Oscillateurs amortis : régime libre, indications

1. RLC parallele Deux courants s'expriment directement en fonction de u. Le troisième se trouve à l'aide de la loi des nœuds et por l'équation différentielle, il suffit de remplacer son expression dans la loi de la bobine.

2. Histoires de ressorts

1. (a) À l'équilibre, la somme de la tension du ressort et du poids donne le vecteur nul. Penser au fait que l'équilibre doit forcément *allonger* le ressort.
   (b) L'équation différentielle sur l'écart à la position d'équilibre doit donner une équation différentielle sans second membre. Reconnaître une équation d'oscillateur harmonique et en déduire que la vitesse maximale s'écrira forcément $a\omega_0$ (reste à le prouver).
2. (a) À l'équilibre, la somme de la tension du ressort et du poids donne le vecteur nul. Penser au fait que l'équilibre doit forcément *raccourcir* le ressort.
   (b) L'équation différentielle sur l'écart à la position d'équilibre doit donner une équation différentielle sans second membre.
3. (a) À l'équilibre, la somme des deux tensions des ressorts et du poids donne le vecteur nul. Écrire avec soin chaque tension sous la forme $-k(\ell-\ell_0)\vec{u}$ avec $\vec{u}$ le vecteur directeur qui va du point de fixation du ressort vers la masse sur laquelle s'exerce la force.
   (b) Quand l'accélération n'est pas nulle, reconnaître une équation d'oscillateur harmonique et identifier la pulsation propre associée.
4. (a) À l'équilibre, la somme de la tension du ressorts, de la réaction normale et du poids donne le vecteur nul. Penser à projeter selon l'axe oblique pour s'affranchir de la réaction normale. Le ressort doit forcément être *allongé* à l'équilibre par rapport à sa longueur à vide. L'utiliser pour vérifier le résultat a posteriori.
   (b) À nouveau, on doit tomber sur notre ami l'oscillateur harmonique.

3. Vu en TP

1. Regarder toutes les informations que l'on peut extraire du graphique et l'équivalent sur l'expression fournie, par exemple (liste non exhaustive et où tout n'est pas forcément utile) :
   — la valeur initiale ;
   — la valeur asymptotique ;
   — la pseudo-période des oscillations ;
   — le nombre d'oscillation (penser au lien avec le facteur de qualité) ;
   — le temps caractéristique associé à l'enveloppe exponentielle.

4. Mesure de viscosité

1. Bien choisir le repère adapté, par exemple avec une origine au point de fixation du ressort et une direction vers le bas. Identifier ω_0 et Q sur l'équation différentielle obtenue.
2. L'équation dans l'air revient à prendre $\eta = 0$ dans l'équation précédente. On s'aperçoit que la période d'oscillation dans l'air correspond pile à la période propre du cas précédent (d'où le choix de notation de l'énoncé). L'expression de T en fonction de T_0 permet de remonter à Q, puis à η, seule grandeur non connue dans le facteur de qualité.

5. Étincelle de rupture

1. La résolution est un peu calculatoire, mais n'ayez pas peur d'aller au bout. Bien analyser les conditions initiales : $u(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = \dfrac{i(0)}{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{RC}}$.
   Regarder les amplitudes respectives devant le terme en cosinus et le terme en sinus. Comme le facteur de qualité est très grand, chacune va être (presque) atteinte et la plus grande donne une indication de l'amplitude maximale.
2. Remarquer que le temps de rupture t_{rupt} est tel que $\omega_0 t_{\text{rupt}} \ll 1$, on peut donc approximer les termes en cosinus et sinus au premier ordre non nul. Attention, pour le courant, cela signifie de tout développer jusqu'au second ordre puisqu'on attend un terme en t^2.

6. Échelon de courant sur RLC parallèle Deux courants sur les trois inconnus s'expriment simplement en fonction de u. Pour le 3e, utiliser la loi des nœuds pour le déterminer en fonction de u. Enfin, remplacer son expression dans la relation de la bobine pour obtenir l'équation différentielle.

7. Décrément logarithmique

1. Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur $\vec{e_x}$. Faire un bon dessin pour définir votre repère et ne pas se tromper sur le signe.
2. (a) Penser au cours, notamment au signe du discriminant pour l'équation caractéristique. On peut aussi repartir directement de l'inégalité du cours sur le facteur de qualité.
   (b) Utiliser la forme des solutions déterminée en cours en l'adaptant avec ξ en remarquant qu'on a $2\xi = \frac{1}{\mathrm{Q}}$. Attention au fait que l'énoncé note la pseudo-pulsation ω et non Ω comme dans le cours, mais cela ne doit pas vous déstabiliser.
   (c) Calculer $x(t + n\mathrm{T})$ en remarquant que $\sin(\omega(t + n\mathrm{T})) = \sin(\omega t + n2\pi) = \sin(\omega t)$, ce qui va permettre de le simplifier dans l'expression de $x(t)$ que l'on divise.
   (d) Se placer en un point simple pour faire les mesures, par exemple entre deux maximas consécutifs (même s'ils ne sont pas exactement écartés d'une pseudo-période, l'écart sera négligeable au vu de l'approximation de la mesure).

8. Configuration de Wien avec deux bobines

1. (a) Remarquer qu'on a forcément les trois courants nuls à $t = 0^+$ (deux du fait de conditions de continuité, le troisième par loi des nœuds avec les deux autres). La tension u s'en déduit en tant que tension aux bornes d'une résistance.
   (b) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ revient à calculer $\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}$ donc, par loi des nœuds, la différence des dérivées des deux autres courant. Or celles-ci sont reliées aux tensions aux bornes de leurs bobines respectives, tension que l'on peut calculer en 0^+.
2. Penser au comportement asymptotique de la tension aux bornes d'une bobine. Que dire de la dérivée d'une grandeur qui tend gentiment vers une constante ?
3. Appliquer calmement les gentils et les méchants pour ne pas tourner en rond.
4. La vérification d'homogénéité peut se faire même si vous n'avez pas réussi à obtenir l'équation précédente.
5. Ne pas oublier de mettre un 1 devant le terme en dérivée seconde.
6. Transcrire la condition $\mathrm{Q} > \frac{1}{2}$ en fonction des données de l'énoncé.
7. Manipuler l'inéalité précédente pour faire apparaître une identité remarquable.
8. Regarder les valeurs initiales et asymptotiques pour chacune des trois tensions afin de procéder à l'identification.

9. Regarder respectivement
   — la valeur asymptotique pour u_r ou la valeur initiale pour u_L ;
   — la pente de la tangente à l'origine de u ;
   — la pente de la tangente à l'origine de u_r.
10. Le montage soustracteur sera vu dans le cours sur *S8*. En attendant, regardez quelles explications vous pouvez trouver sur Wikipédia.

9. Extrait ENSTIM 2009

10. Oscillateur amorti et portrait de phase

11. Pendule élastique dans un liquide

1. Commencer par déterminer la position d'équilibre dans un repère avec pour origine le point de fixation du ressort et orienté vers le bas. Hint : elle doit être plus grande que la longueur à vide, sinon c'est qu'il y a une erreur de signe quelque part. Poursuivre en posant $x = z - z_{éq}$ et observer comment le second membre disparaît comme par margie.
2. Question de cours qui revient à faire le lien avec le facteur de qualité et sa valeur comparée à $\frac{1}{2}$.
3. (a) Vérifier que la valeur est plausible pour un système mécanique.
   (b) L'énoncé a choisi des valeurs qui se simplifient bien normalement...
   (c) Appliquer le cours.
   (d) Ici aussi, l'adapter à la notation en λ choisie.
   (e) Penser à calculer $\dot{x}(t)$ pour pouvoir regarder son expression en $t = 0$ en fonction de A et B.
   (f) Mélanger littéral et numérique, c'est tellement affreux... mais bon, si c'est demandé...
4. (a) Puisez dans vos souvenirs de lycée. Sinon ce sera revu dans *M3*.
   (b) L'énergie dissipée correspond à l'opposé de la variation d'énergie mécanique. Bien considérer les 3 contributions : énergie cinétique, énergie potentielle de pesanteur et énergie potentielle élastique.
   (c) Qu'est-ce qui permet de dissiper de l'énergie ?
   (d) Pour la définition du travail, voir *M3*, attention, la force n'est pas constante.

12. RLC en fuite !

1. $i(0^+)$ découle de la condition de continuité de la bobine, mais pour $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, il faut reconnaître une tension et procéder en utilisant $i(0^+)$ ainsi que $u_C(0^+)$ via une loi des mailles.
2. La loi des mailles permet d'isoler u_C au profit de i. Comme les deux autres courants s'expriment facilement en fonction de u_C, il suffit de remplacer son expression dans la loi des nœuds pour obtenir l'équation demandée.
3. Bien penser à se mettre sous forme canonique, c'est-à-dire avec un 1 devant la dérivée seconde.
4. Calculer la dérivée $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)_y$ et voir quand elle s'annule.
5. Le cas considéré donne une valeur à Q que l'on peut alors comparer à $\frac{1}{2}$ pour savoir de quel type de régime il s'agit. Il reste alors à déterminer les constantes d'intégration.

13. Circuit RLC semi-parallèle

1. Simple description du matériel usuellement utilisé en TP.
2. Utiliser les relations de continuité pour faire un circuit équivalent en O^+. En particulier, si la tension aux bornes d'un dipôle est imposée à 0, celui-ci se comporte comme un fil. Au contraire, si le courant qui le traverse est nul, il s'agit d'un interrupteur ouvert.

   Faire de même en l'infini en dessinant le circuit équivalent en remplaçant condensateur et bobine par leurs équivalents asymptotiques (faire le même raisonnement qu'en 0^+ pour savoir qui est fil et qui est interrupteur ouvert).
3. u s'exprime directement en fonction de i_1, ce qui permet d'obtenir i_2 et i_3. i en découle par loi des nœuds et il ne reste plus qu'à remplacer dans la loi des mailles.
4. (a) Écrire la condition du cours sur Q.
   (b) Regarder le lien entre λ, Q et ω_0.
   (c) Utiliser le cours directement. Attention, l'énoncé utiliser ω plutôt que Ω
   (d) La résolution de l'équation différentielle donne i_1. On obtient les autres en remontant à leur expression en fonction de i_1 par lesquelles on a dû passer avant d'obtenir l'équation différentielle (d'où l'intérêt de se garder les expressions gentifiées dans un coin du brouillon).
5. La demi-période du créneau doit permettre à l'enveloppe exponentielle de disparaître : on doit regarder sur au moins 5 temps caractéristiques.
6. Pour obtenir i, on doit regarder la tension aux bornes de la résistance R, sauf qu'il y a une histoire de masse qui se cache là-dessous.

14. Inductance mutuelle de deux bobines

1. M apparaît dans les mêmes termes que L_1 et L_2 dans les expressions de u_1 et u_2. Comparez les dimensions : si $L_1\dfrac{di_1}{dt}$ a la dimension d'une tension, que doit valoir la dimension de $M\dfrac{di_2}{dt}$?

2. La puissance reçue est $P = u_1 i_1 + u_2 i_2$. Remplacez u_1 et u_2 par leurs expressions, puis réorganisez les termes pour reconnaître des dérivées temporelles de produits du type $\dfrac{d\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2\right)}{dt}$ et $\dfrac{d(M i_1 i_2)}{dt}$.

3. Pour $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$, fixez l'un des courants à zéro. Pour $|M| < \sqrt{L_1 L_2}$, réécrivez E en complétant le carré : introduisez les termes $\sqrt{L_1} i_1$ et $\sqrt{L_2} i_2$, puis utilisez les cas où $\sqrt{L_1} i_1 = \pm\sqrt{L_2} i_2$ pour encadrer M.

4. Écrivez les deux mailles. Isolez $\dfrac{di_2}{dt}$ dans la première, dérivez-la, puis substituez dans la seconde. Vous obtiendrez une équation du second ordre en i_1 avec des coefficients en L_1, L_2, M, R_1, R_2.

5. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène en i_1 a un discriminant $\Delta = (L_1R_2+L_2R_1)^2 - 4R_1R_2(L_1L_2$ Réécrivez-le sous forme de somme de deux carrés strictement positifs.

6. Par continuité, $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$ et $i_2(0^+) = 0$. Remplacez dans le système des deux mailles à $t = 0^+$: vous obtenez un système linéaire en $\dfrac{di_1}{dt}(0^+)$ et $\dfrac{di_2}{dt}(0^+)$, que vous pouvez résoudre.

7. Avec $L_1 = L_2 = L$, $R_1 = R_2 = R$, $M = kL$, l'équation devient : $\frac{E_0}{R} = i_1 + \frac{2L}{R}\dfrac{di_1}{dt} + \left(\frac{L}{R}\right)^2 (1-k^2)\frac{d^2 i_1}{dt^2}$. Cherchez une solution particulière constante, puis résolvez l'homogène avec les conditions initiales.

Astuce : Par symétrie, $i_1 = i_2$, donc $E_0 = (L+M)\dfrac{di_1}{dt} + R i_1$ — solution immédiate !

15. Évolution de la charge d'un condensateur

16. Springtiere

17. Mouvement « glissé-collé »