Circuits linéaires du premier ordre, indications

1. Charge sous voltmètre Comme souvent, l'équation différentielle sur la tension d'un condensateur est plus facile à trouver et résoudre. On pourra alors déterminer $i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$.

Écrire les trois courants en fonction de u_C puis remplacer dans la loi des nœuds.

À noter qu'une équivalente Thévenin-Norton, ajout de résistances en parallèles puis équivalent Norton-Thévenin permet de vérifier après coup que l'équation différentielle trouvée est bien la bonne.

2. Échelon de courant sur RC parallèle u_C permet de faire le lien entre i_R et i_C. Remplacer le plus simple au profit de l'autre dans la loi des nœuds et le tour est joué.

3. Échelon de tension sur un dipôle RL Lors de la première phase, la diode sera en mode bloqué (si vous la supposez passante, le courant traversant r sera dans le mauvais sens par rapport à ce qu'elle laisserait passer). On étudie donc un simple RL. Écrire la loi des mailles et remplacer les tensions en fonction de i pour obtenir l'équation différentielle.

Dans la deuxième phase, la diode est passante, on a donc un circuit rL sans générateur. Procéder de même que précédemment, seule la condition initiale (et la résistance...) change.

4. Aspects énergétiques des circuits RC

1. Il s'agit d'un circuit RC classique soumis à un échelon de tension. Écrivez l'équation différentielle en u_C à partir de la loi des mailles, puis résolvez-la avec la condition initiale $u_C(0) = 0$. En déduire $i(t)$ via $i = C\dfrac{du_C}{dt}$.
2. (a) L'énergie fournie par le générateur est l'intégrale de sa puissance $P_g = E \cdot i(t)$ sur $[0, t]$. Remplacez $i(t)$ par son expression.
   (b) L'énergie dissipée dans la résistance est l'intégrale de $P_r = Ri^2(t)$. Utilisez l'expression de $i(t)$ pour calculer l'intégrale.
   (c) L'énergie emmagasinée dans le condensateur s'obtient en intégrant la puissance reçue $P_c = u_C(t) \cdot i(t)$, ou plus simplement en utilisant la formule $W_c = \frac{1}{2}C{u_C}^2(t)$.
3. Comparez les expressions de W_g et de la somme de W_r et W_c. Que constatez-vous ? Cela reflète un principe fondamental, lequel ?

5. Charge d'un condensateur en série avec une résistance Comme la limite $R' \to \infty$ du second circuit redonne le premier circuit, on peut se contenter de faire le second (même si c'est forcément un peu plus difficile).

Je donne l'idée pour le premier circuit :

— la loi des mailles (avec la loi d'Ohm sur r) permet d'exprimer i en fonction de u ;

— la décomposition de u en fonction de u_C et $u_R = Ri$ permet d'exprimer u_C en fonction de u uniquement ;

— et finalement la loi du condensateur dans laquelle on substitue $i = f(u)$ et $u_C = g(u)$ permet de conclure sur l'équation différentielle sur u.

Pour la résolution, il faut chercher la condition initiale sur u. La connaissance de $u_C(0^+)$ permet par loi des mailles d'obtenir $i(0^+)$ et donc $u(0^+)$ en inversant l'une des relations trouvées plus haut (c'est même directe en écrivant $u = g^{-1}(u_C)$).

Pour le second circuit, c'est la même idée, sauf qu'il faut rajouter le courant traversant R', courant qui s'exprime directement en fonction de u.

6. Réponse à une rampe L'équation différentielle n'est pas dure à trouver, mais c'est la solution particulière qui diffère de d'habitude. La chercher sous la forme $u_\mathrm{p}(t) = \alpha t + \beta$. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}$ et le substituer dans l'équation différentielle. Comme cela doit être valable pour tout t, le coefficient devant t de part et d'autre doit être identique, de même que le terme constant.

7. Circuit RL semi-parallèle

1. Ne pas se laisser abuser par la forme en pseudo-Thévenin : c'est une source de courant qu'on vous donne, on connait donc directement le courant traversant la branche de gauche. Une loi des nœuds, puis une substitution de i_r par u puis par i donne l'équation différentielle.
2. Utiliser la loi des nœuds pour exprimer i en fonction de u puis remplacer i dans la loi de la bobine.
3. Penser à la grandeur continue dans une bobine. Pour l'autre, utiliser la loi des nœuds qui faisait le lien de l'un à l'autre et qui est notamment valable en 0^+.
4. On a les équations différentielles et les conditions initiales, on sait donc résoudre.

8. Circuit RL parallèle

1. Traduire l'énoncé en « on est en régime permanent » donc la bobine se comporte comme un fil. On se retrouve donc avec un simple couple de résistances en parallèle.
2. L'équation différentielle la plus simple à trouver est sur i_L (c'est toujours sur la grandeur continue dans le circuit). La condition initiale est donnée par la question précédente. u se calcule directement à partir de i_L.

9. Échelon sur bobine alimentée en courant Écrire patiemment les équations disponibles en exprimant tout en fonction des quatre courants et de la tension u recherchée. Procéder par gentil/méchants pour se débarrasser petit à petit des courants (trois s'expriment à l'aide de lois de mailles, le quatrième est à extraire de la loi des nœuds puis à remplacer dans la loi de la bobine).

Pour la condition initiale, partir de celle sur le courant de la bobine et utiliser son expression en fonction de u pour en déduire la condition initiale sur u.

Remarque : on peut vérifier a posteriori par équivalence Thévenin/Norton, mise en parallèle de résistances et re-équivalence Norton/Thévenin que l'équation différentielle est correcte.

10. Du transitoire qui dure On peut trouver une équation différentielle (au choix) pour déterminer τ. On peut aussi se placer dans le cas particulier où I_0 et E_0 sont nuls puisque les générateurs n'apparaissent que dans le second membre et jamais dans l'expression de la constante de temps.

11. Régime transitoire On peut trouver une équation différentielle (au choix) pour déterminer τ. On peut aussi se placer dans le cas particulier où η_1, η_2 et E_1 sont nuls puisque les générateurs n'apparaissent que dans le second membre et jamais dans l'expression de la constante de temps.

12. Charge de deux condensateurs

1. Écrire la loi des nœuds et remplacer chaque courant par son expression en fonction de u, soit via la relation de chaque condensateur, soit via une loi des mailles.
   Résoudre sur u et calculer i_1 et i_2 à partir de lui.
2. Via l'égalité du courant traversant chaque condensateur, montrer que u_1 est proportionnel à u_2 à une constante additive près qu'on peut calculer en regardant les conditions initiales. Une fois ceci prouvé, remplacer dans la loi des mailles pour exprimer i en fonction de u_1 uniquement puis substituer i dans la loi du premier condensateur pour obtenir l'équation différentielle sur u_1.
   Résoudre sur u_1 et calculer i et u_2 à partir de lui.

13. Évolution suivie

1. (a) Regarder le régime permanent atteint en 0^- et conclure par continuité.
   (b) Une simple loi des maille suffit pour chacun. C'est normal de trouver deux équations complètement indépendantes.
   (c) Résolution classique en s'appuyant sur les conditions initiales. Chercher le solutions sous la forme $\mathrm{A}e^{-t/\tau}+\mathrm{B}$.
2. L'équation différentielle est inchangée pour i_1 puisque les équations permettant de l'obtenir sont inchangées (la faut au générateur idéal de tension qui impose E à ses bornes quoi qu'il arrive). En revanche, cela change pour i_2 car il n'est plus alimenté seulement par le courant passant par R_2. En revanche, les solutions seront différentes dans les deux cas car les conditions initiales changent pour chaque côté (prendre le régime permanent de la question précédente et invoquer la continuité). On pensera à redéfinir l'origine des temps.

14. Charge par décharge Les condensateurs sont traversés par le même courant. En déduire que u_1 dépend de manière affine de u_2, l'ordonnée à l'origine étant déterminée par les conditions initiales. Une fois cette relation établie, écrire la loi des mailles et se débarrasser du courant au profit de u_1 pour obtenir l'équation différentielle sur u_1.

Ne reste qu'à résoudre à l'aide des conditions initiales et calculer i et u_2 à l'aide de l'expression de u_1.

15. Circuit du 2e ordre Les gentils et les méchants, encore et toujours :

— i_{C_2} et i_{R_2} s'expriment directement en fonction de u_2 ;
— ce qui permet d'en déduire i_1 en fonction de u_2 ;
— et la loi des maille permet d'obtenir u_{C_1} en fonction de i_1 et u_2 donc juste en fonction de u_2 ;
— Il ne reste plus qu'à substituer i_1 et u_{C_1} dans la relation du condensateur C_1 pour obtenir l'équation différentielle désirée.

L'équation obtenue étant d'ordre 2, il va falloir à la fois exprimer $u_2(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}(0^+)$ mais comme ce dernier est relié à $i_{\mathrm{C}_2}(0^+)$ et qu'on a une équation le donnant en fonction de u_2 déterminée plus haut, c'est déjà plié.

16. Flash d'appareil photo

1. Revoir le cours associé du chapitre précédent.
2. La charge étant proportionnelle à la tension, il suffit de trouver une équation différentielle sur u_{C} pour avoir celle sur q.
3. Regarder $i(0^-)$ et $i(0^+)$ pour pouvoir conclure.
4. On peut chercher l'équation différentielle sur i directement ou alors on peut se contenter de dériver celle sur q et d'invoquer le lien entre les deux (bien vérifier le sens dans lequel il s'écrit). Utiliser $i(0^+)$ trouvé à la question précédente pour terminer la résolution.
5. Réfléchir à ce qui se passe pour $t<0$, pour $t>0$, d'où part le courant, où il va, sur quel temps caractéristique, etc.
6. Application du cours sur le temps caractéristique de charge en lien avec le τ lu dans l'équation différentielle précédente.

17. La caractéristique du dipôle masqué

1. Écrire la loi des nœuds entre la résistance et le condensateur en exprimant les deux autres courants en fonction de u via loi d'Ohm, loi des mailles et loi du condensateur.
2. (a) Regarder le signe de $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ en B′ et par extension sur B′A.
   (b) De même en A.
   (c) Regarder de la même manière le signe de $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ au point B.
3. (a) Remarquer que sur B′A, u peut s'écrire $u = r_1 i$ (et déterminer la valeur de r_1). On peut alors se débarrasser de i au profit de u dans l'équation différentielle de la première question. Utiliser $u(0) = u_{\mathrm{B}'}$ comme condition initiale et trouver le temps $t_{\mathrm{B}'\mathrm{A}}$ nécessaire pour atteindre u_{A}.
   (b) Remarquer de même que sur A′B, u peut s'écrire $u = u_0 + r_2 i$ (et exprimer u_0 et r_2 en fonction des données). En se débarrassant de i au profit de u dans l'équation différentielle de la première question, on obtient une équation différentielle sur u que l'on peut résoudre avec pour condition initiale $u(0) = u_{\mathrm{A}'}$. Reste à trouver le temps $t_{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$ nécessaire pour que $u(t_{\mathrm{A}'\mathrm{B}}) = u_{\mathrm{B}}$.

18. Observation d'un circuit inductif

1. $i(0^+)$ se trouve par condition de continuité dans la bobine. En revanche pour $u(0^+)$, il faut dessiner le circuit équivalent en 0^+ et raisonner avec un diviseur de tension. En l'infini, la bobine est équivalente à un fil, dessiner le circuit équivalent et procéder par diviseur de tension.
2. L'équation différentielle sur i est (as usual) plus facile à trouver que sur u. (Noter qu'on peut fonctionner par équivalence Thévenin/Norton pour la vérifier après-coup.) La résoudre à l'aide de la condition initiale de la question précédente et en déduire l'expression de $u(t)$.
3. Il y a trois valeurs particulière que l'on peut aisément déterminer sur le graphique :

   — La valeur initiale $u(0)$;
   — La valeur asymptotique $u(\infty)$;
   — Le temps caractéristique τ ;

   Bien regarder les expressions théoriques de chacune de ces valeurs pour définir un angle d'attaque :

   — La valeur initiale permet d'atteindre R ;
   — La valeur asymptotique permet d'atteindre r une fois R connue ;
   — Le temps caractéristique permet d'atteindre L une fois r et R connues.

19. Charges et décharges : vers un « régime permanent »

20. Détecteur de particules

21. Clôture électrique

1. Bien traduire l'énoncé dans le schéma : il s'agit d'une structure similaire (en apparence sur une cellule) à un diviseur de tension coudé avec $u(x)$ en entrée, $u(x+\mathrm{d}x)$ en sortie, la résistance du haut valant $\rho \mathrm{d}x$ et celle de droite valant $\frac{1}{g\mathrm{d}x}$.
2. La loi d'Ohm appliquée à la résistance du dessus fait apparaître la différence $u(x) - u(x+\mathrm{d}x) \approx -\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, ce qui donne une première équation différentielle en la variable x liant $i(x)$ et $u(x)$.
   De même, le courant traversant la deuxième résistance s'exprime comme la différence des courants $i(x)$ et $i(x+\mathrm{d}x)$. Le même type d'astuce fait apparaître $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}$ et la loi d'Ohm permet le lien avec la tension

$u(x+\mathrm{d}x)$ que l'on peut approximer à $u(x)$ ici car la prise en compte de l'écart introduit un terme en $(\mathrm{d}x)^2$ que l'énoncé demande de négliger.

3. Les deux questions précédentes permettent d'obtenir les équations

$$\rho i(x) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{et} \qquad g u(x) + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x} = 0$$

Substituer $i(x)$ depuis une équation dans l'autre pour n'avoir plus que du $u(x)$.

4. Si le parc est ouvert en $x = \mathrm{L}$, cela signifie que $i(\mathrm{L}) = 0$, aucun courant ne peut passer à cet endroit (mais il peut y en avoir avant du fait des fuites le long de la clôture). On connait en outre la tension en entrée : $u(0) = u_0$. Deux conditions qui permettent d'avoir deux équations pour les deux inconnues α et β.

5. S'il y a liaison, on a $u(\mathrm{L}) = u(0) = u_0$.