fonctionnant en régime linéaire, $V^- = V^+ = 0$ et (étant simplement idéal) $i^- = 0$ donc \underline{i}_2 traverse aussi C_0 .

$$\begin{aligned} \underline{i}_E &= \underline{i}_2 + \underline{i}_3 \\ &= \frac{\underline{u}_E}{R_2} + \frac{\underline{u}_E - \underline{u}_S}{R_3} \\ &= \frac{\underline{u}_E}{R_2} + \frac{\underline{u}_E}{R_3} + \frac{\underline{i}_2}{jC_0\omega R_3} \end{aligned}$$

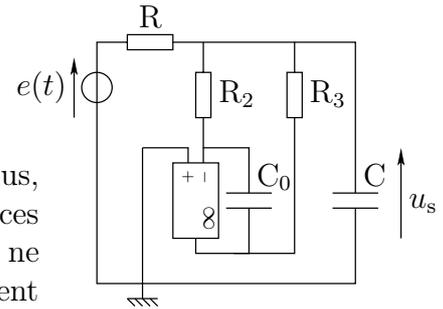
$$\underline{i}_E = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{jR_2R_3 C_0\omega} \right) \underline{u}_E$$

3. Le terme en facteur de \underline{u}_E n'est rien d'autre que l'admittance \underline{Y} du dipôle puisque par définition $\underline{i}_E = \underline{Y} \underline{u}_E$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient sans peine

$$R_0 = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{et} \quad L_0 = R_2R_3 C_0$$

4. Le schéma des branchements est donné ci-contre.

5. Comme l'AO fonctionne en régime linéaire, on a $V^+ = V^- = u$. De plus, comme $i^- = 0$, i traverse aussi R_5 et comme $i^+ = 0$, les deux résistances R_6 sont traversées par le même courant (a priori différent de \underline{i} car on ne sait pas ce qui sort de l'AO !) et par diviseur de tension, on a directement $\underline{u} = \underline{u}_S/2$. Ainsi,



$$\underline{i} = \frac{\underline{u} - \underline{u}_S}{R_5} = \frac{\underline{u} - 2\underline{u}}{R_5} = -\frac{\underline{u}}{R_5}$$

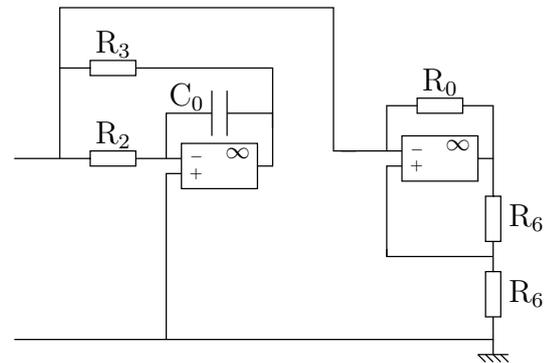
En d'autres termes

$$\underline{u} = -R_5 \underline{i}$$

alors même que les conventions d'orientations sont bien les conventions récepteurs !

6. Tout se passe comme si le montage était équivalent à une résistance négative, d'où son nom. La puissance *fournie* au dipôle ainsi constitué vaut $\text{Re}(\underline{Z}) i_{\text{eff}}^2 = -R_5 i_{\text{eff}}^2 < 0$, c'est-à-dire que malgré la convention récepteur, c'est le dipôle qui donne de l'énergie à l'extérieur et non l'inverse. C'est en fait la source d'alimentation de l'AO (non représentée sur le schéma mais qu'il ne faut jamais oublier de brancher en TP) qui fournit cette énergie supplémentaire.

7. Le montage de la question 33.2 est équivalent à une bobine et un inductance en parallèle. Si on rajoute encore une résistance $-R_0$ en parallèle, l'admittance de l'ensemble vaut



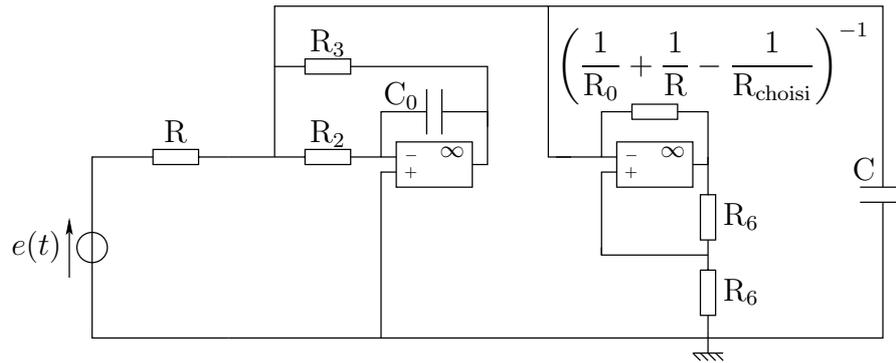
$$\underline{Y} = \underline{Y}_{R_0} + \underline{Y}_{L_0} + \underline{Y}_{-R_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{jL_0\omega} + \frac{1}{-R_0} = \frac{1}{jL_0\omega}$$

Il faut donc effectuer les branchements ci-dessus.

8. On a vu dans l'exercice précédent que le fait de rajouter une résistance R' au filtre modifiait le facteur de qualité de sorte que le nouveau facteur de qualité vaut

$$Q' = Q \frac{R_{\text{eq}}}{R} \quad \text{avec} \quad R_{\text{eq}} = \frac{RR'}{R + R'}$$

Pour que Q' soit supérieur à Q , il « suffit » que R_{eq} soit (positif et) supérieur à R , ce qui n'est possible d'obtenir que si $R' < -R$. Avec les branchements suivants, il est possible de choisir entièrement la valeur $Q_{\text{choisi}} = R_{\text{choisi}} \sqrt{C/L_0}$ en jouant sur la valeur de R_{choisi} .



En effet, la résistance équivalente globale de ce circuit se calcule par

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_{\text{choisi}}} \right) = \frac{1}{R_{\text{choisi}}}$$

En prenant $R_{\text{choisi}} > R$, on a bien $Q' > Q$ et on s'assure qu'on pourra trouver une valeur adéquate pour la résistance à mettre dans le montage à résistance négative.

34. Sismographe*** None available.

35. Bilan énergétique en régime sinusoïdal forcé*** None available.

