

Oscillateurs amortis : régime libre

1. RLC parallèle* En orientant tous les courants vers le bas, on peut écrire la loi des nœuds sous la forme

$$i_R + i_L + i_C = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{u}{R} + i_L + C \frac{du}{dt} = 0$$

On dérive une fois par rapport au temps pour faire apparaître le di_L/dt qui pourra être remplacé par u/L , de sorte que

$$\boxed{\frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} + C \frac{d^2u}{dt^2} = 0} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0}$$

On peut identifier grâce à l'écriture canonique

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \times 10^{-7}}} = 10^4 \text{ rad/s} \\ Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 10^4 \times \sqrt{\frac{10^{-7}}{10^{-1}}} = 10 \end{cases}$$

On a donc affaire à un régime oscillant amorti puisque $Q > 1/2$, de sorte que la solution puisse s'écrire

$$u(t) = e^{-\omega_0 t/2Q} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On calcule alors $\frac{du}{dt} = e^{-\omega_0 t/2Q} \left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} A + B\Omega \right) \cos(\Omega t) + \left(-\frac{\omega_0}{2Q} B - A\Omega \right) \sin(\Omega t) \right]$

Les conditions initiales sont reliées (via la relation du condensateur) à q_0 et i_0 via (ATTENTION : i_0 est le courant dans la bobine)

$$u(0) = \frac{q_0}{C} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(0) = \frac{-i_0 - u(0)/R}{C} = \frac{-i_0 - q_0/RC}{C}$$

Or les expressions temporelles prises en $t = 0$ donne que

$$u(0) = A \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q} A + B\Omega$$

De sorte qu'on en déduit

$$\boxed{A = \frac{q_0}{C} \quad \text{et} \quad B = \frac{\frac{-i_0 - q_0/RC}{C} + \frac{\omega_0}{2Q} A}{\Omega} = \frac{\frac{-i_0 - q_0/RC}{C} + \frac{\omega_0}{2Q} \frac{q_0}{C}}{\Omega}}$$

2. Histoires de ressorts* None available

3. Vu en TP*

- La tension tend vers E_0 quand t tend vers l'infini, ce qui permet de mesurer aux alentours de $t = 9$ s,

$$\boxed{E_0 = 1 \text{ V}}$$

La pseudo-pulsation ω s'obtient à travers de la mesure la pseudo-période T des oscillations. On obtient sans peine par lecture du temps séparant le premier maximum du cinquième

$$\boxed{\Delta t = 4 \text{ s} = 4 T \quad \text{d'où} \quad T = 1 \text{ s} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 6,3 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Déterminons à présent λ . Si l'on note t_0 l'instant où se produit le premier maximum, alors le $n + 1^{\text{e}}$ maximum se produit en $t = t_0 + nT$. De plus, on isole

$$u(t_0) - E_0 = -e^{-\lambda t_0} \cos(\omega t_0)$$

$$u(t_0 + nT) - E_0 = -e^{-\lambda(t_0 + nT)} \cos(\omega t_0 + 2\pi n) = -e^{-\lambda(t_0 + nT)} \cos(\omega t_0)$$

d'où
$$\delta = \ln \left(\frac{u(t_0) - E_0}{u(t_0 + nT) - E_0} \right) = \ln \left(\frac{e^{-\lambda t_0}}{e^{-\lambda(t_0 + nT)}} \right) = n \lambda T$$

En mesurant les différents maxima et en traçant $\delta = f(n)$, on obtient une droite de pente λT et une régression linéaire donne

$$\lambda = 0,67 \text{ s}^{-1}$$

2. Le régime oscillant étant peu amorti, on peut écrire¹ que

$$\omega_0 \approx \omega = 6,3 \text{ rad.s}^{-1}$$

Par définition, $\frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$, d'où

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = 4,7$$

3. On observe bien 7 oscillations d'amplitudes appréciables, ce qui confirme une valeur de Q de quelques unités.

4. Mesure de viscosité* None available

5. Étincelle de rupture** Cet exercice est vraiment classique et caractéristique de la résolution de ce type de problème.

1. Pour étudier la tension $u(t)$, il faut tout d'abord chercher sa loi d'évolution. La loi des mailles donne

$$E_0 = u + L \frac{di}{dt} + R i$$

En remplaçant le courant à l'aide de la relation du condensateur $i = C \frac{du}{dt}$, on obtient finalement

$$E_0 = u + LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt}$$

Ou encore, pour le mettre sous une forme reconnaissable,

$$\frac{E_0}{LC} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC}$$

À partir de là, on peut soit refaire la recherche complète de solution telle qu'elle est faite dans le cours, soit utiliser ledit cours pour aller plus vite. On peut tout de même discuter des régimes qui se présentent. On sait que le régime choisi par le système dépend fortement de deux temps caractéristiques :

- le temps d'amortissement $\tau_{\text{am}} = L/R$;
- et le temps d'oscillation $\tau_{\text{osc}} = \sqrt{LC}$.

Si l'un est beaucoup plus petit que l'autre, alors c'est son régime qui domine : si les oscillations se font sur un temps court, il y en a beaucoup avant que l'amortissement se fasse sentir.

Posons
$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

1. En fait, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2} \approx \omega$ pour $\omega \gg \lambda$, ce qui est le cas.

L'équation se réécrit
$$\omega_0^2 E_0 = \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u$$

La solution particulière est évidemment $u_p = E_0$. Cherchons la solution de l'équation homogène sous la forme Ae^{rt} . Il faut alors que r vérifie

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Comme $\lambda = 500 \text{ s}^{-1} \ll \omega_0 = 5.10^8 \text{ s}^{-1}$, on a

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2 \quad \text{d'où} \quad r = -\lambda \pm i\omega_0$$

La solution générale de l'équation différentielle peut donc s'écrire comme

$$u(t) = E_0 + [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)] e^{-\lambda t}$$

À $t = 0^-$, la tension aux bornes de l'interrupteur/condensateur est nulle alors que le courant vaut $i = E_0/R$. Comme à la fois la tension aux bornes du condensateur et le courant dans la maille (du fait de l'inductance) sont continus, on a les conditions initiales

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad i(0) = \frac{E_0}{R}$$

Comme $i = C \frac{du}{dt}$,

$$\begin{cases} 0 = E_0 + A \\ \frac{E_0}{R} = -C\lambda A + C\omega_0 B \approx C\omega_0 B \end{cases}$$

On a donc directement l'expression de la tension sous la forme

$$u(t) = E_0 [1 - \cos(\omega_0 t) e^{-\lambda t}] + \frac{E_0}{RC\omega_0} \sin(\omega_0 t) e^{-\lambda t}$$

Le premier terme varie entre 0 et $2E_0 = 80 \text{ V}$ et ne peut donc pas être responsable du dépassement du potentiel de rupture. Le second en revanche peut varier entre $-E_0/RC\omega_0$ et $E_0/RC\omega_0 = 2.10^7 \text{ V}$. La décroissance étant très lente devant les oscillations, on dépasse très rapidement les 1000 V.

On pouvait bien sûr chercher la solution aussi sous la forme

$$u(t) = E_0 + A e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

comme dans le cours². On a alors le système

$$\begin{cases} 0 = E_0 + A \cos \varphi \\ \frac{E_0}{R} = -C A \lambda \cos \varphi - C A \omega_0 \sin \varphi \approx -C A \omega_0 \sin \varphi \end{cases}$$

d'où
$$\tan \varphi = \frac{1}{RC\omega_0} = 5.10^5 \quad \text{et} \quad A = -\frac{E_0}{\cos \varphi} = 2.10^7 \text{ V}$$

Comme φ est très proche de $\pi/2$, il faut prendre garde à ne pas l'approximer à seulement trois chiffres significatifs, sans quoi on perd la proximité de 0 du $\cos \varphi$ primordiale pour estimer A correctement. En effet,

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{1}{\tan \varphi} = 2.10^{-6} \quad \text{donc} \quad \varphi \approx \frac{\pi}{2} - 2.10^{-6}$$

ce qui signifie que l'on connaît la valeur de φ au sixième chiffre après la virgule près, ce qu'il faut donc garder pour avoir la bonne valeur de $\cos \varphi$ (ou garder dans la calculatrice).

2. En prenant garde néanmoins que les conditions initiales ne sont pas les mêmes.

2. Comme la valeur maximale à 20 MV est atteinte pour $\omega_0 t = \pi/2$, la valeur de rupture de 1000 V est atteinte pour $\omega_0 t \ll 1$ (ce qui implique $\lambda t \ll 1$), on peut donc développer au premier ordre les expressions suivantes

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t \quad \cos(\omega_0 t) \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin(\omega_0 t) \approx \omega_0 t$$

Ainsi,
$$u(t) \approx E_0 (1 - (1 - \lambda t)) + \frac{E_0}{RC\omega_0} \omega_0 t (1 - \lambda t) \approx \frac{E_0}{RC} t$$

en négligeant λ devant $1/RC$ et les termes en $(\omega_0 t)^2$. En ce qui concerne le courant, il faudrait tout développer jusqu'à l'ordre 2 en $\omega_0 t$ et ne négliger a priori aucun terme pour ne pas perdre en précision. Cette méthode étant un peu calculatoire³, on va en utiliser une un peu plus subtile⁴ en généralisant le concept d'approximation affine. En maths⁵, vous montrerez que l'on peut approximer, avec $\varepsilon \ll 1$,

$$f(\varepsilon) \approx f(0) + f'(0)\varepsilon + \frac{f''(0)}{2}\varepsilon^2$$

Appliquons ce principe au courant $i(t)$ en développant par rapport au temps⁶

$$i(t) \approx i(0) + \frac{di}{dt}(0)t + \frac{d^2i}{dt^2}(0)\frac{t^2}{2}$$

On a déjà vu que $i(0) = E/R$. À l'aide de la tension au borne de la bobine, on a accès à $\frac{di}{dt}(0)$. Puisque $u_C(0) = 0$ et $u_R(0) = Ri(0) = E$, on en déduit que

$$L \frac{di}{dt}(0) = E - u_R(0) - u_C(0) = 0$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la dérivée seconde du courant que l'on peut atteindre via

$$\begin{aligned} \frac{d^2i}{dt^2}(0) &= \frac{1}{L} \frac{du_L}{dt}(0) = \frac{1}{L} \frac{d}{dt}(E - u_R - u_C)(0) \\ &= -\frac{1}{L} \frac{du_R}{dt}(0) - \frac{1}{L} \frac{du_C}{dt}(0) = -\frac{R}{L} \frac{di}{dt}(0) - \frac{1}{L} \frac{1}{C} \frac{E}{R} \\ \frac{d^2i}{dt^2}(0) &= -\frac{E}{RLC} = -\frac{E}{R} \omega_0^2 \end{aligned}$$

Au final,

$$i(t) = i_0 (1 - bt^2) \quad \text{avec} \quad i_0 = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad b = \frac{\omega_0^2}{2}$$

6. Échelon de courant sur RLC parallèle* None available.

7. Décrément logarithmique*

1. La tension du ressort qui s'écrit $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$ et la force de frottement $\vec{f} = -h\dot{x}\vec{e}_x$ sont les deux seules forces s'exerçant suivant l'axe horizontale (le poids et la réaction du support se compensant selon la verticale). La projection de la RFD selon l'axe horizontal $\vec{e}_x$ donne alors

$$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) - h\dot{x}$$

La position d'équilibre est telle que la vitesse et l'accélération est nulle, soit

3. Mais faisable, par exemple avec Maple et sa commande **series**.

4. Qu'on aurait aussi pu appliquer pour $u(t)$.

5. Il s'agit du cours sur les développements limités.

6. Normalement, il faudrait développer par rapport à la variable $\omega_0 t \ll 1$, mais comme on sait déjà que cela va marcher, on peut se permettre de développer par rapport à une variable dimensionnée.

$$0 = -k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \quad \text{soit} \quad \ell_{\text{eq}} = \ell_0$$

En définissant $x(t) = \ell(t) - \ell_{\text{eq}} = \ell(t) - \ell_0$, on obtient l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

soit bien

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{h}{2\sqrt{km}}$$

2. (a) Le régime est pseudo-périodique si le discriminant du trinôme caractéristique est négatif, soit

$$\Delta = (2\xi\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\xi < 1}$$

| ξ joue ici le rôle du facteur d'amortissement m vu en SI.

- (b) Attention, l'énoncé note ici ω la pulsation notée Ω dans le cours. Elle vaut, en adaptant le cours,

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

La solution générale de l'équation homogène obtenue précédemment peut alors s'écrire

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Le fait que $x(0)$ soit nul impose naturellement que le cosinus soit en fait un sinus pur (qui s'annule en 0), soit

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t)$$

Reste à calculer la vitesse pour appliquer la seconde condition initiale. On a à tout temps t que

$$\dot{x}(t) = A e^{-\xi\omega_0 t} (-\xi\omega_0 \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t))$$

soit, en regardant ce qu'elle doit valoir à $t = 0$,

$$v_0 = A\omega \quad \text{d'où l'on tire} \quad A = \frac{v_0}{\omega}$$

Ainsi,

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t)}$$

- (c) Calculons $x(t + nT) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\xi\omega_0(t+nT)} \sin(\omega t + n\omega T) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\xi\omega_0 t} e^{-n\xi\omega_0 T} \sin(\omega t)$

puisque $n\omega T = n \times 2\pi$ par définition de la pseudo-période T comparée à la pseudo-pulsation ω . Calculons à présent le décrément logarithmique à partir de la définition fournie :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+nT)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\frac{v_0}{\omega} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t)}{\frac{v_0}{\omega} e^{-\xi\omega_0 t} e^{-n\xi\omega_0 T} \sin(\omega t)} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln(e^{n\xi\omega_0 T}) \\ &= \frac{1}{n} \times n\xi\omega_0 T \\ &= \xi\omega_0 \times \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

- (d) La pseudo-période correspond au temps passé entre deux annulations successives dans le même sens, c'est-à-dire 2,4 carreaux sur l'oscillogramme, soit 2,4 s puisqu'il y a une seconde par division horizontale.

Calculons en outre le décrétement logarithmique entre le premier maximum (à 4 divisions de hauteur) et le second (à 0,7 divisions de hauteur) situé environ une pseudo-période plus loin. On a alors $\delta = \ln(4/0,7) = 1,7$. On peut en déduire, en inversant la relation entre δ et ξ , que

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0,27$$

| Comme on a $\xi^2 \ll 1$, on aurait pu simplement dire que $\delta \approx 2\pi\xi$, soit $\xi = \delta/2\pi = 0,28$.

Finalement, la connaissance de ξ et T (donc ω) permet de remonter à ω_0 et finalement à k :

$$k = m\omega_0^2 = m \frac{\omega^2}{1 - \xi^2} = \frac{4\pi^2 m}{T^2 (1 - \xi^2)} = 3,7 \text{ N.m}^{-1}$$

8. Configuration de Wien avec deux bobines**

1. Le courant est continu dans les deux bobines. Par conséquent, il reste nul dans toutes les branches grâce à la loi des nœuds. Ainsi,

$$u(0^+) = R i_R(0^+) = R [i(0^+) - i_L(0^+)] = R [i(0^-) - i_L(0^-)] = 0$$

La nullité de tous les courants permet d'affirmer que la tension aux bornes de la bobine supérieure vaut E . Ainsi, en dérivant la loi des nœuds,

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt}(0^+) &= \frac{di_L}{dt}(0^+) + \frac{di_R}{dt}(0^+) \\ \frac{E}{L} &= \frac{u(0^+)}{L} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}(0^+) \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{RE}{L}$$

2. En régime permanent, les bobines sont équivalentes à des fils, donc

$$u(\infty) = 0$$

En régime permanent, plus rien ne varie et on a automatiquement

$$\frac{du}{dt}(\infty) = 0$$

3. La loi des mailles donne $E = ri + L \frac{di}{dt} + u$

En exprimant la loi des nœuds, on obtient

$$i = i_R + i_L \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L}$$

Il faut donc faire apparaître $\frac{di}{dt}$ partout, ce que l'on peut faire en dérivant la loi des mailles précédente

$$0 = r \frac{di}{dt} + L \frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} \right) + \frac{du}{dt} = r \left(\frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} \right) + L \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} \right) + \frac{du}{dt}$$

En rassemblant les termes de même ordre, il vient bien

$$\boxed{\frac{L}{R} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(2 + \frac{r}{R} \right) \frac{du}{dt} + \frac{r}{L} u = 0}$$

4. On sait que $\left[\frac{L}{R} \right] = T$, ainsi

$$\begin{aligned} \left[\frac{L}{R} \frac{d^2 u}{dt^2} \right] &= T \times \frac{[u]}{T^2} = \frac{[u]}{T} \\ \left[\left(2 + \frac{r}{R} \right) \frac{du}{dt} \right] &= 1 \times \frac{[u]}{T} \\ \left[\frac{r}{L} u \right] &= \frac{1}{T} \times [u] = \frac{[u]}{T} \end{aligned}$$

L'équation proposée est bien homogène.⁷

5. Pour identifier les paramètres canoniques, il est nécessaire de mettre l'équation sous la bonne forme, c'est-à-dire avec un coefficient 1 sur la plus haute dérivée, soit

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \left(2 + \frac{r}{R} \right) \frac{du}{dt} + \frac{Rr}{L^2} u = 0$$

On identifie ainsi

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \left(2 + \frac{r}{R} \right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{Rr}}{L}}$$

et comme $\frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\sqrt{Rr}}{2R + r}}$$

6. La condition d'oscillation s'écrit

$$\lambda < \omega_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{2R + r < 2\sqrt{Rr}}$$

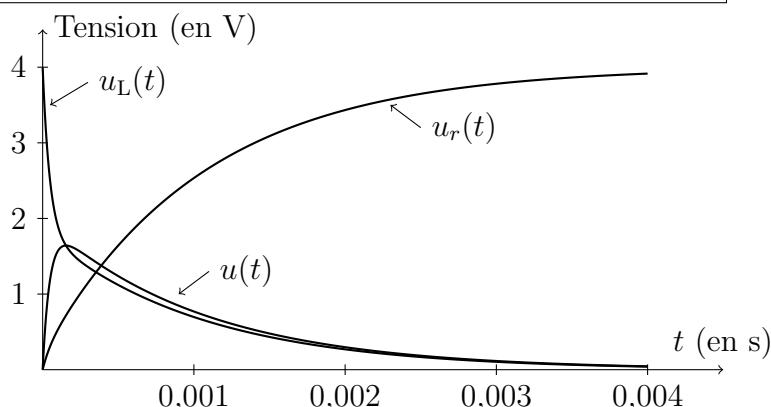
7. Voyons ce qu'il se passe avec des composants usuels : $\lambda < \omega_0$

$$\begin{aligned} \iff 2R + r &< 2\sqrt{Rr} \\ \iff R + R - 2\sqrt{Rr} + r &< 0 \\ \iff R + (\sqrt{R} - \sqrt{r})^2 &< 0 \end{aligned}$$

Or, une somme de deux positifs ne pourra jamais être négative. Si l'on s'autorise des résistances négatives, il faudra prendre à la fois r et R négatifs pour garder $\omega_0^2 > 0$, mais dans ce cas, on obtient $\lambda < 0$, ce qui va à l'encontre des hypothèses du cours (le régime n'est plus amorti mais au contraire exponentiellement croissant !)

Même avec des résistances négatives, on ne peut pas obtenir le régime pseudo-périodique.

8. Les premières questions on montré que $u(0) = u(\infty) = 0$. La fonction $u(t)$ est donc la seule qui part initialement de 0 et y revient à l'infini. Initialement, la bobine supérieure fait office de coupe-circuit. La tension $u_r(0)$ est donc nulle puisque le courant qui la traverse l'est. u_r est donc la seconde fonction qui part de 0. Par élimination, il ne reste plus que $u_L(t)$.



7. Vous en doutiez vraiment ?

9. À l'infini⁸, les deux bobines sont des fils : toute la tension se retrouve aux bornes de r et donc

$$E = u_r(\infty) = 4 \text{ V}$$

On a montré précédemment que $\frac{du}{dt}(0) = \frac{RE}{L}$. En mesurant la pente de la tangente à l'origine de $u(t)$, valant à peu près $\frac{4}{0,0001} = 4.10^4 \text{ V.s}^{-1}$, on trouve

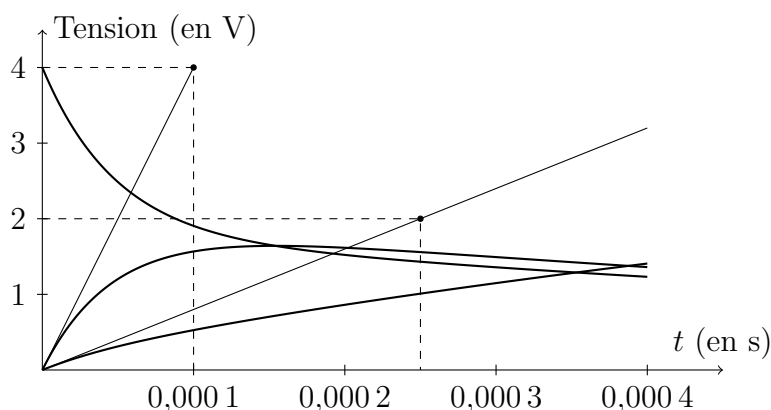
$$R = \frac{L}{E} \times \text{pente} = \frac{0,1 \times 4.10^4}{4} = 1.10^3 \Omega$$

Il reste à trouver un lien avec r . En cherchant du côté de u_r et plus précisément de sa dérivée à l'origine, il vient

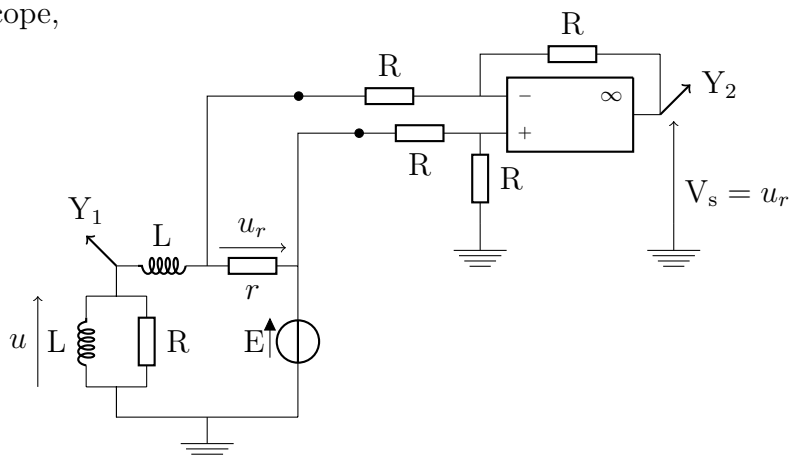
$$\frac{du_r}{dt}(0) = r \frac{di}{dt}(0) = \frac{r}{L} u_L(0) \approx \frac{2}{0,00025} = 8.10^3 \text{ V.s}^{-1}$$

Comme $u_L(0) = E = 4 \text{ V}$, on en déduit

$$r = \frac{L}{E} \text{ pente}' = \frac{0,1 \times 8.10^3}{4} = 2.10^2 \Omega$$



10. L'oscilloscope ne peut représenter que la tension entre un point donné du circuit et la masse. Cela ne pose aucun problème pour visualiser $u(t)$ puisque la base de l'ensemble (R, L) est confondue avec la borne inférieure du générateur qui définit la masse. En revanche, on ne peut pas visualiser u_r (qui donne l'allure de i au facteur r près) par cette méthode car aucune de ses bornes n'est confondue avec la masse. En revanche, la sortie du montage soustracteur, si elle est mesurée par rapport à la masse, permet de faire une différence entre les potentiels des deux entrées, que l'on peut alors brancher aux deux bornes de la résistances r . Le montage devient alors, en notant Y_1 et Y_2 les deux voies de l'oscilloscope,

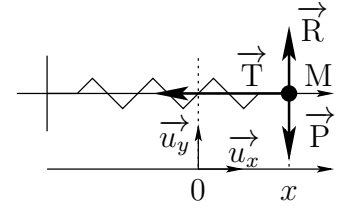


8. On pouvait aussi dire que $u_L(0) = E$ puisque la bobine supérieure se comporte comme un coupe-circuit dans la maille principale et concentre donc toute sa tension.

9. Extrait ENSTIM 2009**

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, le point M est soumis à son poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$ et la tension du ressort $\vec{T} = -k x \vec{u}_x$. La relation fondamentale projetée sur $\vec{u}_x$ donne

$$m \ddot{x} + kx = 0$$



2. La solution générale de cette équation s'écrit

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On en déduit

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on obtient le système

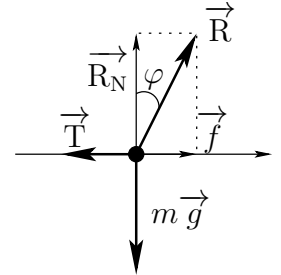
$$x_0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A \quad \text{et} \quad v_0 = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = B\omega_0$$

soit

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

3. Si la masse se déplace vers la gauche, la réaction tangentielle est dirigée vers la droite. Comme il n'y a pas de mouvement suivant la verticale, la réaction normale compense le poids $R_N = mg$. Or la réaction est la somme vectorielle de la réaction normale et de la réaction tangentielle (force de frottement). D'après le schéma, on a alors

$$\tan \varphi = \frac{f}{mg}$$



4. M démarre si le module de la tension du ressort est supérieure ou égale à f donc si $|x_0| > f/k$. L'équilibre final aura lieu dès que M s'arrêtera (vitesse nulle) pour la première fois dans la zone telle que $|x_{eq}| < f/k$; il ne pourra alors plus redémarrer.
5. La force de frottement est toujours **opposée** au déplacement, c'est-à-dire à la vitesse. Si on se déplace vers la droite, $\dot{x} > 0$ et $\vec{f} = -f \vec{u}_x$, sinon $\dot{x} < 0$ et $\vec{f} = f \vec{u}_x$. Dans tous les cas, $\vec{f} = -\varepsilon f \vec{u}_x$. La projection du PFD sur Ox donne alors

$$m \ddot{x} + kx + \varepsilon f = 0$$

6. Dans le cas où x_0 est suffisamment grand, on a $x_0 > f/k$. La masse démarre son mouvement vers la gauche et $\varepsilon = -1$ dans ce cas. La RFD s'écrit alors

$$m \ddot{x} + kx = f$$

de solution générale

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{f}{k}$$

En appliquant les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, il vient

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{f}{k} (1 - \cos \omega_0 t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = \left(\frac{f}{k} - x_0 \right) \omega_0 \sin \omega_0 t$$

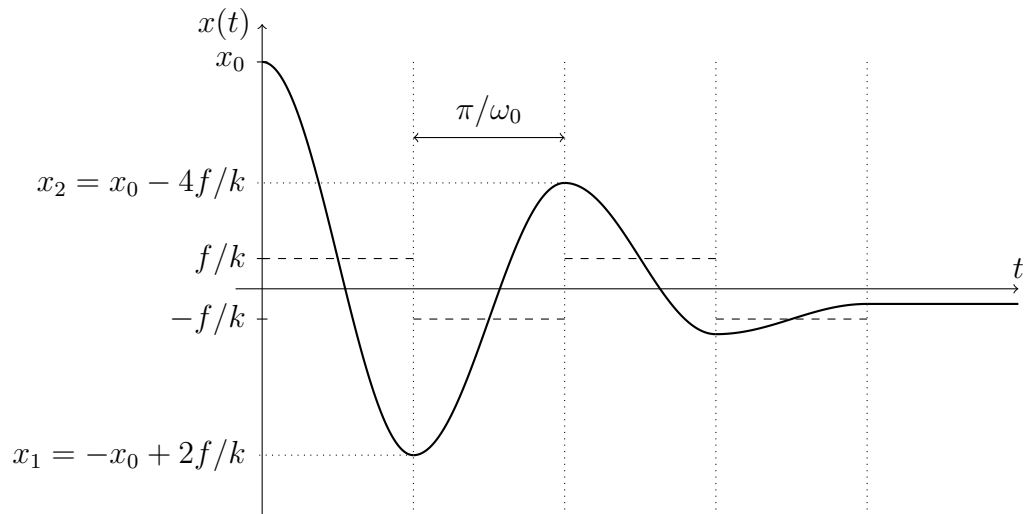
La solution est valable tant que $\dot{x}(t) \leq 0$, à savoir jusqu'à $t = \pi/\omega_0$ où la particule s'arrête et l'équation différentielle change. Le point d'arrêt est alors

$$x_1 = -x_0 + \frac{2f}{k}$$

7. De x_1 à x_2 , l'équation différentielle vérifiée par le mobile est

$$m\ddot{x} + kx = -f$$

La résolution avec les conditions initiales $x(t_1) = -x_0 + 2f/k$ et $\dot{x}(t_1) = 0$ donne un mouvement de même période mais d'amplitude plus faible centré sur $-f/k$ (au lieu de f/k). Le phénomène se répète jusqu'à ce que l'annulation de la vitesse se fasse pour $x \in [-f/k; f/k]$ et que le système se bloque dans une situation d'équilibre.



Le mouvement est pseudo-périodique, car on ne retrouve pas les valeurs identiques au bout d'une période, l'amplitude diminue au cours du mouvement du fait des frottements. Il y a quand même des oscillations d'où le nom «pseudo-périodique». La période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

10. Oscillateur amorti et portrait de phase**

1. Les forces s'exerçant sur la masse sont

- La tension du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x = -kx \vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x$ vers la droite.
- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z$ vers le haut
- La réaction normale $\vec{N} = \|\vec{N}\| \vec{e}_z$.
- La force de frottement $\vec{f} = f \vec{e}_x$ avec $f \times \dot{x} < 0$, ce qui peut aussi s'écrire $\varepsilon \|\vec{f}\| \vec{e}_x$, ce qui donne bien $\vec{f} \cdot \vec{v} = \varepsilon \|\vec{f}\| \vec{e}_x \cdot \dot{x} \vec{e}_x = \varepsilon \dot{x} \|\vec{f}\| < 0$ par définition de ε .

Plaçons-nous à l'équilibre (tel que $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$), la RFD projetée suivant $\vec{e}_x$ s'écrit

$$0 = -kx + \varepsilon \|\vec{f}\| \quad \text{soit} \quad |x| = \frac{\|\vec{f}\|}{k}$$

Comme on se trouve dans le cas statique, on a $\|\vec{f}\| \leq \mu \|\vec{N}\| = \mu mg$ puisque la réaction normale et le poids doivent se compenser suivant la verticale. Ainsi,

$$|x| \leq \frac{\mu mg}{k} = b \quad \text{soit} \quad x \in \left[-\frac{\mu mg}{k}; \frac{\mu mg}{k} \right]$$

2. Comme il n'y a toujours pas de mouvement suivant la verticale, on a toujours $\|\vec{N}\| = \|\vec{P}\| = mg$, d'où $\|\vec{f}\| = \mu \|\vec{N}\| = \mu mg$. La projection suivant l'axe horizontal donne cette fois

$$m\ddot{x} = -kx + \varepsilon \|\vec{f}\| \quad \text{soit} \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = \varepsilon \mu mg}$$

3. (a) Quand $\varepsilon = 1$, on a $\dot{x} < 0$ (pour que $\varepsilon \dot{x} < 0$), soit un mouvement vers la gauche. L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \mu g$$

de solution particulièrement $\mu mg/k = b$ et donc de solution générale

$$x_1(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + b \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'application des deux conditions initiales se fait sans peine pour trouver

$$\boxed{x_1(t) = b + (X_1 - b) \cos \omega_0 t}$$

(b) Quand $\varepsilon = -1$, on a $\dot{x} > 0$ (pour que $\varepsilon \dot{x} < 0$), soit un mouvement vers la droite. L'équation différentielle est toujours celle d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = -\mu g$$

de solution particulièrement $-\mu mg/k = -b$ et donc de solution générale

$$x_2(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - b \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

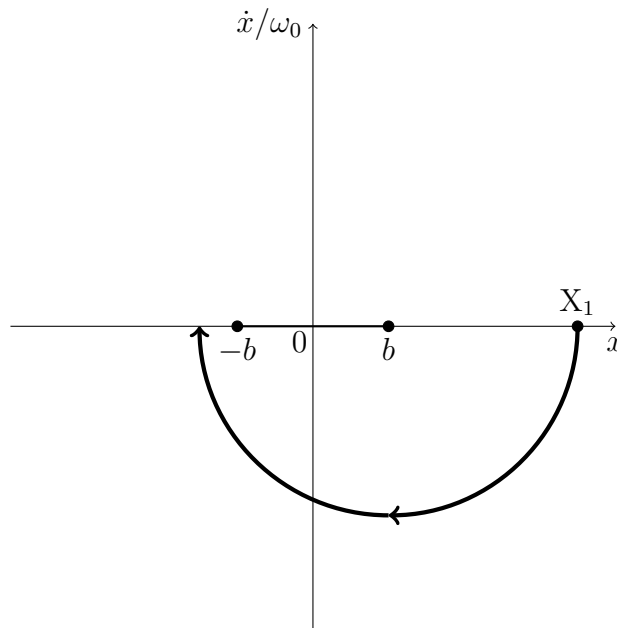
L'application des deux conditions initiales se fait à nouveau sans peine pour trouver

$$x_2(t) = -b + (X_2 + b) \cos \omega_0 t$$

4. (a) On remarque que

$$x_1(t) - b = (X_1 - b) \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad \frac{\dot{x}_1}{\omega_0} = -(X_1 - b) \sin \omega_0 t$$

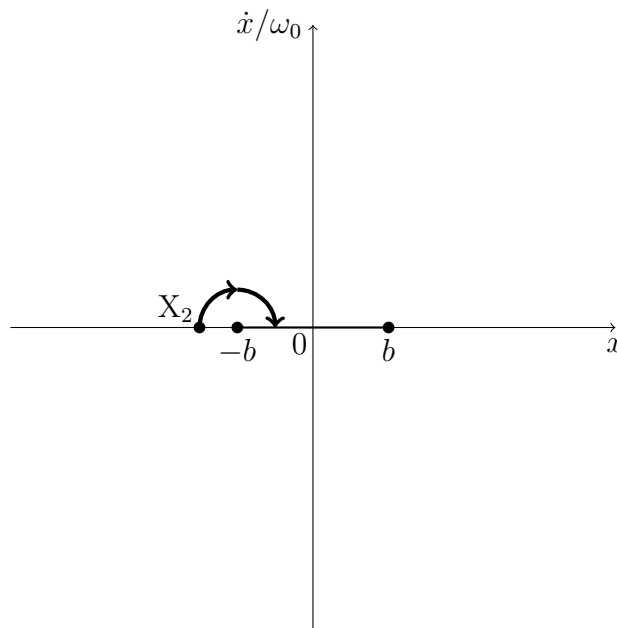
Il s'agit de l'équation paramétrique d'un cercle (pensez à la manière de parcourir le cercle trigonométrique) de rayon $X_1 - b$, de centre $(b, 0)$ et parcouru dans le sens horaire (à cause du moins) tant que la vitesse est bien négative (soit jusqu'à ce que $\omega_0 t$ vaille π)



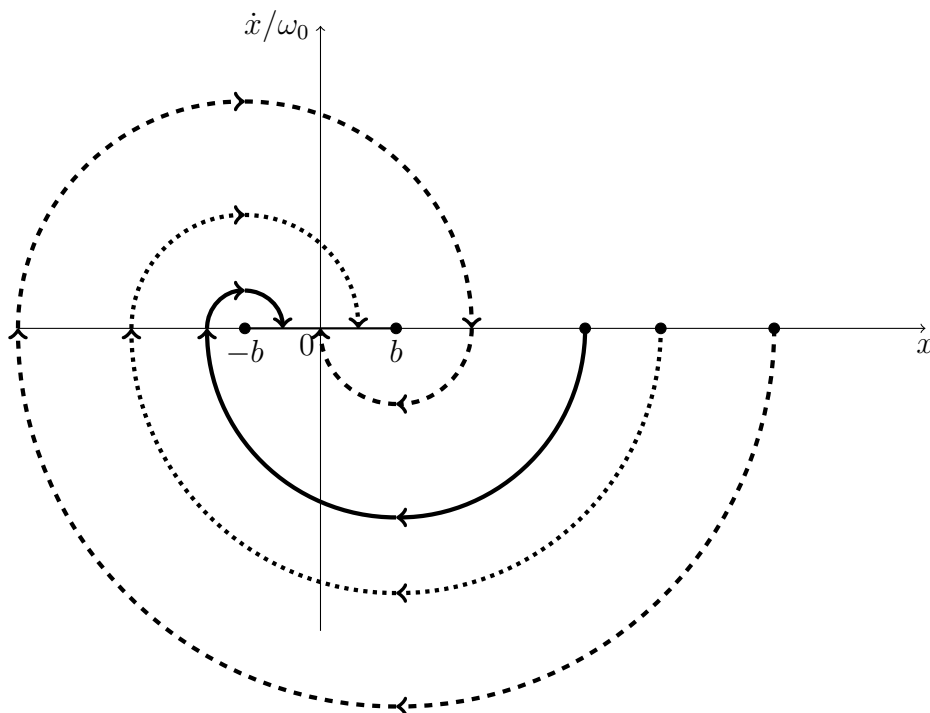
(b) On remarque de même que

$$x_2(t) + b = (X_2 + b) \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad \frac{\dot{x}_2}{\omega_0} = -(X_2 + b) \sin \omega_0 t$$

Il s'agit encore de l'équation paramétrique d'un cercle (pensez à la manière de parcourir le cercle trigonométrique) de rayon $|X_2 + b|$, de centre $(-b, 0)$ et toujours parcouru dans le sens horaire (toujours à cause du moins) tant que la vitesse est bien positive (soit jusqu'à ce que $\omega_0 t$ vaille π puisque $X_2 + b$ est négatif)



- (c) On peut donc faire les constructions graphiques dans le plan de phase pour diverses conditions initiales :



Tant que l'on traverse l'axe des abscisses en dehors de l'intervalle $[-b; b]$, on fait des demi-cercles tantôt centrés sur $(b, 0)$ (demi-cercle vers le bas), tantôt centrés sur $(-b, 0)$ (demi-cercle « retour » vers le haut). À partir du moment où le mobile s'arrête dans la zone où il peut y avoir équilibre, il y reste « collé » puisqu'il y arrive avec une vitesse nulle et du coup la force de frottement résiduelle peut tout juste compenser la tension du ressort : plus rien ne bouge à partir de là.

11. Pendule élastique dans un liquide**

- On fait le bilan des forces s'exerçant sur la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

— $\vec{P} = mg \vec{u}_x$, le poids ;

- $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$, la force de rappel élastique ;
- $\vec{F} = -h \vec{v}$, la force de frottement fluide.

D'après la deuxième loi de Newton $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}$. En projection sur $\vec{u}_x$ à l'équilibre,

$$mg - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0$$

En remplaçant mg dans la RFD, $-k(\ell - \ell_{\text{eq}}) - h \dot{x} = m \ddot{x}$

Avec $x = \ell - \ell_{\text{eq}}$, on obtient donc

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

2. En utilisant les paramètres définis dans l'énoncé⁹, l'équation s'écrit

$$\ddot{x} + 2\lambda\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le discriminant de l'équation caractéristique vaut alors $\Delta = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1)$. On distingue trois cas selon le signe du discriminant,

- si $\lambda > 1$ alors le régime est **apériodique** ;
- si $\lambda = 1$ alors le régime est **apériodique critique** ;
- si $\lambda < 1$ alors le régime est **pseudopériodique amorti**.

3. Les applications numériques donnent

(a)
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 31,4 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,20 \text{ s}$$

(b) Le facteur de qualité est défini tel que le terme devant $\dot{x}$ vaille ω_0/Q , d'où $2\lambda\omega_0 = \omega_0/Q$ et donc

$$\lambda = \frac{h}{2m\omega_0} = 0,50 \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2\lambda} = 1,0$$

(c) D'après ce qui précède, le régime est **pseudopériodique amorti** de pseudopulsation et pseudopériode

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2} = 27,2 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0,23 \text{ s}$$

(d) La solution générale de l'équation s'écrit¹⁰

$$x(t) = e^{-\lambda\omega_0 t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

(e) Pour utiliser les conditions initiales, il nous faut encore l'expression de la vitesse $\dot{x}$ qui s'écrit¹¹

$$\dot{x}(t) = e^{-\lambda\omega_0 t} [(\Omega B - \lambda\omega_0 A) \cos \Omega t + (-\Omega A - \lambda\omega_0 B) \sin \Omega t]$$

Les conditions initiales $x(0) = b$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent alors

$$A = b \quad \text{et} \quad B = \frac{\lambda\omega_0}{\Omega} A$$

9. Attention, la définition de λ est différente de celle du cours !

10. En n'oubliant pas la définition adimensionnée de λ .

11. En n'oubliant pas de dériver le terme exponentiel...

(f) On obtient $A = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ et $B = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

(g) c'est-à-dire $x(t) = e^{-15,7t} [10 \cos(27,2t) - 6,0 \sin(27,2t)] \cdot 10^{-3}$

4. Étude énergétique.

- (a) La variation d'énergie mécanique d'un point matériel M est égale au travail W_{nc} des forces non conservatives qui s'exercent sur M.

$$\Delta E_m = W_{nc} \quad \text{ou encore} \quad \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

- (b) Il suffit de faire un bilan d'énergie. L'énergie dissipée par les frottement (seule force non conservative) vaut naturellement l'énergie mécanique perdue

$$E_{dis} = E_m(t=0) - E_m(t \rightarrow \infty) = - \Delta_{0 \rightarrow \infty} E_m$$

L'énergie mécanique à un instant t s'exprime, puisque $\vec{u}_x$ est orienté vers le bas, comme

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m v^2 - m g x + \frac{1}{2} k (x + \ell_e - \ell_0)^2$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad E_{dis} &= \left(0 - m g b + \frac{1}{2} k (b + \ell_e - \ell_0) \right) - \left(0 - 0 + \frac{1}{2} k (\ell_e - \ell_0)^2 \right) \\ &= -m g b + \frac{1}{2} k b^2 + k b (\ell_e - \ell_0) - \frac{1}{2} k (\ell_e - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} k (\ell_e - \ell_0)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$E_{dis} = \frac{1}{2} k b^2$$

car $m g = k (\ell_e - \ell_0)$

- (c) Le théorème de l'énergie mécanique entre $t=0$ et $t \rightarrow \infty$ donne alors

$$W(\vec{F}) = \Delta_{0 \rightarrow \infty} E_m = -E_{dis} = -\frac{1}{2} k b^2 = -0,49 \text{ J}$$

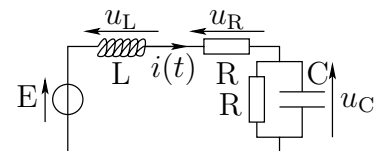
- (d) L'énergie dissipée, comme opposé du travail des frottement, peut se calculer directement à l'aide de l'expression de $\dot{x}(t)$ et en utilisant que $\lambda \omega_0 B + \Omega A = \omega_0^2 / \Omega = 2\omega_0 / \sqrt{3}$

$$E_{dis} = -W(\vec{F}) = - \int_{t=0}^{\infty} (-h \vec{v}) \cdot \vec{v} dt = - \int_{t=0}^{\infty} (-h v^2) dt = \frac{4h b^2 \omega_0^2}{3} \int_{t=0}^{\infty} e^{-2\lambda \omega_0 t} \sin^2 \Omega t dt$$

12. RLC en fuite!***

1. Le circuit étant ouvert à $t=0^-$ et le courant continu dans la bobine, on a

$$i(0) = 0$$



La tension étant continue aux bornes du condensateur initialement déchargé, on a $u_C(0) = 0$. Ainsi, la loi des mailles à $t=0^+$ donne

$$E = u_L(0^+) + u_R(0^+) + u_C(0^+) = L \frac{di}{dt}(0^+) + R i(0^+) + 0 = L \frac{di}{dt}(0^+) \quad \text{d'où} \quad \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$$

En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil alors que le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. L'ensemble se réduit donc à deux résistances R en série alimentées par un générateur de tension E , d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{2R}$$

2. La loi des nœuds donne, puisque u_C est aussi la tension de la résistance R en parallèle de C ,

$$i(t) = \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}$$

Or la loi des mailles appliquée à l'ensemble du circuit donne

$$E = u_L + u_R + u_C \quad \text{soit} \quad u_C = E - L \frac{di}{dt} - R i$$

En remplaçant,
$$i(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - i \right) + \left(-LC \frac{d^2 i}{dt^2} - RC \frac{di}{dt} \right)$$

d'où
$$\frac{E}{R} = LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R} \right) \frac{di}{dt} + 2 i$$

et sous forme canonique,
$$\boxed{\frac{E}{RLC} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i}$$

3. En identifiant avec la forme $\alpha = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i$, on en déduit sans peine

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{2LC}}{RC + L/R} = \frac{\sqrt{2xy}}{x+y} \quad \text{avec} \quad x = RC \quad \text{et} \quad y = \frac{L}{R}}$$

4. En dérivant Q vu comme une fonction de x , on obtient

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{2y}{2\sqrt{2xy}(x+y)} - \frac{\sqrt{2xy}}{(x+y)^2} = \frac{y(x+y) - 2xy}{\sqrt{2xy}(x+y)^2} = \frac{y(y-x)}{\sqrt{2xy}(x+y)^2}$$

La fonction $Q(x)$ est extrémale pour $x = y$ et comme elle est positive, s'annulant pour $x = 0$ et $x \rightarrow \infty$, c'est un maximum.

$$\boxed{Q \text{ est maximale pour } x = y \text{ et vaut alors } Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

5. Comme dans ce dernier cas $Q > 1/2$, la solution est de type oscillatoire amortie et admet $E/2R$ comme solution particulière. De plus, on a

$$2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} = \sqrt{2}\omega_0$$

$$\text{d'où} \quad \lambda = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} = \lambda = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L}$$

La solution peut donc s'écrire uniquement en fonction de λ sous la forme

$$i(t) = \frac{E}{2R} + e^{-\lambda t} (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t)$$

$$\text{soit} \quad \frac{di}{dt} = e^{-\lambda t} \lambda [(-A + B) \cos \lambda t + (-B - A) \sin \lambda t]$$

L'application des deux conditions initiales imposant $i(0)$ et $\frac{di}{dt}(0)$ donne le système

$$\begin{cases} 0 = \frac{E}{2R} + A \\ \frac{E}{L} = \lambda(B - A) \end{cases}$$

ce qui mène à

$$i(t) = \frac{E}{2R} [1 - e^{-\lambda t} (\cos \lambda t - \sin \lambda t)]$$

$$\text{car } \lambda = \frac{R}{L}$$

13. Circuit RLC semi-parallèle***

- Pour une tension continue de quelques volts, on choisira une **alimentation stabilisée**.
- Après fermeture de K :
 - u est continue aux bornes de C initialement déchargé donc $u(0) = 0$. De ce fait $i_2(0) = u(0)/r = 0$. Le courant étant continu dans la bobine et initialement nul, on a $i_1(0) = 0$. La loi des nœuds donne alors $i(0) = i_3(0)$ et la loi des mailles impose une tension E aux bornes de R. Au final,

$$i_1(0) = i_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad i(0) = i_3(0) = \frac{E}{R}$$

- En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et court-circuite la résistance r et le condensateur. Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i_3(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{R}$$

- Utilisons la loi des nœuds $i = i_1 + i_2 + i_3$

$$\frac{E - u}{R} = i_1 + \frac{u}{r} + C \frac{du}{dt}$$

$$\frac{E}{R} = i_1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) L \frac{di_1}{dt} + LC \frac{d^2 i_1}{dt^2} \quad \text{car } u = L \frac{di_1}{dt}$$

d'où

$$\frac{E}{R} \omega_0^2 = \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2\lambda \frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 i_1 \quad \text{avec } \lambda = \frac{R+r}{2RrC} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Régime oscillant amorti

- Pour être dans un régime pseudo-périodique amorti, il faut imposer $\lambda < \omega_0$, d'où

$$\frac{R+r}{2RrC} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(b) Applications numériques

$$\omega_0 = 7,1 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,89 \text{ ms} \quad \text{et} \quad \lambda = 6,0 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$$

$1/\lambda = 1,7 \text{ ms}$ représente le temps caractéristique d'amortissement. S'il est plus long que T_0 , le régime oscille avant de se stabiliser. S'il est plus court, le système n'a pas de temps d'amorcer la première oscillation avant d'être complètement amorti.

- (c) La pseudo-pulsation est la pulsation qui ressort de la solution générale oscillante amortie après résolution de l'équation caractéristique. La pseudo-période est la période associée. On obtient

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 7,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,89 \text{ ms}$$

À la précision des données, ces deux valeurs sont identiques respectivement à ω_0 et T_0 .

- (d) La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme d'une somme d'une solution particulière $i_{1p} = E/R$ et d'une solution homogène

$$i_1(t) = \frac{E}{R} + e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

La condition initiale $i_1(0) = 0$ impose $A = -E/R$. D'autre part, on a

$$0 = u(0) = L \frac{di_1}{dt}(0) \quad \text{d'où} \quad 0 = L(-\lambda A + \omega B)$$

Au final,

$$i_1(t) = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$$

Les autres grandeurs s'obtiennent successivement à l'aide des relations

$$u = L \frac{di_1}{dt} \quad i_2 = \frac{u}{r} \quad i_3 = C \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad i = \frac{E - u}{R}$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{LE\omega}{R} e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2} \right) \sin \omega t = \frac{LE\omega}{R} e^{-\lambda t} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \omega t \\ i_2(t) = \frac{LE\omega}{rR} e^{-\lambda t} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \omega t \\ i_3(t) = \frac{E}{R} e^{-\lambda t} \left(\cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) \\ i(t) = \frac{E}{R} \left[1 - \frac{L\omega_0^2}{R\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \right] \end{cases}$$

Numériquement, $u_{\max} \approx u(\pi/2\omega) = \frac{LE\omega}{R} e^{-\lambda\pi/2\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,30 \text{ V}$

5. Pour visualiser correctement l'amortissement, il est nécessaire de prendre un signal créneau dont la demi-période est plus longue que le temps d'amortissement, typiquement $5/\lambda$. Ainsi,

$$\frac{T_{\min}}{2} = \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{5}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad f_{\max} = \frac{\lambda}{10} = 60 \text{ Hz}$$

6. L'observation simultanée de u et i requiert de mettre la masse à la borne commune au condensateur et à la résistance R . Or le GBF impose que la masse soit à l'autre borne du condensateur. Pour le résoudre, il faut utiliser un **transformateur d'isolement** qui décorrèle l'alimentation en tension de la prise terre.

14. Inductance mutuelle de deux bobines****

1. M est homogène à une inductance et s'exprime donc en **henry**.
2. La puissance reçue par l'ensemble des deux bobines vaut

$$\mathcal{P} = u_1 i_1 + u_2 i_2 = L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right)$$

L'énergie emmagasinée par ce système est une primitive de la puissance, c'est-à-dire que $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$. Or, on peut écrire la puissance sous la forme

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L_1 i_1^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{L_2 i_2^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (M i_1 i_2)$$

En choisissant la primitive nulle lorsque $(i_1, i_2) = (0, 0)$, on obtient bien

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

3. On admet que $\mathcal{E} > 0$ à partir du moment où $i_1 \neq 0$ ou $i_2 \neq 0$. En se plaçant à chaque fois dans ce cas, alors

$$\text{— Si } i_1 = 0, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_2 > 0}$$

$$\text{— Si } i_2 = 0, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_1 > 0}$$

- En ajoutant le terme nul $\sqrt{L_1 L_2} i_1 i_2 - \sqrt{L_1 L_2} i_1 i_2$, on fait ressortir deux identités remarquables permettant d'écrire l'énergie sous les formes équivalentes

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\sqrt{L_1} i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 + (M + \sqrt{L_1 L_2}) i_1 i_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{L_1} i_1 + \sqrt{L_2} i_2)^2 + (M - \sqrt{L_1 L_2}) i_1 i_2$$

On considère deux cas :

- Si $\sqrt{L_1} i_1 = \sqrt{L_2} i_2$, alors i_1 et i_2 sont de même signe (donc $i_1 i_2 > 0$) et la positivité de la première forme impose

$$M + \sqrt{L_1 L_2} > 0 \quad \text{donc} \quad M > -\sqrt{L_1 L_2}$$

- Si $\sqrt{L_1} i_1 = -\sqrt{L_2} i_2$, alors i_1 et i_2 sont de signes opposés (donc $i_1 i_2 < 0$) et la positivité de la deuxième forme impose

$$M - \sqrt{L_1 L_2} < 0 \quad \text{donc} \quad M < \sqrt{L_1 L_2}$$

Par conséquent,

$$\boxed{|M| < \sqrt{L_1 L_2}}$$

4. Deux lois des mailles bien placées donnent le système différentiel

$$\begin{cases} e(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 \\ e(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \end{cases} \quad (1)$$

La première équation permet d'isoler $\frac{di_2}{dt}$ en fonction des autres paramètres du problème. Pour pouvoir le remplacer dans la seconde équation, on va la dériver une fois de plus

$$\begin{cases} M \frac{di_2}{dt} = e(t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 \\ \frac{de}{dt} = L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Après substitution, on obtient l'équation différentielle

$$R_2 e + (L_2 - M) \frac{de}{dt} = (L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \frac{di_1}{dt} + R_1 R_2 i_1$$

5. Le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène donnant $i_1(t)$ vaut

$$\Delta = (L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2) = (L_1 R_2 - L_2 R_1)^2 + 4 R_1 R_2 M^2 > 0$$

Le discriminant étant positif comme somme de deux carrés (on a bien sûr $R_1 R_2 > 0$), les solutions sont réelles et le régime est donc **apériodique**.

6. La fonction $i_1(t)$ étant continue en 0, $i_1(0^+) = 0$

On a de même $i_2(0^+) = 0$. En écrivant le système différentiel (1) pour $t = 0^+$, on trouve

$$\begin{cases} E_0 = L_1 \frac{di_1}{dt}(0^+) + M \frac{di_2}{dt}(0^+) \\ E_0 = L_2 \frac{di_2}{dt}(0^+) + M \frac{di_1}{dt}(0^+) \end{cases}$$

d'où

$$\frac{di_1}{dt}(0^+) = \frac{E_0 (L_2 - M)}{L_1 L_2 - M^2}$$

7. En posant $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L_2 = L$ et $M = k L$ avec $k \in]0; 1[$, l'équation différentielle se réécrit

$$\frac{E_0}{R} = i_1 + \frac{2L}{R} \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{L}{R}\right)^2 (1 - k^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

de solution particulière $i_1 = E_0/R$ et de solutions homogènes e^{rt} telles que

$$r^2 + \frac{2R}{L(1 - k^2)} r + \frac{R^2}{L^2(1 - k^2)} = 0$$

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$\Delta = \left(\frac{2R}{L(1 - k^2)}\right)^2 - 4 \frac{R^2}{L^2(1 - k^2)} = \left(\frac{2R}{L(1 - k^2)}\right)^2 k^2$$

Et ainsi,
$$r_{\pm} = -\frac{R}{L(1 - k^2)} \pm \frac{Rk}{L(1 - k^2)} = -\frac{R}{L(1 \pm k)} = -\frac{1}{\tau_{\pm}}$$

Le courant s'exprime donc comme

$$i_1(t) = \frac{E_0}{R} + A e^{-t/\tau_+} + B e^{-t/\tau_-}$$

avec pour conditions initiales

$$i_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{di_1}{dt}(0) = \frac{E_0}{L(1 + k)}$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} -\frac{E_0}{R} = A + B \\ \frac{E_0}{L(1+k)} = -A \frac{R}{L(1+k)} - B \frac{R}{L(1-k)} \end{cases}$$

d'où l'on déduit, puisque $k \neq 0$,

$$\begin{cases} A = -\frac{E_0}{R} \\ B = 0 \end{cases}$$

Au final

$$i_1(t) = \frac{E_0}{R} \left[1 - \exp\left(\frac{-Rt}{L(1+k)}\right) \right]$$

Même si l'énoncé attendait visiblement que l'on résolve l'équation différentielle du second ordre dans le cas particulier de l'égalité des branches, on aurait aussi pu remarquer que, par symétrie, on a $i_1 = i_2$, d'où

$$E_0 = (L + M) \frac{di_1}{dt} + R i_1$$

dont la solution avec condition initiale $i_1(0) = 0$ est exactement celle écrite plus haut et dont la recherche est beaucoup moins pénible.

15. Mouvement « glissé-collé »****

1. Dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ du référentiel terrestre supposé galiléen, la masse est soumise à deux forces verticales (poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$ et réaction normale $\vec{R}_n = R_n \vec{e}_z$) et deux forces horizontales (tension du ressort $\vec{T} = -kx \vec{e}_x$ et réaction tangentielle $\vec{R}_t = R_t \vec{e}_x$). La RFD selon x et z s'écrit

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -kx + R_t \\ m \ddot{z} = -mg + R_n \end{cases}$$

À l'équilibre, $-kx_{eq} + R_t = 0$ et $-mg + R_n = 0$

Comme le tapis est en mouvement par rapport à la masse, on a la relation $|R_t| = \mu_C |R_n|$, d'où

$$x_{eq} = \frac{\mu_C mg}{k} = \frac{\mu_C g}{\omega^2}$$

2. La masse ne passant pas au travers du tapis, il n'y a pas de mouvement selon z et l'on conserve la relation $R_n = mg$. Selon la valeur de $\dot{x} = \dot{X}$ relativement à v_0 , la masse a un mouvement relatif vers la droite ou vers la gauche par rapport au tapis, d'où

$$\vec{R}_t = \begin{cases} +\mu_C mg \vec{e}_x & \text{si } \dot{X} < v_0 \\ -\mu_C mg \vec{e}_x & \text{si } \dot{X} > v_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(le tapis entraîne la masse)} \\ \text{(le tapis freine la masse)} \end{array}$$

Si $\dot{X} < v_0$, $m \ddot{X} = m \ddot{x} = -kx + \mu_C mg = -m\omega^2 x + m\omega^2 x_{eq} = -m\omega^2 X$

d'où

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

Si $\dot{X} > v_0$, $m \ddot{X} = m \ddot{x} = -kx - \mu_C mg = -m\omega^2 x - m\omega^2 x_{eq} = -m\omega^2 X - 2m\omega^2 x_{eq}$

d'où

$$\ddot{X} + \omega^2 X = -2\omega^2 x_{\text{eq}}$$

Si $\dot{X} = v_0$, il peut y avoir une phase de collage ($\ddot{X} = 0$) à condition que l'on reste dans le cadre de la loi de Coulomb statique

$$\|\vec{R}_t\| = |kx| = k|X + x_{\text{eq}}| \leq \mu_S mg$$

d'où

$$X \geq X_1 = -\left(\frac{\mu_S}{\mu_C} + 1\right) x_{\text{eq}} \quad \text{et} \quad X \leq X_2 = \left(\frac{\mu_S}{\mu_C} - 1\right) x_{\text{eq}} \quad \text{car } x_{\text{eq}} = \frac{\mu_C g}{\omega^2}$$

3. À l'instant initial, la masse est sans vitesse donc $\dot{X} = 0 < v_0$; il s'agit du premier cas envisagé dans la question précédente. Avec $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$, l'équation d'évolution $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ s'intègre en

$$X(t) = X_0 \cos \omega t$$

Ce mouvement peut se maintenir si la vitesse reste inférieure à v_0 . Dérivons l'expression précédente :

$$\dot{X}(t) = -\omega X_0 \sin \omega t$$

Les oscillations se maintiennent si $\omega X_0 < v_0$ soit

$$X_0 < X_m = \frac{v_0}{\omega}$$

4. On a $X_1 = -\left(\frac{\mu_S}{\mu_C} + 1\right) x_{\text{eq}} = -(\gamma + 1) x_{\text{eq}}$ et $X_2 = \left(\frac{\mu_S}{\mu_C} - 1\right) x_{\text{eq}} = (\gamma - 1) x_{\text{eq}}$

d'où

$$q_1 = -(\gamma + 1) q_{\text{eq}} \quad \text{et} \quad q_2 = (\gamma - 1) q_{\text{eq}}$$

5. On obtient la dérivée $q' = \frac{dq}{d\theta}$ en utilisant la formule de composition

$$q' = \frac{dq}{d\theta} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{\dot{X}}{X_m} \cdot \frac{1}{d\theta/dt}$$

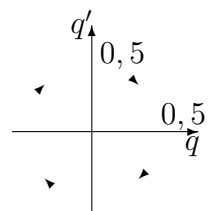
Avec $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ et $X_m \omega = v_0$, il vient

$$q' = \frac{\dot{X}}{v_0}$$

De même, on a $q'' = \frac{d^2 q}{d\theta^2} = \frac{dt}{d\theta} \frac{dq'}{dt} = \frac{\ddot{X}}{\omega v_0}$. Les équations d'évolution se réécrivent donc avec q et θ

$$\begin{cases} q'' + q = 0 & \text{si } q' < 1 \\ q'' + q = -2q_{\text{eq}} & \text{si } q' > 1 \\ \text{Collage} & \text{si } q' = 1 \text{ et } q \in [q_1; q_2] \end{cases}$$

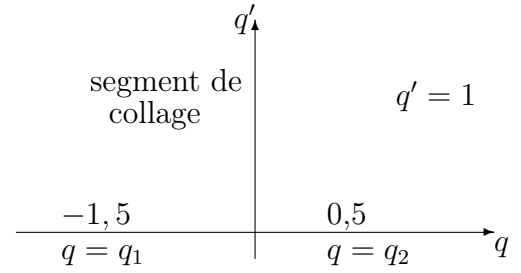
Les conditions initiales ($q = 0,5$; $q' = 0$) correspondent au cas étudié en 15.3 où les oscillations se maintiennent ; on a $X = 0,5 X_m \cos \omega t$ soit $q(\theta) = 0,5 \cos \theta$. De même $q'(\theta) = -0,5 \sin \theta$. En remarquant que $q^2 + q'^2 = 0,5^2$, on en déduit que le portrait de phase est un cercle de rayon 0,5. La masse oscille autour de la position d'équilibre avec une pulsation ω . Notons au passage que l'argument d'un point du portrait de phase vaut $-\theta = -\omega t [2\pi]$.



6. Les points représentatifs des états avec collage ont pour ordonnée 1 dans le plan (q, q') puisque les vitesses de la masse et du tapis dans le référentiel du laboratoire sont égales et valent $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Les abscisses des extrémités du segment de collage s'écrivent

$$\begin{cases} q_1 = -(\gamma + 1) q_{\text{eq}} = -1,5 \\ q_2 = (\gamma - 1) q_{\text{eq}} = 0,5 \end{cases}$$

Les états de collage sont représentés par le segment que délimitent les points de coordonnées $(-1,5; 1)$ et $(0,5; 1)$.



7. La trajectoire du système dans le portrait de phase s'obtient par intégration des équations de la question 15.5. Pour $q' > 1$, l'équation $q'' + q = -2 q_{\text{eq}}$ entraîne

$$q' q'' + q q' = -2 q_{\text{eq}} q'$$

soit, après intégration et simplification par un facteur 2,

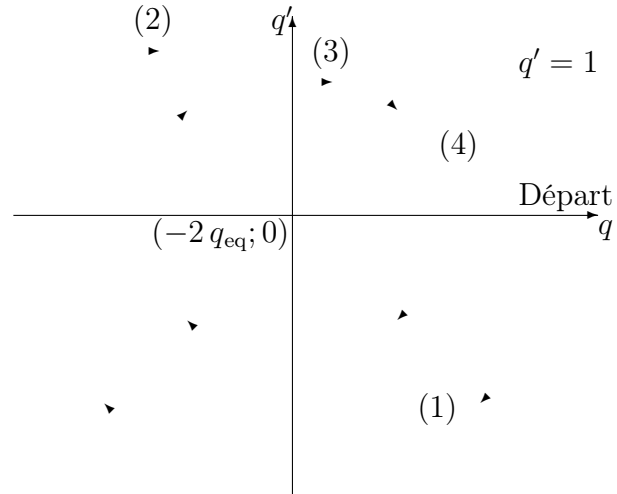
$$q'^2 + (q + 2 q_{\text{eq}})^2 = C^{\text{te}}$$

Le cas $q' < 1$ se traite en remplaçant q_{eq} par 0 dans l'équation précédente :

$$q'^2 + q^2 = C^{\text{te}}$$

Les portraits de phase sont donc des arcs de cercles de centre $(0; 0)$ pour $q' < 1$ et de centre $(-2 q_{\text{eq}}; 0) = (-1; 0)$ pour $q' > 1$. Les arcs sont parcourus dans le sens des aiguilles d'une montre. Analysons le parcours de la masse m sur le portrait de phase :

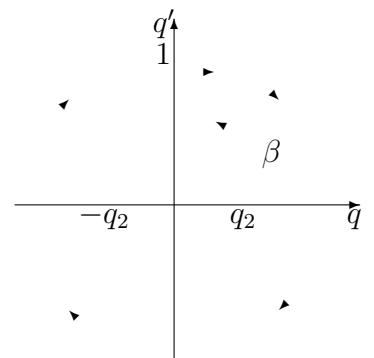
- (1) Partant du point $(2; 0)$, elle décrit un arc de cercle de centre $(0; 0)$ et de rayon 2. Ce cercle rencontre la droite $q' = 1$ au point $(-\sqrt{3}; 1)$.
- (2) Ce point n'est pas sur le segment de collage : le point représentatif du système entame alors un arc de cercle centré sur le point $(-2 q_{\text{eq}}; 0)$ jusqu'à ce qu'il recoupe la droite $q' = 1$.
- (3) Le point d'intersection est cette fois-ci sur le segment de collage, la masse reste collée et le point se déplace sur ce segment jusqu'à son extrémité $(q_2; 1)$.
- (4) Le point suit un nouvel arc de cercle centré sur $(0; 0)$ jusqu'à ce qu'il recoupe la droite $q' = 1$ sur le segment de collage ; il se déplace alors jusqu'à son extrémité, bouclant ainsi la trajectoire.



Ce cycle ne dépend pas des conditions initiales : quand le point représentatif du système rencontre le segment de collage, il suit le cycle constitué par l'arc de centre $(0; 0)$ s'appuyant sur le segment $[(-q_2; 1); (q_2; 1)]$ et le segment lui-même.

8. Dans le cas général, le cycle limite est constitué par la partie du segment de collage comprise entre les points $(-q_2; 1)$ et $(q_2; 1)$ et par l'arc de cercle de centre $(0; 0)$ s'appuyant sur celui-ci. Calculons le temps mis par le système pour décrire ce cycle. Le segment correspond à un parcours de longueur $2q_2 X_m$ qui s'effectue à la vitesse v_0 dans le référentiel du laboratoire. Sa durée est donc $T_1 = 2q_2 X_m / v_0$. L'arc de cercle de mesure $\pi + 2\beta = \pi + 2 \text{Arctan}(1/q_2)$ est parcouru à ω en

$$T_2 = \frac{\pi + 2 \text{Arctan}(1/q_2)}{\omega}$$



Au final,

$$T_C = \frac{2q_2 + \pi + 2 \operatorname{Arctan}(1/q_2)}{\omega}$$

9. Dans la phase sans collage, la vitesse est constamment donnée par l'expression $\dot{X}(t) = -\omega X_0 \sin \omega t$ avec $\omega X_0 < v_0$ donc $R_t = \mu_C mg$. Par le principe des actions réciproques, la force exercée par la masse sur le tapis est opposée à celle du tapis sur la masse. Le travail pendant un cycle s'écrit alors, puisque $\sin \omega t$ est T-périodique,

$$W = \int_0^T (-\vec{R}_t) \cdot (\vec{v}_0 - \vec{v}) dt = - \int_0^T \mu_C mg (v_0 - \dot{X}) dt = -\mu_C mg v_0 T$$

Pour la puissance moyenne,

$$\mathcal{P}_m = \frac{W}{T} = -\mu_C mg v_0$$

Pour un cycle avec collage, la force de frottement ne travaille que durant la phase de glissement et pas pendant la phase de collage car, dans ce cas, la vitesse de glissement est nulle. Pendant la phase de glissement, le mouvement est régi par l'équation $X(t) = X_0 \cos \omega t$ où l'origine des temps est choisie de telle manière que $X(0) = X_0 = X_m \sqrt{q_2^2 + 1}$ et $X'(0) = 0$ (point le plus à droite de l'arc de cercle sur la figure de la question 15.8). Le cycle s'effectue donc entre les instants $-\beta/\omega$ et $(\pi + \beta)/\omega$ et l'on a

$$W_C = - \int_{-\beta/\omega}^{(\pi+\beta)/\omega} \mu_C mg [v_0 + \omega X_0 \sin \omega t] dt$$

car la force de frottement vaut toujours $\mu_C mg \vec{e}_x$ pendant la phase de glissement. Avec le changement de variable $\theta = \omega t$, on obtient

$$\begin{aligned} W_C &= -\frac{\mu_C mg}{\omega} \int_{-\beta}^{\pi+\beta} (\omega X_0 \sin \theta + v_0) d\theta \\ &= -\frac{\mu_C mg}{\omega} \left[\omega X_0 [-\cos \theta]_{-\beta}^{\pi+\beta} + v_0 (\pi + 2\beta) \right] \\ W_C &= -\frac{\mu_C mg}{\omega} [2\omega X_0 \cos \beta + v_0 (\pi + 2\beta)] \end{aligned}$$

Puisque $\cos \beta = q_2 / \sqrt{1 + q_2^2}$ et $X_0 = X_m \sqrt{1 + q_2^2} = v_0 \sqrt{1 + q_2^2} / \omega$, il vient

$$W_C = -\frac{\mu_C mg}{\omega} \left[2\omega X_m \sqrt{1 + q_2^2} \frac{q_2}{\sqrt{1 + q_2^2}} + v_0 [\pi + 2 \operatorname{Arctan}(1/q_2)] \right]$$

soit,
$$W_C = -\mu_C mg \frac{[2q_2 + \pi + 2 \operatorname{Arctan}(1/q_2)]}{\omega} v_0 = -\mu_C mg v_0 T_C$$

On reconnaît dans cette expression la période du cycle de collage :

$$W_C = -\mu_C mg v_0 T_C$$

La puissance moyenne s'obtient en divisant l'énergie dissipée par les forces de frottement par la période T_C du cycle

$$\mathcal{P}_{mC} = -\mu_C mg v_0$$

Les puissances moyennes reçues par le tapis via les forces de frottement sont négatives, il s'agit donc bien d'une dissipation d'énergie. De plus, on remarque que les puissances moyennes dissipées lors des cycles avec ou sans collage sont égales. Dans le cadre de l'application à un patin de frein, les considérations énergétiques ne permettront pas de distinguer l'efficacité des deux types de cycles, toutefois celui avec collage provoquera un freinage « saccadé » qui se traduira par un crissement du frein.

On peut montrer que la fréquence des passages de la phase de collage à la phase de glissement va des fréquences audibles aux ultrasons ; c'est ce qui explique par exemple le crissement d'une craie sur un tableau. Cette fréquence dépend entre autres des paramètres géométriques du système étudié ; en cassant une craie en deux, la fréquence de crissement passe dans le domaine des ultrasons et on ne l'entend plus ! Le lecteur intéressé trouvera un long développement à ce propos dans le sujet de physique posé à l'ENS Ulm en 2001 en filière MP.

