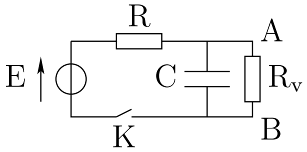
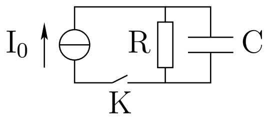
Circuits linéaires du premier ordre

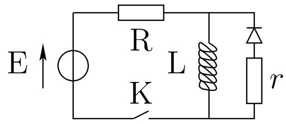
1. Charge sous voltmètre
On charge le condensateur C en fermant K à $t = 0$. On observe la tension aux bornes de C avec un voltmètre de résistance R_v. Déterminer i_C et u_C en fonction de t.



2. Échelon de courant sur RC parallèle
C n'est pas chargé et K est ouvert. On abaisse l'interrupteur K. Comment évoluent les courants i_R et i_C au cours du temps ?

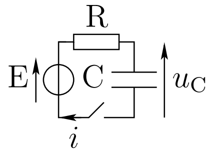


3. Échelon de tension sur un dipôle RL
On abaisse K. Trouver l'évolution du courant dans la bobine L au cours du temps. On ouvre K ; comment évolue le courant dans la bobine ?

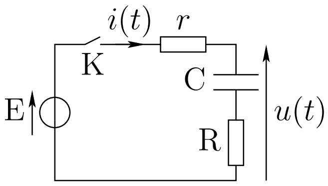


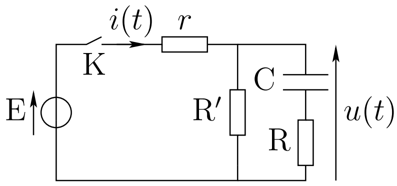
4. Aspects énergétiques des circuits RC À $t = 0$, on ferme l'interrupteur dans le circuit ci-dessous où le condensateur est déchargé.

1. Exprimer $u_C(t)$ et $i(t)$. Donner l'allure des courbes représentatives.
2. Exprimer
   (a) W_g, l'énergie fournie par le générateur sur l'intervalle $[0; t]$;
   (b) W_r, l'énergie dissipée par la résistance sur l'intervalle $[0; t]$;
   (c) W_c, l'énergie emmagasinée dans la capacité à l'instant t.
3. Quelle est la relation entre ces trois grandeurs ? Que représente-t-elle ?

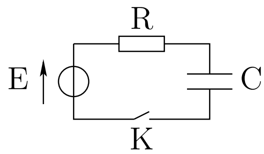


5. Charge d'un condensateur en série avec une résistance* Calculer $i(t)$ et $u(t)$ pour les deux circuits ci-dessous. Le condensateur est initialement déchargé et on ferme l'interrupteur K à $t = 0$.



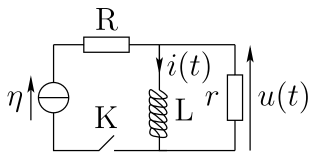


6. Réponse à une rampe*
La source de tension varie au cours du temps selon $E = a\,t$. On ferme K à $t = 0$. Comment évolue la tension u_C ? (Chercher la solution particulière sous forme de droite affine.)

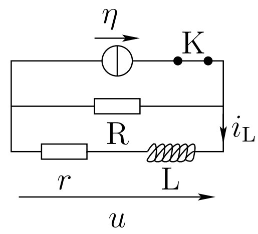


7. Circuit RL semi-parallèle* À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminer l'équation différentielle que vérifie l'intensité $i(t)$ traversant la bobine.
2. Déterminer l'équation différentielle que vérifie la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine.
3. Déterminer $u(0)$ et $i(0)$ ainsi que les limites quand $t \to \infty$.
4. Déterminer les expressions de $u(t)$ et $i(t)$.



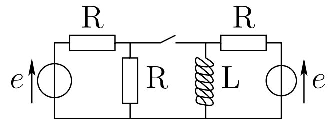
8. Circuit RL parallèle*



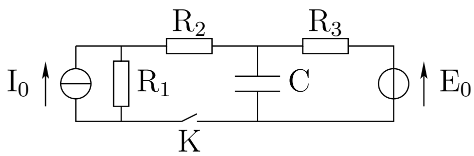
1. L'interrupteur K est fermé depuis une éternité (au moins une seconde) : calculer i_L et u.
   Application numérique : $\eta = 1{,}0$ A, $r = 10\ \Omega$, R = 100 Ω et L = 100 mH.
2. On ouvre K. Donner l'expression (littérale) de $i_L(t)$ et $u(t)$.

9. Échelon sur bobine alimentée en courant*

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Décrire l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine. Données : $e = 12$ V, R = 30 Ω, L = 100 mH.

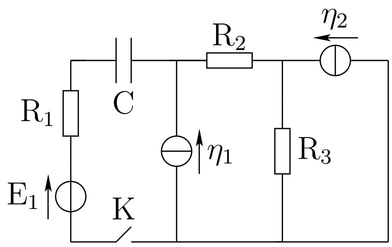


10. Du transitoire qui dure* On abaisse K. Quelle est la durée du régime transitoire ?



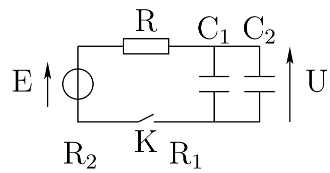
11. Régime transitoire*

1. Trouver l'expression de la constante de temps τ du régime transitoire lorsque l'on ferme l'interrupteur K dans le circuit ci-contre avec C initialement déchargé.
2. AN : $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 70\ \Omega$, C = 10 nF.



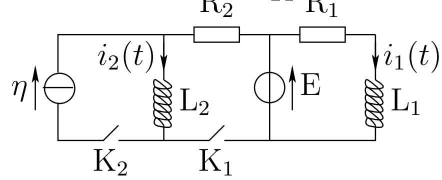
12. Charge de deux condensateurs*

On abaisse K à $t = 0$ alors que les deux condensateurs sont déchargés. Trouver l'évolution de u puis les courants i_1 et i_2. Même question si les condensateurs sont montés en série (avec i, u_1 et u_2).



13. Évolution suivie**

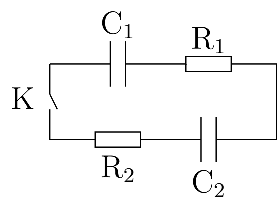
On suppose le régime permanent atteint avec K_1 et K_2 ouverts.



1. On ferme l'interrupteur K_1.
   (a) Quelles sont les valeurs de $i_1(0)$ et $i_2(0)$ ainsi que les limites quand $t \to \infty$?
   (b) Déterminer les équations différentielles pour i_1 et i_2.
   (c) Comment évoluent les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$? Tracer $i_2(t)$.
2. Après avoir laissé le régime permanent s'installer, on ferme l'interrupteur K_2 (K_1 restant fermé). Même questions que précédemment.

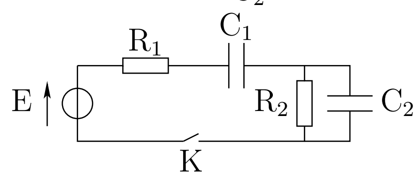
14. Charge par décharge**

C_1 est chargé sous une tension V_0. On abaisse K. Trouver le courant et l'évolution des tensions aux bornes des deux condensateurs.

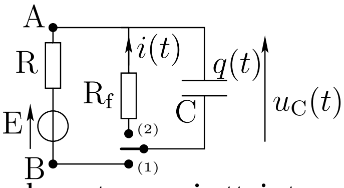


15. Circuit du 2e ordre**

Les deux condensateurs C_1 et C_2 ne sont pas chargés. On abaisse l'interrupteur. Trouver l'équation différentielle qui donne l'évolution de la tension u_2. Quelles sont les relations qui permettent de déterminer les constantes d'intégration qui apparaissent dans la solution de l'équation différentielle ?



16. Flash d'appareil photo**

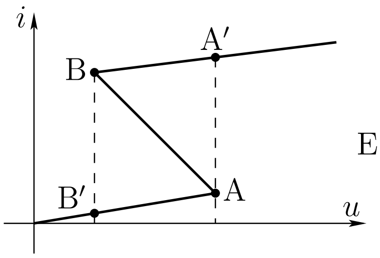


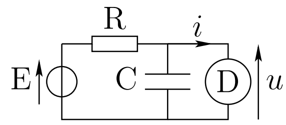
Un flash d'appareil photo peut être modélisé comme un résistance $\mathrm{R_f}$ dans laquelle s'écoule « rapidement » un fort courant produit par la décharge d'un condensateur de capacité C. Avant utilisation, ce condensateur doit être chargé à l'aide d'un générateur réel de f.é.m. E et de résistance interne R.

Lorsque l'interrupteur est en position (1), le générateur assure la charge du condensateur qui atteint une charge proche de sa charge maximale q_0. À $t = 0$, l'interrupteur est basculé en position (2), le condensateur se décharge dans $\mathrm{R_f}$, ce qui provoque un éclair lumineux.

1. Établir à partir de l'expression de la puissance celle de l'énergie stockée dans un condensateur en fonction de q (charge du condensateur) et sa capacité C.
2. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la charge $q(t)$ du condensateur C pour $t < 0$. En déduire, en fonction de C et E, la charge maximale q_0, puis l'énergie maximale stockée dans le condensateur C.
3. Soit $i(t)$ l'intensité du courant qui circule dans le résistor de résistance $\mathrm{R_f}$ (orientation donnée sur la figure ci-dessus). Est-ce que $i(t)$ est continue en $t = 0$?
4. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ pour $t > 0$. La résoudre pour déterminer, pour $t > 0$, l'expression de la fonction $i(t)$.
5. Dessiner l'allure de la courbe $i(t)$ pour $t > 0$.
6. Exprimer, en fonction de $\mathrm{R_f}$ et C, l'ordre de grandeur Δt du temps nécessaire à la décharge du condensateur. Application numérique : $\mathrm{R_f} = 10\ \Omega$; $\mathrm{C} = 1{,}5.10^{-4}$ F. Proposer une valeur pour Δt.

17. La caractéristique du dipôle masqué**



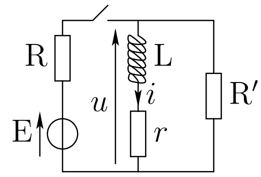


On introduit un dipôle inconnu D possédant la caractéristique ci-contre dans un circuit RC série.

On donne les valeurs $\mathrm{R} = 200\ \Omega$, $\mathrm{E} = 100$ V, $\mathrm{C} = 10\ \mu$F, $u_\mathrm{A} = u_{\mathrm{A'}} = 60$ V, $u_\mathrm{B} = u_{\mathrm{B'}} = 20$ V, $i_\mathrm{A} = 100$ mA, $i_\mathrm{B} = 500$ mA et $i_{\mathrm{A'}} = 550$ mA.

1. Quelle est l'équation différentielle reliant i et u ?
2. **Étude qualitative.** En se basant sur les valeurs numériques de $u + \mathrm{R}i$ en chacun des points :
   (a) Si le point de fonctionnement[1] se trouve sur le segment B′A, vers où se déplace-t-il ?
   (b) Montrer que si l'on se trouve au point A, on ne peut pas se déplacer selon AB.
   (c) De même, montrer que si l'on se trouve au point B, on ne peut pas se déplacer selon BA.
3. **Étude quantitative.** Le système évolue en décrivant B′A, puis saut instantané[2] sur A′, retour sur A′B et saut instantané sur B′.
   (a) Résoudre l'équation différentielle qui donne $u(t)$ sur B′A, en déduire la durée du trajet B′A.
   (b) Même question sur A′B.

18. Observation d'un circuit inductif**

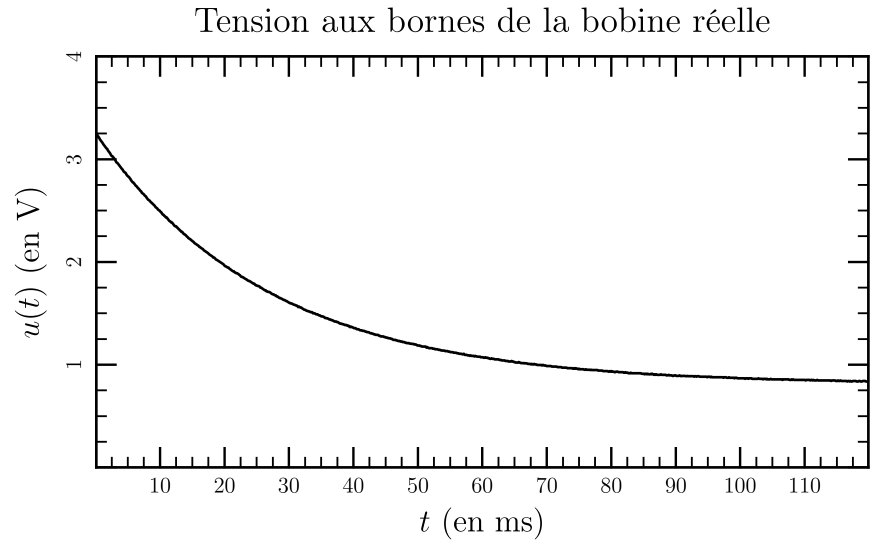


On s'intéresse au circuit inductif ci-contre où la bobine réelle est modélisée par une bobine parfaite d'inductance L en série avec une résistance interne r. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Trouver (en les justifiant) les valeurs $i(0^+)$, $u(0^+)$, $u(\infty)$ et $i(\infty)$.
2. Déterminer les expressions littérales de $u(t)$ et $i(t)$ pour $t > 0$. Vérifier que les fonctions $u(t)$ et $i(t)$ obtenues vérifient bien les valeurs trouvées en 18.1.

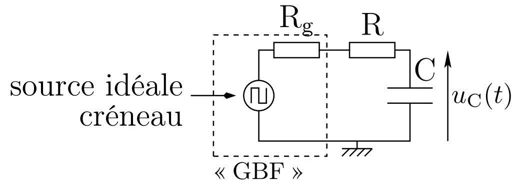
1. C'est-à-dire le couple (u, i) auquel est soumis le dipôle.
2. La tension reste bien continue aux bornes du condensateur.

3. On obtient expérimentalement l'évolution suivante pour la tension en utilisant un générateur de f.é.m. E = 5,0 V, de résistance interne R = 50 Ω et en prenant R′ = 100 Ω.



   (a) Déduire du graphique (en explicitant la méthode utilisée) les valeurs de L et r.
   (b) Aurait-on pu déterminer la résistance interne R du générateur en utilisant le même graphique ? Si oui, comment et retrouve-t-on bien la bonne valeur ?

19. Charges et décharges : vers un « régime permanent »** En travaux pratiques, on veut souvent simuler les phénomènes de charge et de décharge d'un condensateur en utilisant un signal périodique en forme de créneau. Néanmoins, si on ne choisit pas correctement la période du signal créneau, on risque de ne pas visualiser correctement le phénomène que l'on voulait étudier. On va s'intéresser ici à ce que l'on verrait dans un tel cas de figure, c'est-à-dire si l'on soumet un circuit RC à un créneau de valeur maximale E et de valeur minimale 0 dont la période n'est pas très grande devant le temps caractéristique de charge.



NB : Le générateur de créneau admet une résistance interne R_g (dessinée sur le schéma) dont il faudra tenir compte dans les calculs.

1. Le signal créneau est démarré à $t = 0$ (le condensateur était déchargé) de sorte que pendant la première demi-période T/2, le système est équivalent au classique schéma de charge d'un condensateur sous une tension E.
   (a) Dessiner le schéma équivalent au montage entre $t = 0$ et $t = T/2$.
   (b) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C sur cet intervalle de temps.
   (c) Donner la solution générale de cette équation différentielle.
   (d) Quelle est la condition initiale à considérer ? Justifier.
   (e) Déterminer l'expression effective de $u_C(t)$ sur $[0;T/2]$ en fonction de t, E et d'une constante τ que l'on aura défini au préalable.
2. À $t = T/2$, le signal créneau retombe à 0 jusqu'à $t = T$.
   (a) Dessiner le nouveau schéma équivalent sur l'intervalle $[T/2;T]$.
   (b) Quelle est la nouvelle condition « initiale » ? On la notera u_0 pour la suite.
   (c) Trouver la nouvelle équation différentielle vérifiée par u_C sur cet intervalle de temps.
   (d) Déterminer l'expression effective de $u_C(t)$ sur $[T/2;T]$ en fonction de t, T, τ et u_0.
   NB : vous n'êtes pas autorisés à changer l'origine des temps dans l'expression finale.
3. Le créneau repasse à E pour la demi-période suivante ($[T;3T/2]$).

(a) Quelle est la nouvelle condition « initiale » ? On la notera v_1 dans la suite.
(b) Trouver *rapidement* l'expression de $u_C(t)$ sur cet intervalle de temps en fonction de t, E, T, τ et v_1.

4. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites

$$v_n = u_C(nT) \qquad \text{et} \qquad u_n = u_C\left(nT + \frac{T}{2}\right)$$

(a) Donner les valeurs de v_0 et u_0.
(b) Montrer, par analogie avec les questions précédentes, que l'on a les deux relations de récurrences suivantes :

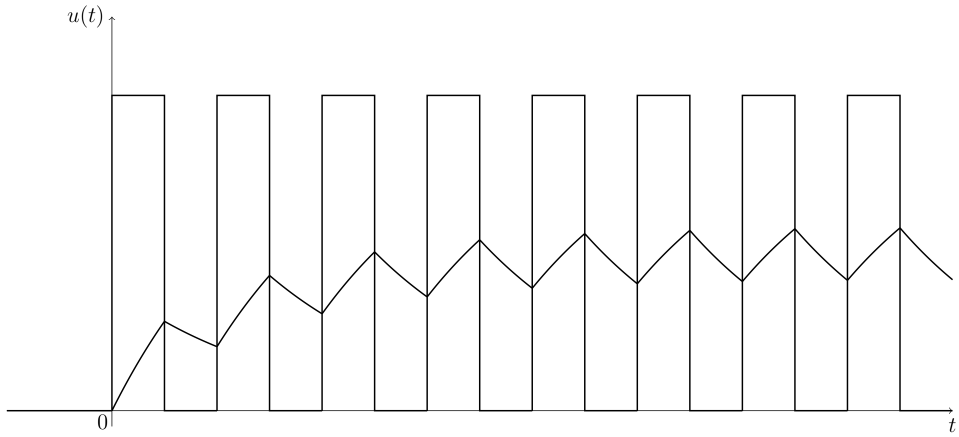
$$u_n = E\left(1 - e^{-T/2\tau}\right) + v_n\, e^{-T/2\tau} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = u_n\, e^{-T/2\tau}$$

(c) On donne le résultat mathématique suivant pour une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

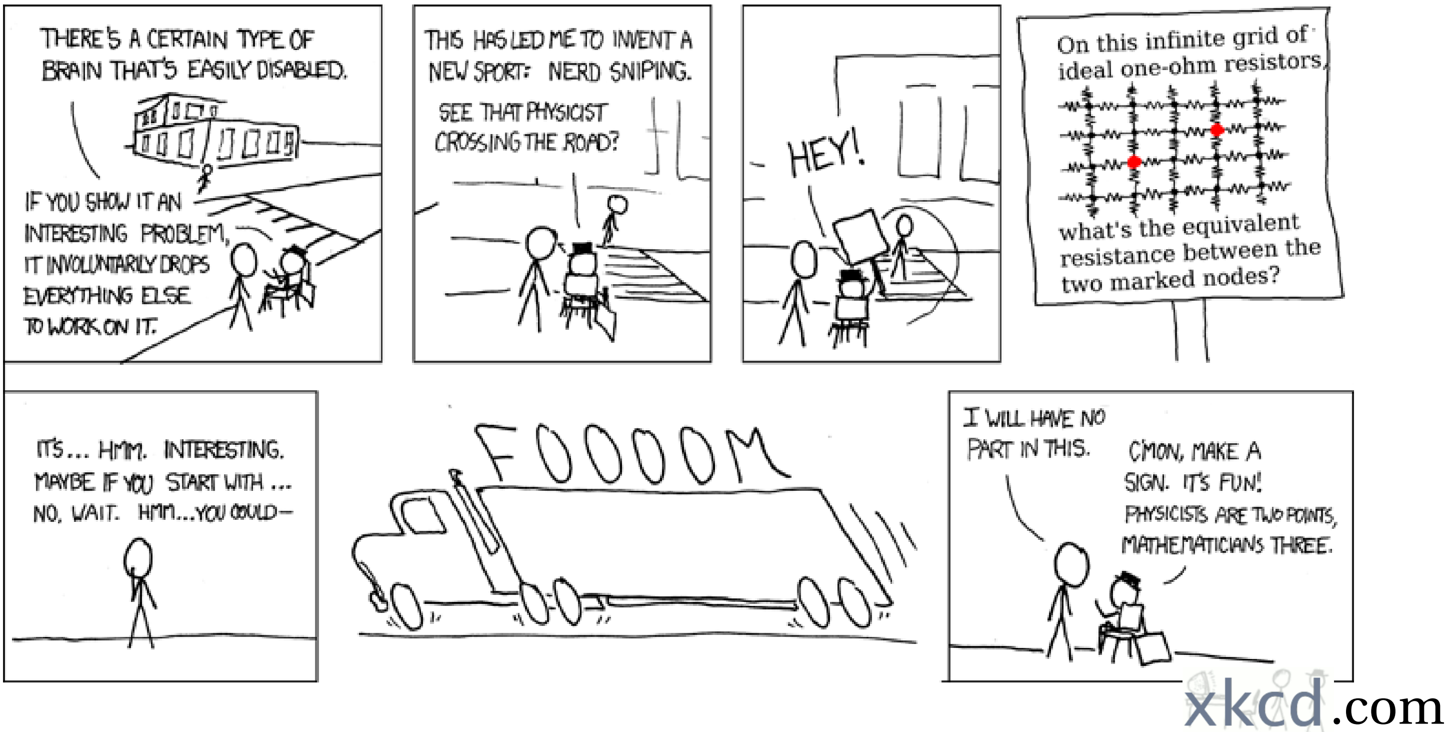
$$\text{Si} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \alpha + \beta\, w_n \qquad \text{alors} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{\alpha\,(1-\beta^n)}{1-\beta} + \beta^n\, w_0$$

En déduire l'expression explicite de v_n en fonction de v_0, E, T et τ.
(d) Comment trouver facilement l'expression générale de u_n en fonction de celle de v_n ?
(e) Quelle valeur de n faut-il prendre pour avoir atteint le régime « permanent » à 5% près ?

5. La mesure en TP donne le résultat suivant après acquisition informatique



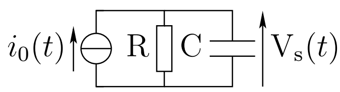
(a) Identifier clairement sur le schéma la tension du générateur et celle aux bornes du condensateur.
(b) Signaler où l'on peut lire la période T du signal générateur.
(c) Déterminer graphiquement la valeur de τ en fonction de celle de T par la méthode (expliquée !) de votre choix.
(d) Signaler sur le schéma les zones correspondant au régime « transitoire » et au régime « permanent ».
(e) Combien de τ s'écoulent avant d'arriver au régime « permanent » pour le condensateur ?
On donne $\ln(10) \approx 2{,}3$ et $\ln(2) \approx 0{,}7$
(f) Question qualitative : deviner la forme de la fonction obtenue en reliant les valeurs moyennes de $u_C(t)$ sur chaque demi-période T/2 (la dessiner sur le schéma). On placera les points « moyens » au milieu de chaque demi-période. Vérifier qu'on retrouve une méthode de mesure de τ cohérente avec les mesures précédentes.



I first saw this problem on the Google Labs Aptitude Test.
A professor and I filled a blackboard without getting anywhere.
Have fun.

20. Détecteur de particules***

Un dispositif destiné à détecter des particules ionisantes se comporte, sous l'effet de l'une de ces particules, comme un générateur idéal de courant dont le courant électromoteur est $i_0(t) = I_0\,e^{-t/\tau}$. Ce dispositif est connecté à un circuit RC dont la constante de temps RC $= k\tau$ où k est une constante réelle positive.



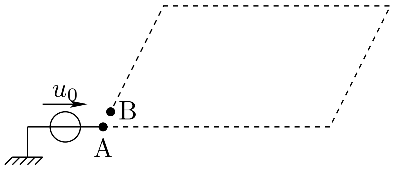
1. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $V_s(t)$.
2. Si le condensateur est initialement déchargé, montrer que $V_s(t)$ est donnée par

$$V_s(t) = ARI_0\left(e^{-t/\tau} - e^{-t/(k\tau)}\right)$$

Donner A en fonction de k.

3. La solution précédente n'est pas valable pour $k = 1$. Pour tout de même trouver une fonction solution dans ce cas, on va se placer proche de cette valeur en posant $k = 1-\varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$ et approximer l'expression précédente. On rappelle que, pour $\varepsilon \ll 1$, $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\varepsilon$ et $e^\varepsilon \approx 1+\varepsilon$.
   (a) Développer l'expression de V_s au premier ordre non nul en ε.
   (b) Donner alors la solution préssentie pour $k = 1$ et vérifier qu'elle est bien solution de l'équation différentielle.
4. Pour $k = 1$, $V_s(t)$ passe par un maximum pour $t = t_0$. Exprimer t_0 et $V_s(t_0)$ en fonction des données.

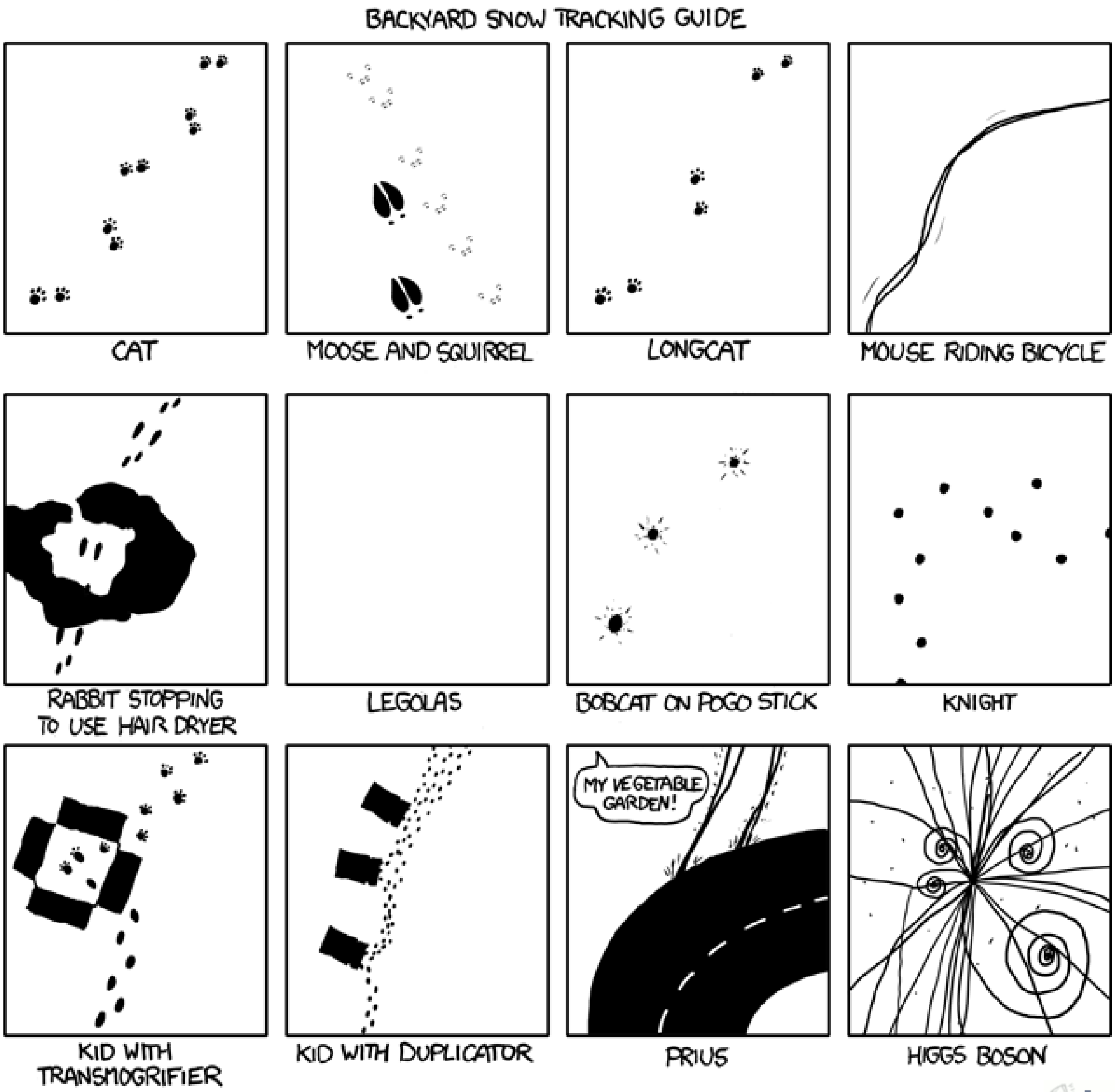
21. Clôture électrique*** Pour clôturer un parc à chevaux, on utilise un fil métallique tendu entre des piquets. La longueur totale du fil est L = 500 m, sa résistance par unité de longueur, $\rho = 0{,}12\ \Omega.m^{-1}$. Un générateur impose une tension constante u_0 à une extrémité du parc. De façon à peu près régulière, le fil est relié au sol (de potentiel V = 0) par des herbes, arbustes, etc., de sorte que la conductance de fuite par unité de longueur de fil soit égale à g. Ainsi, la tension $u(x)$ (entre le fil et le sol) et le courant $i(x)$ parcourant le fil varient le long de la clôture.



1. Représenter le schéma équivalent à une longueur élémentaire dx de clôture.
2. Établir les équations différentielles vérifiées par $u(x)$ et $i(x)$ en négligeant les termes en $(\mathrm{d}x)^2$.
3. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $u(x)$. Résoudre cette équation sous la forme

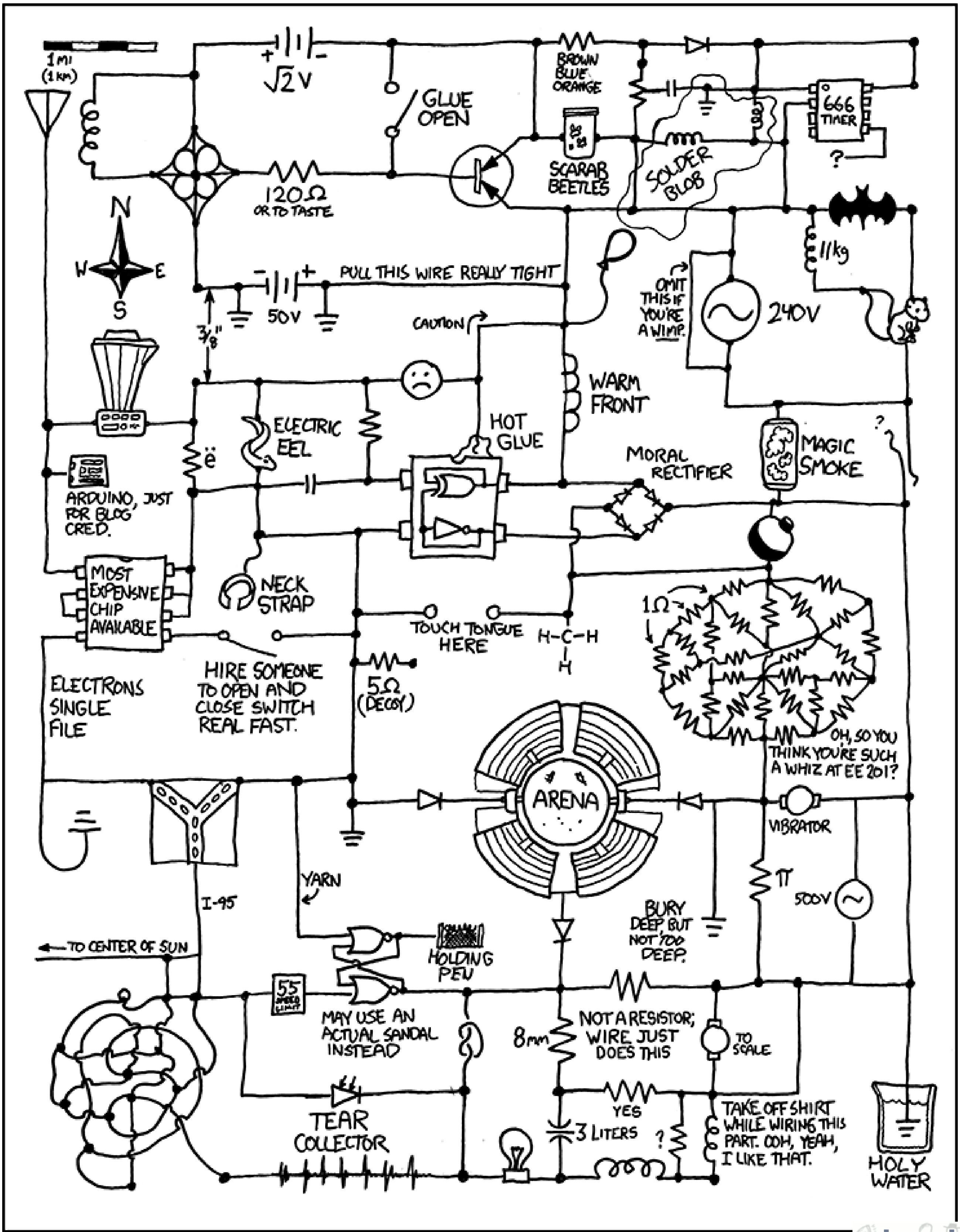
$$u(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{\kappa x} + \beta\,\mathrm{e}^{-\kappa x}$$

   sans chercher à déterminer la valeur des constantes α et β. En déduire l'expression de $i(x)$.
4. Le parc est ouvert à son extrémité (les points B et A sont électriquement séparés), déterminer α et β. En déduire la valeur maximale de g pour que la tension entre le fil de clôture et le sol ne chute pas de plus de 50% entre le générateur et l'extrémité du parc.
5. Même question si le générateur est relié aux deux brins du fil (A et B reliés).



xkcd.com

I suppose that's more accurately a hare dryer.



xkcd.com

I just caught myself idly trying to work out what that resistor mass would actually be, and realized I had self-nerd-sniped.

♫