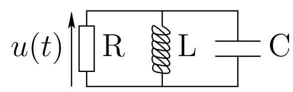
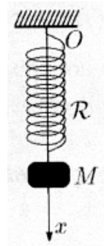
Oscillateurs amortis : régime libre

1. RLC parallele*
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ dans le montage suivant. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q du circuit. Exprimer $u(t)$ dans le cas où $R = 10\,k\Omega$, $L = 100$ mH et $C = 100$ nF, avec les conditions initiales suivantes : charge du condensateur $q_0 = 1{,}0$ µC et intensité dans la bobine $i_0 = 1{,}0$ mA.

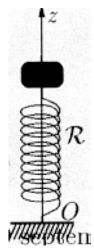


2. Histoires de ressorts* On supposera $g = 10$ m.s^{-2}



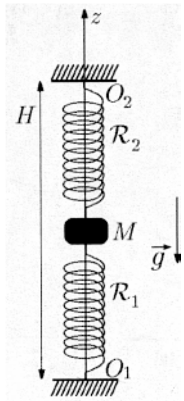
1. Un ressort $\mathscr{R}$ de constante de raideur $k = 20$ N.m^{-1} et de longueur à vide $\ell_0 = 10$ cm est accroché en un point O (fixe par rapport à un référentiel galiléen) à une potence. On lui suspend un objet M de masse $m = 0{,}10$ kg.
   (a) Calculer la longueur du ressort à l'équilibre. On prendra l'axe Ox suivant la verticale descendante (comme sur la figure ci-contre).
   (b) On écarte la masse de sa position d'équilibre d'une distance $a = 2{,}0$ cm vers le bas et on la lâche sans vitesse initiale. L'abscisse de M étant comptée à partir du point origine, établir l'équation horaire du mouvement et déterminer numériquement la valeur maximale v_m de la vitesse de M.

2. On pose le ressort $\mathscr{R}$ verticalement sur une table et on place sur l'extrémité libre l'objet M de masse m. L'axe z sera pris suivant la verticale ascendante (comme sur la figure ci-contre).



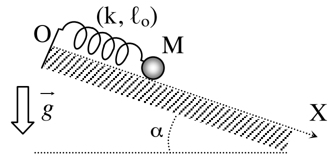
   (a) Déterminer la position d'équilibre.
   (b) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de la masse m.

3. On considère le dispositif suivant : $\mathscr{R}_1$ est un ressort de raideur k_1 et de longueur à vide ℓ_1 ; $\mathscr{R}_2$ est un ressort de raideur k_2 et de longueur à vide ℓ_2. Ils sont reliés à un objet quasi ponctuel M de masse m, guidé le long de l'axe vertical Oz (absence de frottements). Leurs extrémités fixes O_1 et O_2 sont situées sur une méme verticale et distantes de H.



   (a) Déterminer la position d'équilibre.
   (b) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de M. En déduire la période des oscillations.
   (c) Application numérique : $\ell_1 = \ell_2 = 20$ cm, H = 0,50 m, $k_1 = k_2 = 20$ N.m^{-1} et $m = 0{,}10$ kg.

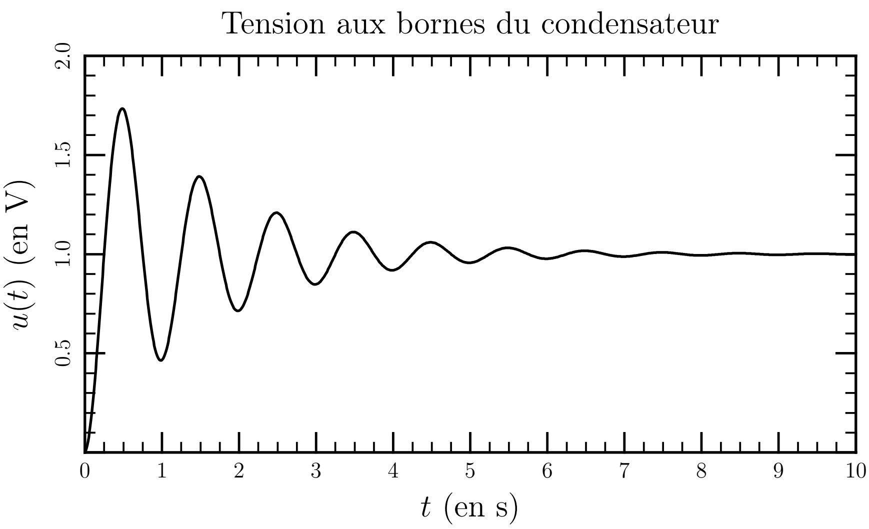
4. On pose le ressort $\mathscr{R}$ sur un plan parfaitement lisse, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et on place sur l'extrémité libre l'objet M de masse m.



   (a) Déterminer la position d'équilibre.
   (b) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la position de la masse m.

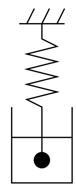
3. Vu en TP* Lors de l'étude d'un circuit RLC série en travaux pratiques, vous obtenez la courbe suivante de la tension aux bornes du condensateur représentative de l'équation

$$u(t) = E_0\left(1 - e^{-\lambda t}\cos(\omega t)\right)$$



1. En expliquant la méthode, déterminer les valeurs de E_0, λ et ω.
2. En déduire les valeurs de Q et ω_0 pour ce circuit.
3. Vérifier qu'il y a bien environ Q oscillations visibles.

4. Mesure de viscosité* Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue verticalement à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stockes $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

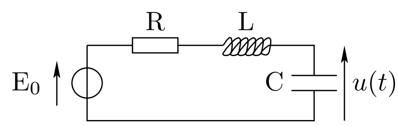


1. Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T (l'amortissement est faible mais pas négligeable).
2. Dans l'air où les frottements fluides sont négligeables la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

5. Étincelle de rupture** Soit un circuit RL série alimenté par un générateur de tension E_0 tels que

$$E_0 = 40\text{ V} \qquad R = 4\,\Omega \qquad \text{et} \qquad L = 4\text{ mH}$$

Le régime permanent étant établi, on ouvre brusquement l'interrupteur. La coupure réalisée lors de l'ouverture de l'interrupteur est modélisée par un condensateur de capacité $C = 10^{-9}$ µF.

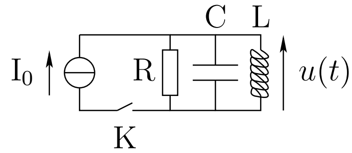


1. Étudier la tension $u(t)$ aux bornes de la coupure et montrer que, compte tenu des valeurs numériques données, $u(t)$ atteint très rapidement le potentiel explosif de l'ordre de 1000 V justifiant d'une étincelle de rupture.
2. Montrer qu'au moment de l'éclatement de l'étincelle, la tension et l'intensité sont bien représentées par des expressions de la forme

$$u(t) = a\,t \qquad \text{et} \qquad i(t) = i_0\left(1 - b\,t^2\right)$$

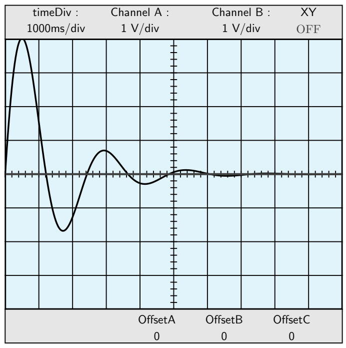
Calculer a, b et i_0 en fonction des données.

6. Échelon de courant sur RLC parallèle*
On abaisse K. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$? Analogies et différences avec un circuit RLC série soumis à un échelon de tension ? Quels types de régimes transitoires peut-on obtenir ? Comment détermine-t-on les constantes d'intégration qui apparaissent dans la résolution de l'équation différentielle ?



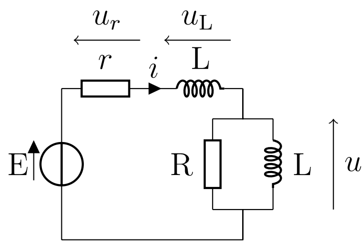
7. Décrément logarithmique* On réalise expérimentalement le dispositif suivant : un objet (assimilé à un point matériel M) de masse m est attaché à un ressort de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et posé sur un rail à coussin d'air horizontal (en fonctionnement) : de ce fait il n'y a pas de frottements entre le rail et l'objet. On note ℓ la distance OM et x «l'abscisse de M comptée à partir de sa position d'équilibre» c'est-à-dire que $x(t) = \ell(t) - \ell_0$. On se place dans le référentiel (O, x) lié au rail supposé galiléen. Une voile a été placée au-dessus de la masse : elle exerce sur la masse une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ où v désigne le vecteur vitesse de M et h une constante positive.

1. Montrer que $x(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\,\dot{x} + {\omega_0}^2\,x = 0$ où ξ et ω_0 sont des constantes à déterminer en fonction de h, k et m.
2. (a) Quelle inégalité doit vérifier ξ pour que l'on obtienne un régime pseudo-périodique ? On supposera dans la suite de l'exercice que cette inégalité est vérifiée.
   (b) Sachant que l'objet est lancé avec la vitesse $v(t=0) = v_0$ de la position $x(0) = 0$, déterminer l'expression de $x(t)$. On introduira la pseudo-pulsation ω.
   (c) On définit le décrément logarithmique par la quantité $\delta = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+n\mathrm{T})}\right)$ où T est la pseudo-période, n un entier et t le temps. Exprimer δ en fonction de ξ.
   (d) La masse m de l'objet est connue : $m = 0{,}50$ kg. Un dispositif permet d'enregistrer le mouvement de l'objet : un transducteur fournit à ses bornes la tension $\mathrm{V}_x = \alpha\,x(t)$ où $\alpha = 1{,}0\ \mathrm{V.cm^{-1}}$. Le transducteur est connecté aux bornes d'un oscilloscope. L'oscillogramme obtenu est représenté ci-contre. En déduire la pseudo-période T, la constante ξ et la constante de raideur k du ressort.



8. Configuration de Wien avec deux bobines**

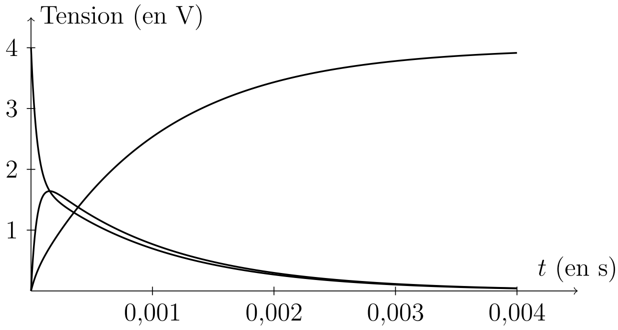
On considère le circuit ci-contre où le générateur n'est branché qu'à l'instant $t = 0$. Les bobines seront considérées comme idéales (*ie* sans résistance interne)

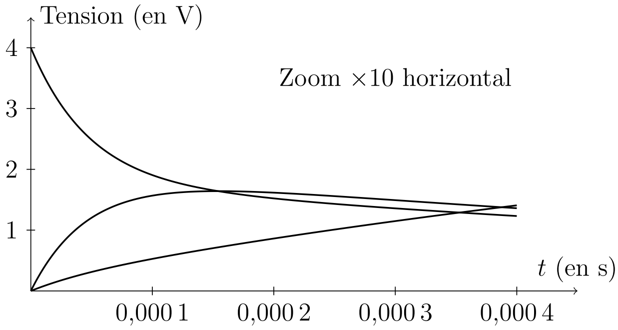


1. (a) Déterminer la valeur de $u(0^+)$.
   (b) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{\mathrm{RE}}{\mathrm{L}}$.
2. Déterminer par un raisonnement *simple* les valeurs de $u(\infty)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\infty)$.
3. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u s'écrit
$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(2 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{\mathrm{L}}\,u = 0$$
4. Montrer que l'expression précédente est bien homogène [1].
5. Identifier les expressions de ω_0, λ et Q pour ce circuit. On rappelle que les écritures canoniques de l'équation différentielle peuvent se mettre sous la forme
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,y = 0$$
6. À quelle condition sur R et r obtiendra-t-on un régime pseudo-périodique amorti ?
7. Même avec un montage dit à « résistance négative » [2], cette condition ne pourrait jamais être vérifiée dans le cadre que l'on s'est fixé en cours : pouvez-vous expliquer pourquoi ?

1. Si ce n'est pas le cas, vous pouvez fouetter au choix le concepteur du sujet ou vous-même.
2. Ce montage à base d'AO permet de simuler le comportement d'un résistor dont la valeur de la résistance serait négative.

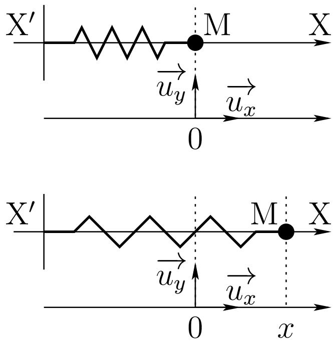
8. On enregistre les courbes $u_r(t)$, $u_L(t)$ et $u(t)$. Les identifier sur les courbes suivantes. Justifier votre choix.





9. Sachant que L = 0,10 H, déterminer à partir de ces courbes les valeurs de E, r et R.
10. Indiquez comment, à l'aide d'un montage soustracteur, on peut visualiser à la fois la tension u et le courant i grâce à un oscilloscope dont la masse est nécessairement confondue avec la borne inférieure du générateur.

9. Extrait ENSTIM 2009**



Une particule M de masse m peut glisser sur un rail horizontal X′X fixe dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ supposé galiléen. M est fixée à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixe dans $\mathscr{R}$. La position de M est repérée par son abscisse x. $x = 0$ correspond au ressort détendu. Le glissement s'effectue, dans un premier temps, sans frottement.

1. Représenter, sur un dessin, les forces exercées sur M dans le cas où $x > 0$ puis, par application de la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. (Ne pas la résoudre pour l'instant).
2. Résoudre l'équation différentielle et obtenir l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de M dans le cas où M est lancée à $t = 0$ de l'abscisse x_0 avec la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$ (on exprimera $x(t)$ en fonction de x_0, v_0, k, m et t).

Pour la suite du problème, M est soumise, de la part du rail à une force de frottement $\overrightarrow{f}$ (frottement solide) de norme constante $\|\overrightarrow{f}\| = f$ quand M est en mouvement et on suppose que $f(t)$ est comprise entre 0 et f quand M est immobile.

3. Grâce à un schéma des forces quand M est en mouvement, et en précisant le sens du mouvement, déterminer l'angle φ entre la réaction du support et la verticale en fonction de m, g et f.

Dans la suite du problème, on donne à M l'élongation (l'abscisse) x_0, positive ou négative, et on l'abandonne sans vitesse initiale.

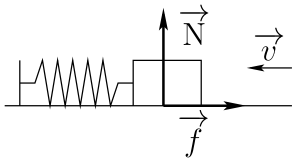
4. À quelles conditions sur x_0, M démarrera-t-elle ? Entre quelles limites de x se situera donc la position d'équilibre finale de M ? (Réponses en fonction de f et k).
5. Du fait que les frottements n'ont pas toujours le même sens, expliquer pourquoi la force de frottement peut s'écrire : $\overrightarrow{f} = -\varepsilon f\,\overrightarrow{u_x}$, où le coefficient ε est tel que $\varepsilon = +1$ si $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$. Écrire alors l'équation différentielle en x du mouvement de M (Paramètres : m, k, f et ε). **Ne pas résoudre** cette équation différentielle.

Pour toute la suite du problème, on prendra x_0 positive et très supérieure à la limite de démarrage de M, de telle façon que M effectue plusieurs oscillations.

6. Écrire puis résoudre l'équation sur l'intervalle $[x_1 ; x_0]$ où x_1 est l'abscisse de M quand M s'arrête pour la première fois. Quelle est la durée de cette première étape ? Trouver l'expression de x_1.
7. Le phénomène se reproduit de x_1 à x_2 où M s'arrête à nouveau, etc. Justifier que le mouvement de M est pseudo-périodique. Déterminer la pseudo période T des oscillations.

10. Oscillateur amorti et portrait de phase** On considère une masse au bout d'un ressort horizontal soumise à une force de frottement solide.

On rappelle les lois de Coulomb relatives au frottement solide :



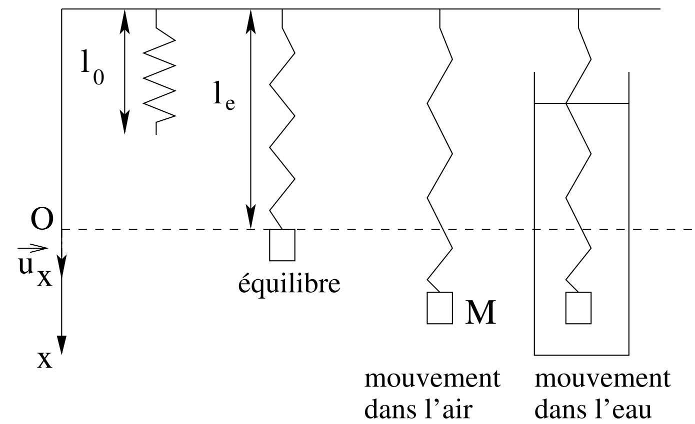
— lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \mu_s N$;

— lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ et $\|\vec{f}\| = \mu_d N$.

Les coefficients de frottement statique et dynamique μ_s et μ_d seront pris égaux à μ et N est la norme de la réaction normale au support. On choisit l'origine du repère de telle sorte que lorsque la masse m est en O, le ressort a sa longueur naturelle. On note ${\omega_0}^2 = k/m$.

1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre, c'est-à-dire que l'on peut avoir $x(t) = C^{te}$ pour $x \in [-b; b]$ avec b à déterminer.
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement. On introduira $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon \dot{x} < 0$
3. (a) Déterminer la solution $x_1(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = 1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_1(0) = X_1 > b$ et $\dot{x}_1(0) = 0$.
   (b) Déterminer la solution $x_2(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = -1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_2(0) = X_2 < -b$ et $\dot{x}_2(0) = 0$.
4. (a) Montrer que, dans le plan de phase $(x, \dot{x}/\omega_0)$, $x_1(t)$ correspond à un demi-cercle (dont on déterminera le rayon) situé dans le demi-plan inférieur et centré sur $(b, 0)$
   (b) Montrer que, dans le plan de phase $(x, \dot{x}/\omega_0)$, $x_2(t)$ correspond à un demi-cercle (dont on déterminera le rayon) situé dans le demi-plan supérieur et centré sur $(-b, 0)$
   (c) En déduire la construction graphique de la trajectoire du mouvement dans le plan de phase à partir de la condition initiale $x(0) = X_0 > b$ et $\dot{x}(0) = 0$.

11. Pendule élastique dans un liquide**



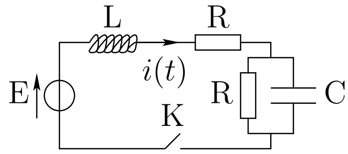
L'action du liquide est équivalente à une force de frottement fluide d'expression $\vec{F} = -h\vec{v}$, h est une constante positive. On néglige tous les autres frottements et la poussée d'Archimède. À $t = 0$, on abandonne M, de masse m sans vitesse en $x = b$.

1. En utilisant la deuxième loi de Newton et l'équation d'équilibre, établir l'équation différentielle du mouvement de M.
2. On pose $\lambda = \dfrac{h}{2m\omega_0}$, ω_0 étant la pulsation propre des oscillations harmoniques en l'absence de liquide (ie dans l'air), indiquer suivant les valeurs de λ la nature du régime.
3. On donne les valeurs numériques suivantes $k = 10\pi^2$ N.m^{-1} ; $m = 0,100$ kg ; $b = 0,010$ m et $h = \pi$ kg.s^{-1}
   (a) Calculer ω_0 et la période propre T_0 des oscillations harmoniques.
   (b) Calculer λ. Définir le facteur de qualité Q et le calculer.
   (c) Quelle est la nature du régime ? Calculer numériquement la pseudopulsation Ω et la pseudopériode T.
   (d) Exprimer littéralement $x(t)$ en utilisant deux constantes A et B.
   (e) Déterminer numériquement ces deux constantes.

   (f) Donner l'expression numérique de $x(t)$ et tracer $x(t)$ en fonction de t en choisissant une échelle adaptée.

4. Calcul de l'énergie dissipée
   (a) Rappeler le théorème de l'énergie mécanique.
   (b) Calculer l'énergie dissipée E_{dis} dans le liquide en fonction de k et de b.
   (c) Calculer le travail des frottements fluides. Faire l'application numérique.
   (d) Exprimer E_{dis} à l'aide d'une intégrale que l'on ne calculera pas.

12. RLC en fuite !*** On ferme K à $t = 0$, le condensateur étant préalablement déchargé.



1. Déterminer $i(0^+)$, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$ ainsi que $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)$.
2. Déterminer pour $t > 0$ l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

La forme canonique d'une équation différentielle du second ordre sans second membre peut s'écrire avec les paramètres Q (facteur de qualité) et ω_0 (pulsation propre) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\, y = 0$$

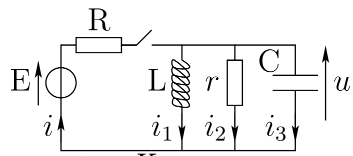
3. Montrer que l'on peut écrire le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 sous la forme

$$\mathrm{Q} = \frac{\sqrt{2\,x\,y}}{x+y} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{LC}}} \qquad \text{avec} \qquad x = \mathrm{RC} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$$

4. À y fixé, quelle valeur de x faut-il poser pour maximiser le facteur de qualité Q ?
5. Déterminer $i(t)$ explicitement dans ce dernier cas.

13. Circuit RLC semi-parallèle***

On considère le circuit ci-contre avec C déchargé.



1. Si la force électromotrice E est limitée à quelques volts, quel matériel va-t-on choisir comme générateur en salle de TP ?
2. Faire un raisonnement simple pour déterminer après fermeture de l'interrupteur K :
   (a) les valeurs initiales de i, i_1, i_2 et i_3 ;
   (b) les valeurs pour $t \to \infty$ de i, i_1, i_2 et i_3.
3. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de i_1. On posera

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{(\mathrm{R}+r)}{2\mathrm{R}r\mathrm{C}}$$

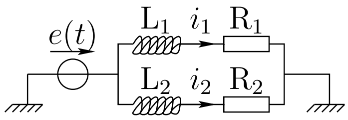
4. (a) Quelle relation doit-on imposer entre r, R, L et C pour obtenir un régime pseudo-périodique amorti ? (sans démonstration)

   Pour toute la suite, on prend $r = 1{,}25$ kΩ, R = 2,5 kΩ, L = 20 mH et C = 1,0 µF.

   (b) Calculer numériquement ω_0, T_0 et λ. Que caractérise λ ?
   (c) Définir et calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T. Compte tenu de la précision des données, que dire des valeurs comparées de ω et ω_0 ?
   (d) Déterminer u, i, i_1, i_2 et i_3 en fonction de t (on pourra utiliser ω et λ pour alléger l'écriture). Calculer numériquement la valeur maximale de u si E = 6,0 V.
5. On désire visualiser les phénomènes à l'oscilloscope mais celui-ci ne possède pas de mémoire. On doit donc prendre un GBF et utiliser sa fonction créneau. Quelle fréquence doit-on choisir ?
6. On veut à la fois observer u et i. Quel est le problème rencontré (causé par le GBF) ? Comment le résoudre ?

14. Inductance mutuelle de deux bobines∗∗∗∗ Lorsque deux bobines d'inductances L_1 et L_2 sont spatialement assez proches, on admet que les tensions u_1 et u_2 à leurs bornes prennent la forme, avec M constante,

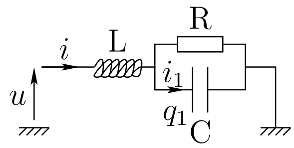
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \qquad \text{et} \qquad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



1. Quelle est l'unité de mesure de M ?
2. Déterminer la puissance reçue par l'ensemble des deux bobines. Exprimer l'énergie magnétique[3] $\mathscr{E}$ emmagasinée par ce système en fonction de i_1, i_2, L_1, L_2 et M.
3. On admet que $\mathscr{E} > 0$ dès lors que $(i_1, i_2) \neq (0,0)$. En déduire que $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ et $|M| < \sqrt{L_1 L_2}$.
4. Établir[4] l'équation différentielle liant $i_1(t)$ et $e(t)$.
5. Montrer que le seul régime possible est le régime apériodique.
6. On applique à l'entrée un échelon de tension de hauteur E_0 et on suppose que les fonctions $i_1(t)$ et $i_2(t)$ restent continues comme c'est le cas sans inductance mutuelle.
   Déterminer $i_1(t = 0^+)$ et $\frac{di_1}{dt}(t = 0^+)$.
7. On se place enfin dans le cas où $L_1 = L_2 = L$, $R_1 = R_2 = R$ et $M = kL$ avec $k \in]0;1[$.
   Déterminer $i_1(t)$.

15. Évolution de la charge d'un condensateur∗∗

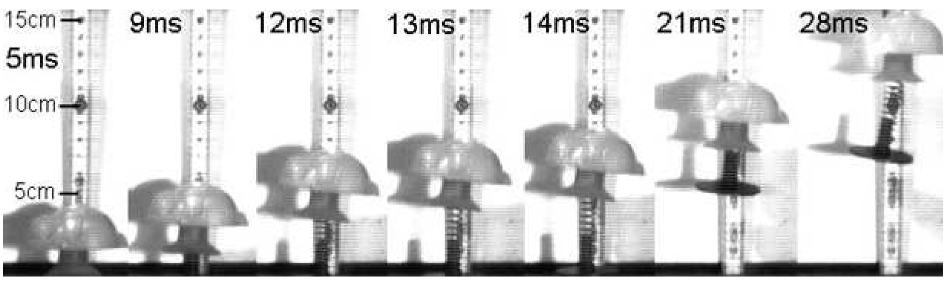
Un circuit constitué d'une bobine d'inductance L, en série avec un groupement parallèle (R, C), est alimenté par une tension u. On note $i(t)$ et $i_1(t)$ les courants circulant respectivement dans la bobine et le condensateur de charge $q_1(t)$. Établir, à partir des lois de Kirchhoff, l'équation différentielle du second ordre satisfait par $q_1(t)$.



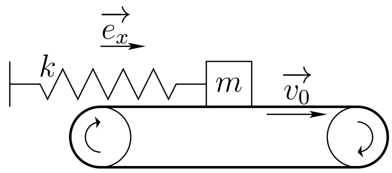
16. Springtiere∗ (`http://users.physik.tu-muenchen.de/cucke/ftp/lectures/jump2.avi`)

Un jouet «bondissant» est constitué d'un capuchon solidaire d'un ressort. Celui-ci une fois comprimé est libéré par un mécanisme. Le jouet bondit alors jusqu'à une altitude de 1,20 m.

1. Déterminer à partir de la figure ci-contre, indiquant les valeurs numériques pour la compression du ressort, la constante de raideur de ce dernier.
2. le décollage du jouet a été filmé avec une caméra rapide. Quelques images en ont été tirées pour reconstituer la séquence ci-dessous. Peut-on retrouver la constante de raideur à partir de cette photographie ?



3. On choisira l'origine des énergies magnétiques $\mathscr{E} = 0$ lorsque $i_1 = i_2 = 0$
4. N'ayez pas peur de chercher des liens en dérivant certaines relations.



17. Mouvement « glissé-collé » **** On considère le mouvement d'une masse m posée sur un tapis roulant se déplaçant à une vitesse horizontale constante $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$, $v_0 > 0$, par rapport au référentiel du laboratoire. La masse est soumise à une force de rappel colinéaire au mouvement du tapis roulant et exercée par un ressort de raideur k. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la masse et le tapis sont notés respectivement μ_S et μ_C avec $\mu_C \leqslant \mu_S$. On repérera la position de la masse par son abscisse x dans le référentiel du laboratoire, l'origine correspondant à l'absence de déformation du ressort. On rappelle que les lois de Coulomb entre deux surfaces s'écrivent, avec $\overrightarrow{R_t}$ et $\overrightarrow{R_n}$ les réactions respectivement tangentielle et normale du support,

— en l'absence de mouvement d'une surface par rapport à l'autre : $\|\overrightarrow{R_t}\| \leqslant \mu_S \|\overrightarrow{R_n}\|$;

— avec mouvement d'une surface par rapport à l'autre : $\|\overrightarrow{R_t}\| = \mu_C \|\overrightarrow{R_n}\|$.

1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre dont on déterminera l'abscisse x_{eq} en fonction de μ_C, g et $\omega^2 = k/m$.
2. On pose $X = x - x_{eq}$. Expliciter l'équation du mouvement de la masse; on distinguera les situations $\dot{X} < v_0$ et $\dot{X} > v_0$. Montrer qu'une phase de mouvement avec collage, pour laquelle $\dot{X} = v_0$, peut s'établir si X appartient à l'intervalle $[X_1 ; X_2]$ dont on déterminera les bornes. À quelle condition peut-elle se maintenir ?
3. La masse est posée sur le tapis sans vitesse initiale à l'abscisse X_0, avec $X_0 > 0$. Déterminer $X(t)$ pour le début du mouvement. Montrer que ce type de mouvement se maintient si X_0 est inférieur à une valeur X_m que l'on déterminera.
4. On utilise X_m comme longueur caractéristique. On pose $q_{eq} = x_{eq}/X_m$, $q_1 = X_1/X_m$ et $q_2 = X_2/X_m$. Exprimer q_1 et q_2 en fonction de q_{eq} et du rapport $\gamma = \mu_S/\mu_C$.
5. On pose $q(\theta) = X/X_m$ avec $\theta = \omega t$. Exprimer $q' \equiv \dfrac{dq}{d\theta}$, la dérivée de q par rapport à θ, en fonction de $\dot{X}$ et v_0. Transcrire pour $q(\theta)$ les équations différentielles du mouvement obtenues en 17.2. Dans le plan $(q; q')$ tracer le portrait de phase correspondant au mouvement de conditions initiales $(0,5; 0)$. Quel est alors le mouvement ?
6. On donne $q_{eq} = 0{,}5$ et $\gamma = 2$. Préciser dans le plan $(q; q')$ les points représentatifs des états avec collage.
7. En procédant par étapes, tracer le portrait de phase correspondant aux conditions initiales $(2; 0)$. Préciser ce qui se passe lorsque le point représentatif de l'état du système franchit la ligne $q' = 1$ pour la première fois, puis la seconde fois. Montrer que le mouvement devient périodique et préciser le cycle correspondant dans le plan de phase $(q; q')$. Ce cycle dépend-il des conditions initiales ?
8. Dans le cas général, calculer la période T_C de ce cycle avec collage en fonction de ω et q_2.

L'étude précédente peut servir de modèle au fonctionnement d'un patin de frein s'appuyant sur une roue en rotation, système pour lequel on désire savoir si l'alternance éventuelle de collage et de glissement nuit à son efficacité. On admettra que le travail de la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la masse sur le tapis entre $t = 0$ et $t = T$ peut s'écrire

$$W = \int_0^T \overrightarrow{F} \cdot (v_0 - \dot{X})\, \overrightarrow{e_x}\, dt$$

9. Calculer le travail W des forces de frottement exercées par la masse sur le tapis pendant un cycle du mouvement en distinguant les deux types de cycles (avec ou sans phase de collage). En déduire, pour chacun d'eux, la puissance moyenne correspondante et comparer les résultats. Quelle conclusion en tirez-vous ? Pourquoi cherche-t-on à éviter le collage ?

♫