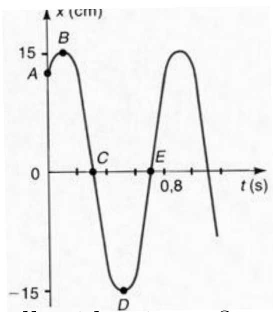
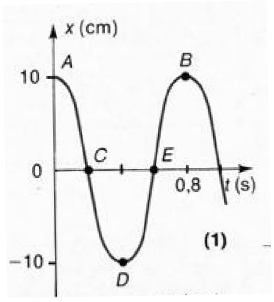
L'oscillateur harmonique

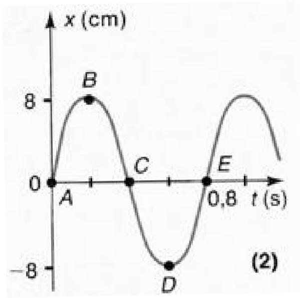
1. Vrai/Faux

1. On considère un pendule élastique horizontal idéalisé. Voici six propositions, lesquelles sont vraies ?
   (a) La période des oscillations est d'autant plus grande que la masse m du solide est importante.
   (b) La pulsation ne dépend pas de la manière dont a été lancé le pendule.
   (c) Dans un satellite, ce système ne pourrait pas osciller.
   (d) L'énergie totale est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vitesse.
   (e) L'énergie totale est proportionnelle au carré de l'amplitude des élongations.
   (f) L'énergie potentielle lorsque le ressort est comprimé est égale à $\mathrm{E}_{\text{pot}}^{\text{élast}} = \dfrac{1}{2}\, k\, (\ell - \ell_0)^2$
2. Lesquelles des propositions suivantes sont correctes dans le cas d'un corps effectuant une oscillation harmonique ?
   (a) La vitesse instantanée est proportionnelle au déplacement par rapport à la position d'équilibre.
   (b) L'accélération est inversement proportionnelle au déplacement par rapport à la position d'équilibre.
   (c) La force de rappel est proportionnelle au déplacement par rapport à la position d'équilibre.

2. Oscillations d'un même oscillateur* Au cours d'essais, on a enregistré les oscillations d'un même oscillateur en mouvement sur un axe (schéma ci-contre).

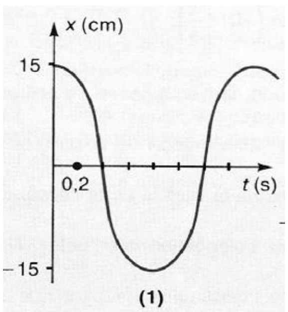


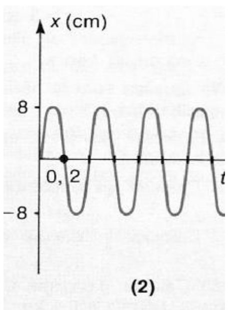


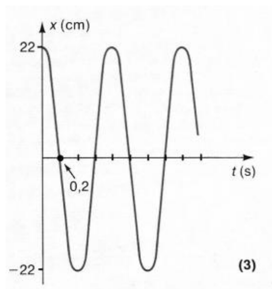


1. Les conditions initiales sont-elles identiques ?
2. Préciser le signe de la vitesse en chacun des points A, B, C, D et E.
3. Cet oscillateur peut-il osciller avec des périodes différentes ?
4. Pourquoi les amplitudes ne sont-elles pas égales alors qu'il s'agit du même oscillateur ?
5. Classer ces situations par énergie mécanique croissante.

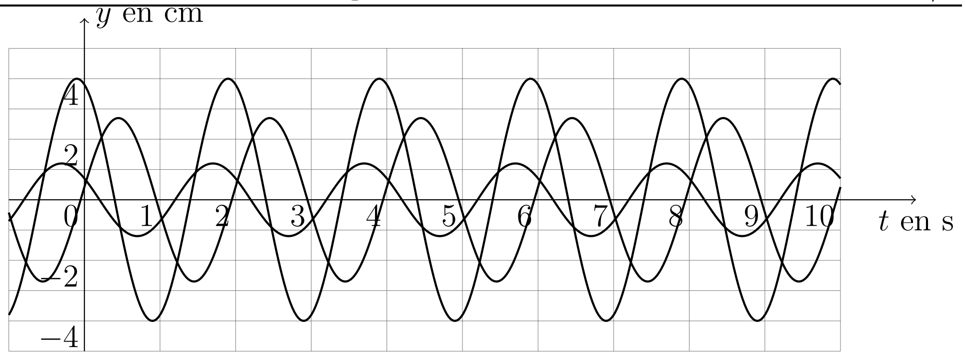
3. Oscillateur à masses différentes* On considère un pendule élastique horizontal idéalisé. On accroche au ressort de raideur k des masses m_1, m_2 et m_3 (respectivement schéma 1, 2, 3).







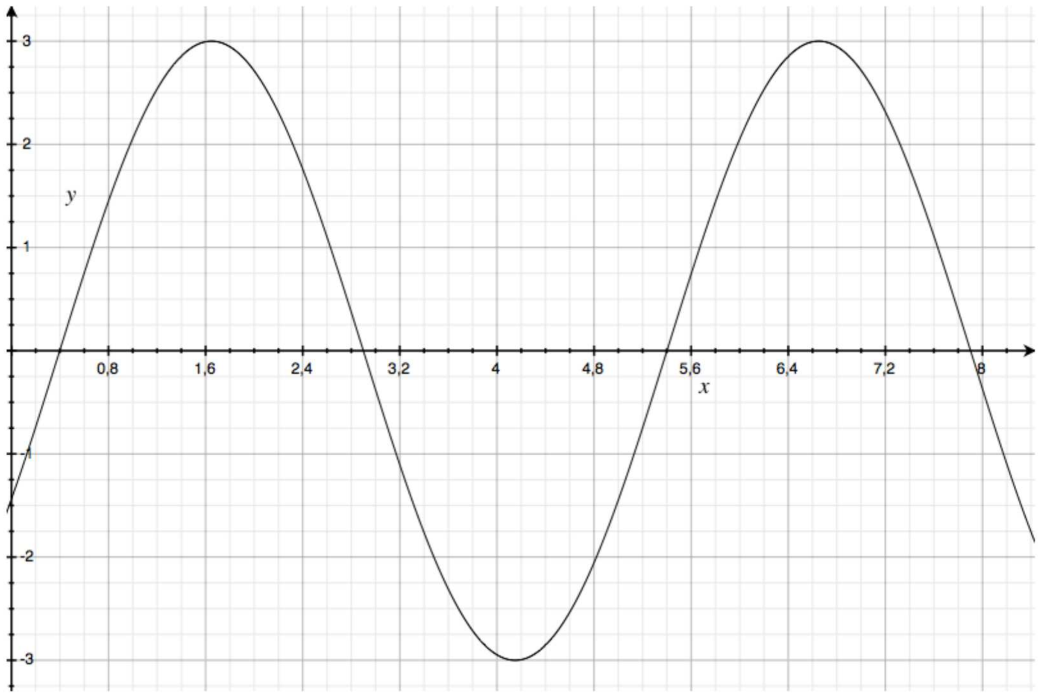
1. Indiquer le schéma correspondant à :
   – la plus grande amplitude
   – la plus grande fréquence
   – la plus grande énergie.
2. Classer les masses par ordre croissant.



4. Évolution temporelle* La figure ci-contre indique les graphes $y(t)$ correspondant à diverses conditions initiales d'un oscillateur. On note $y_1(t)$ la fonction de plus faible amplitude, $y_2(t)$ celle d'amplitude moyenne et enfin $y_3(t)$ celle d'amplitude la plus élevée.

1. Précisez dans un tableau pour $k = 1, 2, 3$ les valeurs des amplitudes $y_{k\mathrm{m}}$, des positions initiales $y_k(t = 0)$, des périodes T_k ainsi que le signe de la composante suivant $\overrightarrow{e_y}$ de la vitesse initiale $\dot{y}_k(t = 0)$.
2. En quoi les courbes expérimentales fournies en figure 2 sont-elles en accord avec l'équation différentielle $\ddot{y} + {\omega_0}^2\, y = 0$?
3. Déterminer pour chacune des trois courbes les valeurs maximales de $\dot{y}(t)$. On établira au préalable une relation générale liant l'amplitude de la fonction $y(t)$ et l'amplitude de la vitesse $v_y(t)$.

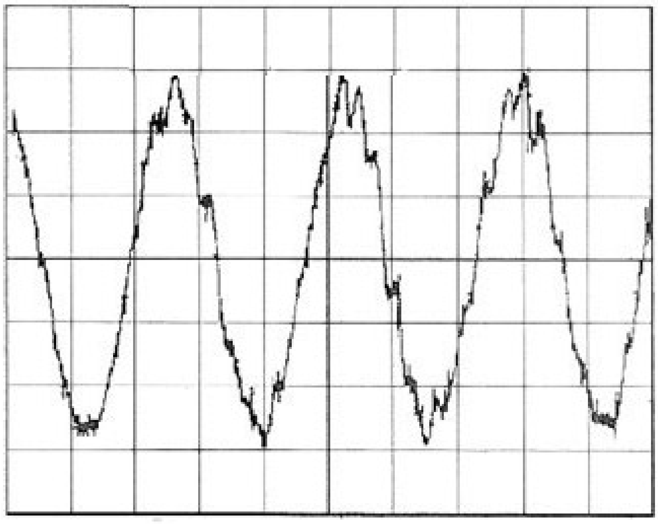
5. Ressort vertical** Une masse m est accroché à un ressort de raideur $k = 15$ N/m lui-même accroché au plafond. On enregistre avec une caméra les oscillations de la masse m au cours du temps. Sur le graphe ci-dessous, $y = \ell - \ell_{\text{éq}}$ représente l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre en cm et x représente le temps en s.



1. Justifier sans calcul que l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse est $\ddot{y} = -\dfrac{k}{m}\, y$
2. Déterminer à partir de l'enregistrement graphique la période, la pulsation, l'amplitude et la phase à l'origine.
3. En déduire l'équation $y(t)$ ainsi que la valeur de la vitesse initiale et la valeur de la masse m.
4. En déduire l'expression de la vitesse $\dot{y}(t)$.
5. Déduire de ce qui précède des expressions des énergies cinétique et potentielle en fonction du temps. Tracer sur un même graphique les fonctions $\mathrm{E_c}(t)$, $\mathrm{E_p}(t)$ et $\mathrm{E_m}(t)$ où $\mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p}$ représente l'énergie mécanique.

6. Résolution d'équations différentielles

1. Montrer que l'équation différentielle d'une masse accrochée au bout d'un ressort horizontal s'écrit en négligeant tout frottement $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_0}^2\,x$
2. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ solution de cette équation pour les conditions initiales suivantes :
   (a) $x(0) = \mathrm{X}_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
   (b) $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \mathrm{V}_0$.
   (c) $x(0) = \mathrm{X}_0$ et $\dot{x}(0) = \mathrm{V}_0$.
   (d) $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = a\mathrm{V}_0$.
3. Que constatez-vous ?



7. Enregistrement avec un accéléromètre*

Pour une masse $m = 200$ g accrochée au bout d'un ressort horizontal, on enregistre l'accélération de la masse en fonction du temps. L'enregistrement donné ci-contre. En abscisses, 1 carreau = 0,1 s et en ordonnée 1 carreau = 0,2 V. Le capteur d'accélération (MS8002.D) a les caractéristiques données dans le datasheet ci-dessous.

Specifications All values are specified at +20°C (+86°F) and 5.0 VDC supply voltage, unless otherwise stated

	Units	MS8002.D	MS8010.D	MS8030.D	M
Full scale range	g	± 2g	± 10g	± 30g	±
Packaging		LCC 48	LCC 48	LCC 48	L(
Bias calibration	mg	< 10	< 50	< 150	<
Bias stability over 48h [1]	mg typ.	< 0.05	< 0.25	< 0.75	<
One year bias stability [2]	mg typ. (max.)	1.5 (< 5)	7.5 (< 25)	22 (< 75)	7!
Switch on/off repeatability	mg max.	< 0.15	< 0.75	< 1.5	<
Bias temp. coefficient [3]	mg/°C typ.	0.1	0.5	1.5	5
	mg/°C max.	± 0.4	± 2	± 6	±
Scale factor sensitivity (K1)	mV/g	1000 ± 8	200 ± 2	66.6 ± 1	2(
One year scale factor stability [2]	ppm typ. (max.)	300 (< 1000)	300 (< 1000)	300 (< 1000)	3(
Scale factor temp. coefficient [3]	ppm / °C typ.	100	100	100	1(
	min. / max.	-50 / 250	-50 / 250	-50 / 250	-5
Input axis misalignment (Kp, Ko)	mrad max.	< 10	< 10	< 10	<
	% max	1	1	1	1
Resolution / Threshold (@ 1Hz)	mg max.	< 0.1	< 0.6	< 1.7	<
Non linearity	% of FS max.	< 0.8	< 0.9	< 0.9	<
	g max.	< 0.02	< 0.09	< 0.27	<
Bandwidth [4]	Hz	0 to ≥ 200	0 to ≥ 200	0 to ≥ 100	0
Noise spectral density in band [0 ; 9kHz)	µV/√Hz typ.	11	11	11	1
	max.	< 18	< 18	< 18	<
Resonant frequency	kHz	1.4	3.7	6.3	1

Déterminer à partir de l'enregistrement la valeur de la période des oscillations puis celle de l'amplitude du mouvement réel de la masse et finalement celle de la raideur du ressort utilisé.

8. Malade en avion*

1. Un point matériel est animé d'un mouvement sinusoïdal sur une droite. Sa vitesse maximale est de 3,0 m.s^{-1} et son accélération maximale est de 1,5 m.s^{-2} . Quelle est la fréquence du mouvement ?
2. Lorsqu'un avion se déplace de façon harmonique (sinusoïdale) avec une accélération maximale de $0{,}4g$ et une fréquence de 0,3 Hz verticalement, on constate que presque la moitié des passagers deviennent malade et sont pris de vomissements. Quelle est l'amplitude de ces oscillations ?

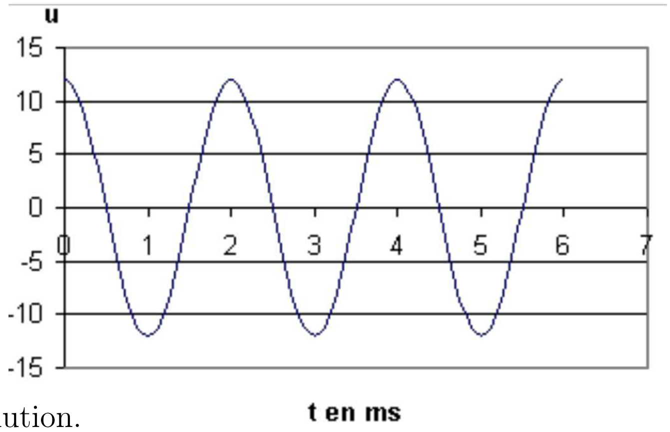
9. Exploitation d'une équation horaire* L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne et horizontal est donnée par la relation suivante : $x(t) = 4\cos\left(30t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ avec x en cm et t en s.

1. Donner la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations.
2. Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de l'oscillateur en fonction du temps.
3. Calculer les valeurs des amplitudes de la vitesse et de l'accélération.
4. Calculer la vitesse et l'élongation pour $t = 0$ et $t = 4$ s.
5. Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur, la masse en mouvement étant de $m = 0{,}1$ kg.

10. Corde de guitare* Considérons une corde de guitare qui émet la note La3 de fréquence 220 Hz. Pour simplifier supposons que le milieu de cette corde effectue un mouvement sinusoïdal d'amplitude 1,0 mm Calculer la vitesse maximale et l'accélération maximale de ce point.

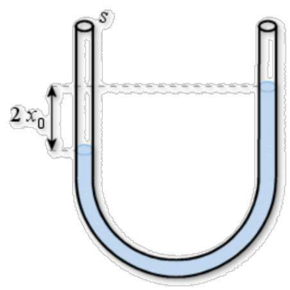
11. Pèse-astronaute* Une navette spatiale en orbite est en chute libre : la gravité *apparente* à l'intérieur de la navette est nulle. Par conséquent, les balances ordinaires sont inopérantes. Pour suivre l'évolution de leur masse pendant la mission, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissent osciller et mesurent la période naturelle d'oscillation. Assise dans un dispositif dont la constante de rappel est de 500 N/m, une astronaute prend 2,31 s pour effectuer une oscillation complète : on désire déterminer sa masse, sachant que le dispositif lui-même a une masse de 10,0 kg.

12. Circuit LC* En électrocinétique, une bobine et un condensateur constituent un système oscillant : pour la bobine, la relation entre la tension u à ses bornes et le courant i du la traversant est $u_{\mathrm{L}} = \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, pour le condensateur c'est $i = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$. Lorsqu'il y a seulement une bobine et un condensateur dans le circuit, le courant les traversant est le même et leurs tensions sont liées par $u_{\mathrm{L}} = -u_{\mathrm{C}}$.



1. Déterminer l'équation différentielle dont u_{L} est solution.
2. À l'instant initial on a $i = 0$, puis i augmente. Déterminer si l'oscillogramme suivant représente la tension u_{C} ou la tension u_{L} et en déduire la valeur de L en Henry si $\mathrm{C} = 1{,}0\ \mu$F.

13. Paramètres pertinents* On dispose d'un liquide coloré dans un tube en U. On crée une légère surpression à gauche (cf. figure) de sorte à ce qu'à $t = 0$, il y ait une différence de niveau de $2x_0$ entre les surfaces libres, puis on laisse le système osciller.



1. Chercher les grandeurs physiques pertinentes du système ; ce sont les grandeurs qui vont déterminer son comportement.
2. Écrire la période d'oscillation sous la forme $\mathrm{T} = x^{\alpha}\, y^{\beta}\, z^{\gamma} \cdots$ où x, y, z, … sont les grandeurs pertinentes et α, β, γ, … des constantes. En raisonnant sur les dimensions, trouver les valeurs de α, β, γ, …

♫