

Circuits linéaires du premier ordre

1. Charge sous voltmètre None available.
2. Échelon de courant sur RC parallèle None available.
3. Échelon de tension sur un dipôle RL None available.

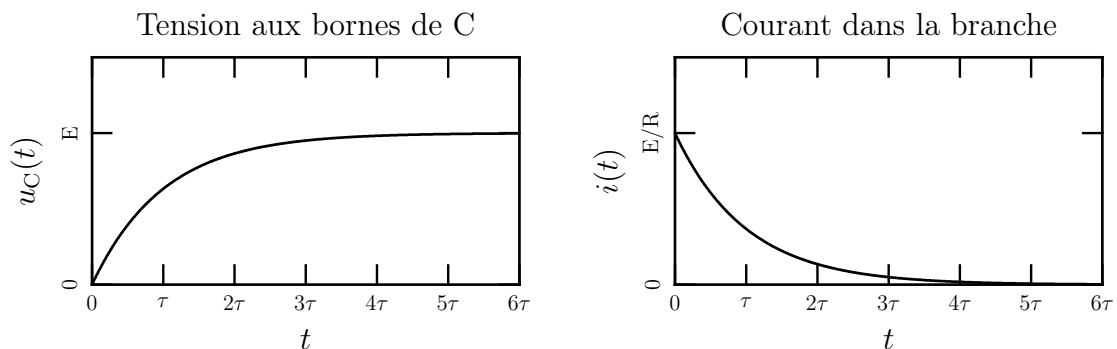
4. Aspects énergétiques des circuits RC

1. Il s'agit du classique circuit RC soumis à un échelon de tension. L'équation différentielle vérifiée par u_C est donnée par la loi des mailles suivante et on a $u_C(0) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé.

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

d'où

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



2. Étude énergétique

- (a) L'énergie fournie par le générateur s'écrit

$$W_g = \int_0^t \mathcal{P}_g dt' = \int_0^t E \times i(t') dt' = \frac{E^2}{R} \int_0^t e^{-t'/\tau} dt' = -\frac{E^2}{R} \tau \left[e^{-t'/\tau} \right]_0^t$$

d'où

$$W_g = CE^2 (1 - e^{-t/\tau})$$

- (b) L'énergie dissipée par la résistance se calcule de la même manière

$$W_r = \int_0^t \mathcal{P}_r dt' = \int_0^t Ri^2 dt' = \frac{E^2}{R} \int_0^t e^{-2t'/\tau} dt' = -\frac{E^2}{2R} \tau \left[e^{-2t'/\tau} \right]_0^t$$

d'où

$$W_r = \frac{CE^2}{2} (1 - e^{-2t/\tau})$$

- (c) Enfin, l'énergie contenue dans le condensateur à l'instant t s'obtient par

$$W_c = \int_0^t \mathcal{P}_c dt' = \int_0^t u(t') C \frac{du}{dt'} dt' = C \int_{u=u(0)=0}^{u(t)} u du = C \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{u(t)}$$

d'où

$$W_c = \frac{CE^2}{2} (1 - e^{-t/\tau})^2$$

3. En développant, on vérifie aisément que l'on a la relation de **conservation de l'énergie**

$$W_g = W_r + W_c$$

5. Charge d'un condensateur en série avec une résistance* Intéressons-nous au second circuit puisqu'il suffira de faire tendre R' vers l'infini pour retrouver les résultats du premier circuit. Commençons par écrire la loi des mailles sous la forme

$$E = r i + u \quad \text{soit} \quad i = \frac{E - u}{r}$$

On va se concentrer pour trouver une équation différentielle sur u . Dans la branche du condensateur, on a $u = u_R + u_C$ (les notations sont évidentes, mais il faut bien évidemment compléter sur le schéma pour vous), de sorte que, en mettant i_C dans le bon sens, on ait

$$i_C = \frac{u - u_C}{R}$$

En écrivant la loi des nœuds, on a

$$i = i_{R'} + i_C \quad \text{soit} \quad \frac{E - u}{r} = \frac{u}{R'} + \frac{u - u_C}{R}$$

Ce qui permet d'exprimer u_C en fonction de u :

$$u_C = R \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) u - \frac{R}{r} E$$

Pour finir, il va falloir utiliser quelque part la relation du condensateur. On écrit donc la tension u sous la forme

$$u = u_R + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = RC \frac{d}{dt} \left(R \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) u - \frac{R}{r} E \right) + R \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) u - \frac{R}{r} E$$

soit

$$\frac{R}{r} E = RC \left(1 + \frac{R}{r} + \frac{R}{R'} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R}{r} + \frac{R}{R'} \right) u$$

En simplifiant et en se remettant sous une forme aisément reconnaissable, on obtient finalement

$$u + \frac{R' r + R R' + R r}{R' + r} C \frac{du}{dt} = \frac{R'}{R' + r} E$$

de solution particulière $\frac{R'}{R' + r} E$ et de constante de temps $\tau = \frac{R' r + R R' + R r}{R' + r} C$. En regardant le comportement asymptotique du circuit considéré (C se comporte comme un fil), on retrouve bien la même solution particulière, ce qui semble indiquer que notre détermination de l'équation différentielle a des chances d'être correcte.

Pour retrouver les résultats du premier circuit, il suffit de prendre la limite quand R' tend vers $+\infty$, ce qui donne (quand on le fait proprement)

$$u + (R + r) C \frac{du}{dt} = E$$

qui là encore correspond à ce qu'on attend d'un tel circuit (avec $(R + r)$ en série avec C , donc $\tau = (R + r)C$ et un régime permanent qui impose $u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} E$).

6. Réponse à une rampe* On obtient comme d'habitude l'équation différentielle

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E(t) = a \times t$$

La solution de l'équation homogène est comme d'habitude $u_h = Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$, mais la difficulté est ici de trouver une solution particulière puisque le second membre n'est pas constant. Si on cherche une solution sous la forme $u_p = \alpha t + \beta$, alors on a

$$\frac{du_p}{dt} = \alpha \quad \text{soit} \quad u_p + RC \frac{du_p}{dt} = \alpha t + \beta + RC\alpha$$

Or on veut que $u_p + RC \frac{du_p}{dt} = at$, d'où l'on déduit par identification¹ des ordonnées à l'origine et des pentes des deux droites de part et d'autre du signe égal

$$\alpha = a \quad \text{et} \quad \beta + RC\alpha = 0 \quad \text{soit} \quad \beta = -RCa = -a\tau$$

La solution générale est donc de la forme

$$u_{\text{tot}} = Ae^{-t/\tau} + a(t - \tau)$$

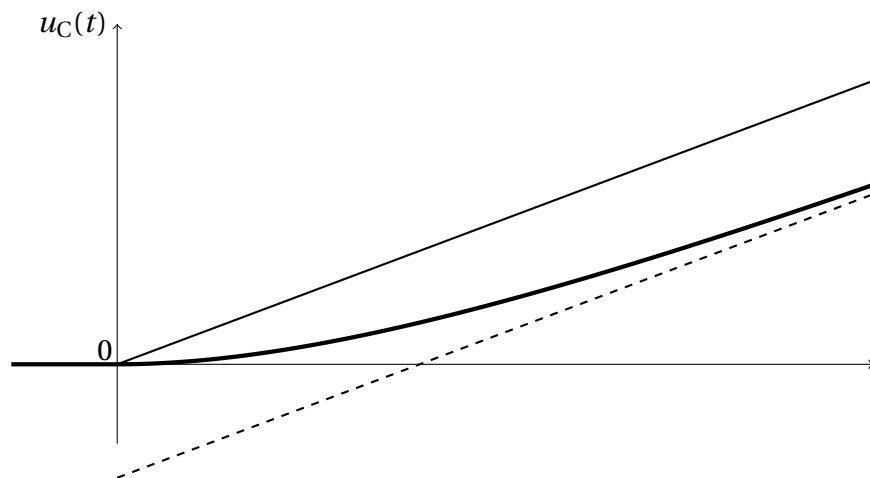
À $t = 0$, le condensateur étant déchargé, on a $u_C(0^+) \stackrel{\text{cont.}}{=} u_C(0^-) \stackrel{\text{hyp.}}{=} 0$, soit

$$A - a\tau = 0 \quad \text{soit} \quad A = a\tau$$

et finalement

$$u_C(t) = at - a\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

On peut remarquer qu'une fois que le régime transitoire a disparu (donc quand l'exponentielle est négligeable devant 1), le condensateur a tendance à avoir un temps τ de retard sur le générateur dont la tension change constamment. Sur la graphique suivant, on a mis $u_C(t)$ en gras, $E(t)$ en ligne plein et l'asymptote en pointillés.



7. Circuit RL semi-parallèle*

1. On définit le courant $i_r(t)$ traversant la résistance r orienté dans le même sens que le courant $i(t)$ traversant la bobine. La loi des nœuds s'écrit alors

$$\eta = i + i_r = i + \frac{u}{r} = i + \frac{L}{r} \frac{di}{dt} \quad \text{car } u = L \frac{di}{dt}$$

d'où l'équation demandée

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{\eta}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{r}$$

2. Pour trouver l'équation sur u , on dérive la loi des nœuds $i + \frac{u}{r} = \eta$ pour faire apparaître le terme $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L}$. Ainsi on obtient, η étant constant,

$$u + \frac{L}{r} \frac{du}{dt} = 0$$

1. En maths, vous direz un jour par unicité de la décomposition sur la base canonique des polynômes de degré 1

3. L'intensité qui traverse la bobine est une fonction continue du temps. Comme le circuit était ouvert,

$$i(0^-) = 0 = i(0^+)$$

À $t = 0^+$, la loi des nœuds donne $\eta = i(0^+) + i_r(0^+) = i_r(0^+)$, soit, avec la loi d'Ohm,

$$u(0^+) = r \eta$$

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil, court-circuitant la résistance, ainsi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \eta \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = r \lim_{t \rightarrow \infty} i_r(t) = 0$$

4. La résolution des équations différentielles donnent classiquement

$$i(t) = A e^{-t/\tau} + \eta \quad \text{et} \quad u(t) = B e^{-t/\tau}$$

où l'on détermine $A = -\eta$ et $B = r \eta$ à l'aide des conditions initiales. Ainsi,

$$i(t) = \eta (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad u(t) = r \eta e^{-t/\tau}$$

8. Circuit RL parallèle*

1. Le régime étant établi depuis une éternité, la bobine est équivalente à un fil. On se trouve donc dans la configuration classique d'un diviseur de courant et on en déduit

$$i_L = \frac{R}{R+r} \eta = 0,91 \text{ A} \quad \text{et} \quad u = r i_L = 9,1 \text{ V}$$

2. À l'ouverture de l'interrupteur, la bobine va forcer le passage du courant qui du coup se déverse dans la résistance R . Ainsi, la loi des mailles donne

$$R i_L + L \frac{di_L}{dt} + r i_L = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i_L + \frac{L}{R+r} \frac{di_L}{dt} = 0$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre linéaire homogène et à coefficients constants dont la solution s'écrit $i_L = A e^{-t/\tau}$ où l'on a posé $\tau = L/(R+r)$. Reste à déterminer la condition initiale. Comme le courant est continu dans une bobine, on a $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Or, avant l'ouverture de l'interrupteur, i_L est donné par l'expression obtenue à la question précédente. On identifie sans peine

$$i_L(t) = \frac{R}{R+r} \eta e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u(t) = -R i_L(t) = -\frac{R^2}{R+r} \eta e^{-t/\tau}$$

9. Échelon sur bobine alimentée en courant* None available.

10. Du transitoire qui dure*

11. Régime transitoire*

1. Après moultes exercices de TD, on sait bien que le générateur impliqué dans l'équation différentielle du circuit n'a aucune influence sur la durée du régime transitoire dudit circuit. En d'autres termes, on peut choisir $E_1 = 0$ et $\eta_1 = \eta_2 = 0$, ce qui ramène le circuit au circuit suivant. En effet, imposer un courant nul est équivalent à un interrupteur ouvert alors qu'une tension nulle est équivalente à un fil. On a alors

$$\tau = R_{eq} C = (R_1 + R_2 + R_3) C$$

2. Application numérique:

$$\tau = 1,7 \mu\text{s}$$

12. Charge de deux condensateurs* None available.

13. Évolution suivie**

1. Plaçons-nous dans le système où l'on ferme K_1 à $t = 0$ et où K_2 reste ouvert.

- (a) La maille de droite a atteint son régime permanent et le courant traversant la bobine (équivalente à un fil) à $t = 0^-$ vaut $i_1(0^-) = E/R_1$. La maille de gauche en revanche est initialement ouverte donc $i_2(0^-) = 0$. Par continuité du courant dans chaque bobine, on a donc

$$i_1(0) = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad i_2(0) = 0$$

Un nouveau régime permanent s'installe dans lequel chaque bobine est équivalente à un fil et chaque résistance est donc soumise à une tension E . Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \frac{E}{R_2}$$

- (b) Après fermeture de K_1 , on peut écrire indépendamment la loi des mailles dans la maille de gauche et dans celle de droite. Ainsi,

$$E = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 \quad \text{et} \quad E = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$$

- (c) La maille de droite n'est pas perturbée par la fermeture de K_1 (elle était soumise à la même équation différentielle auparavant) et reste donc dans le régime permanent déjà atteint² :

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} = C^{te}$$

La maille de gauche est soumise au classique échelon de tension avec condition initiale nulle dont la solution est la non moins classique fonction

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2} (1 - e^{-t/\tau_2}) \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

qui vérifie bien la condition initiale nulle ainsi que la limite quand t tend vers l'infini.

2. On ferme à présent K_2 en ayant attendu l'installation du régime permanent précédent.

- (a) Les nouvelles conditions initiales correspondent aux valeurs prises précédemment pour $t \rightarrow \infty$ du fait de la continuité du courant dans les deux bobines

$$i_1(0) = \frac{E}{R_1} \quad \text{et} \quad i_2(0) = \frac{E}{R_2}$$

Lorsqu'on atteint le régime permanent, la bobine L_1 se comportant comme un fil, c'est toujours la tension E qui est appliquée aux bornes de R_1 , d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_1(t) = \frac{E}{R_1}$$

Comme L_2 se transforme aussi en fil, la résistance R_2 est aussi soumise à la tension E . Mais le courant traversant L_2 est la somme du courant $i'_2 = E/R_2$ traversant R_2 et de celui η produit par la source de courant (court-circuitée par le fil/bobine), d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_2(t) = \frac{E}{R_2} + \eta$$

2. La résolution de l'équation implique que la constante devant l'exponentielle de la solution homogène est nulle.

(b) La loi des mailles dans la maille de droite permet d'écrire la même équation pour i_1 , à savoir

$$E = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1$$

La loi des mailles dans la maille de gauche permet d'obtenir l'autre équation en prenant garde au fait que le courant $i'_2(t)$ traversant la résistance R_2 vaut, d'après la loi des nœuds, $i'_2(t) = i_2(t) - \eta$, d'où

$$E = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i'_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - R_2 \eta$$

Et finalement,

$$E + R_2 \eta = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$$

(c) L'équation pour i_1 est toujours la même avec les mêmes conditions initiales, celui-ci reste donc

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} = C^{te}$$

L'équation pour i_2 mérite néanmoins qu'on s'y arrête quelque peu. Une solution particulière est

$$i_{2p} = \frac{E}{R_2} + \eta$$

La solution de l'équation homogène s'écrit quant à elle

$$i_{2h} = A e^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

La condition initiale appliquée à $i_{2p} + i_{2h}$ impose que

$$\frac{E}{R_2} + \eta + A = \frac{E}{R_2}$$

d'où

$$i_2(t) = \frac{E}{R_2} + \eta (1 - e^{-t/\tau_2}) \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$$

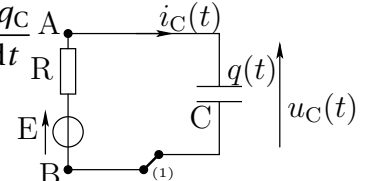
La solution démarre bien de E/R_2 et tend exponentiellement vers sa valeur limite $E/R_2 + \eta$.

14. Charge par décharge** None available.

15. Circuit du 2^e ordre** None available.

16. Flash d'appareil photo**

1. En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur s'écrit $\mathcal{P} = u_C(t) i_C(t)$. Or,

$$q = C u_C \quad \text{et} \quad i_C = \frac{dq}{dt} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P} = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt}$$


L'énergie stockée s'écrit

$$\mathcal{E} = \int_0^t \mathcal{P} dt = \int_0^{q(t)} \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C}$$

2. Pour $t < 0$, le circuit est représenté ci-dessus et la loi des mailles donne $E = R i_C + u_C$, c'est-à-dire

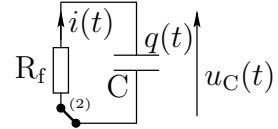
$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Lorsque le condensateur atteint sa charge maximale q_0 , le courant tend vers 0, d'où

$$q_0 = CE \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_0 = \frac{CE^2}{2}$$

3. La tension u_C est continue aux bornes du condensateurs. Par conséquent,

$$i(0^+) = \frac{-u_C(0^+)}{R_f} = \frac{-u_C(0^-)}{R_f} = -\frac{E}{R_f} \neq 0$$



Or $i(0^-) = 0$ puisque la branche est isolée. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'intensité du courant } i(t) \text{ n'est pas continue en } t = 0}$$

4. Pour $t > 0$, le circuit est celui représenté ci-dessus. La loi des mailles permet d'obtenir

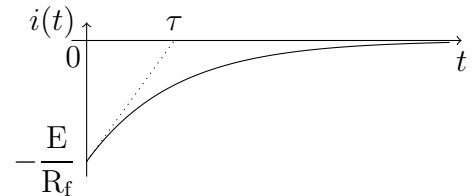
$$0 = R_f i + u_C$$

Avec $i = C \frac{du_C}{dt}$, en dérivant

$$0 = R_f \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = R_f \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

Cette équation est une équation homogène de la forme $i + \tau \frac{di}{dt} = 0$ avec $\tau = R_f C$. La solution s'exprime donc $i(t) = A e^{-t/\tau}$ avec A constante à déterminer. Comme $i(0^+) = -E/R_f$, on en déduit

$$i(t) = -\frac{E}{R_f} e^{-t/\tau}$$



5. La représentation graphique est la suivante :

6. Le régime transitoire dure un multiple (disons 5 pour être à 2% de la valeur finale) de son temps caractéristique τ . Ici, comme $u_C(t) = -R_f i(t)$, le régime transitoire de l'équation étudiée précédemment est aussi celui de la décharge du condensateur.

$$\boxed{\Delta t = 5 \tau = 5 R_f C = 7,5 \text{ ms}}$$

17. La caractéristique du dipôle masqué**

1. La loi des maille donne $E = u_R + u = R \left(i + C \frac{du}{dt} \right) + u$

$$\text{car } i_R = i + i_C$$

d'où

$$E = (u + R i) + RC \frac{du}{dt}$$

2. Étude qualitative

- (a) Sur la branche B'A, on a $i_{B'} = \frac{i_A}{u_A} u_{B'}$ et donc

$$u_{B'} + R i_{B'} = 27 \text{ V} < u + R i < u_A + R i_A = 80 \text{ V} < E = 100 \text{ V}$$

Par conséquent,
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{RC} [E - (u + R i)] > 0$$

Sur B'A, la tension u augmente au cours du temps $\left(\frac{du}{dt} > 0 \right)$ et l'on se déplace donc vers A.

- (b) Au point A, on a toujours $\frac{du}{dt} > 0$ car $u_A + R i_A = 80 \text{ V} < E$ et on ne peut donc pas se déplacer vers B car alors la tension diminuerait au cours du temps.
- (c) Au point B, on a au contraire $u_B + R i_B = 120 \text{ V} > E$ et de ce fait $\frac{du}{dt} < 0$, la tension ne peut que diminuer au cours du temps et ne peut donc pas aller vers le point A de tension supérieure.

3. Étude quantitative

- (a) Sur le segment B'A, on peut écrire $u = r_1 i$ avec $r = u_A / i_A = 600 \Omega$. En remplaçant dans l'équation différentielle trouvée précédemment, on obtient

$$E = \left(1 + \frac{R}{r_1}\right) u + RC \frac{du}{dt}$$

Avec un départ en B' pour condition initiale, il vient

$$u(t) = \frac{r_1}{r_1 + R} E (1 - e^{-t/\tau_1}) + u_{B'} e^{-t/\tau_1} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{R r_1}{R + r_1} C = 1,5 \text{ ms}$$

Il ne reste qu'à calculer le temps t_1 tel que $u(t_1) = u_A$. On obtient

$$t_1 = \tau_1 \ln \left(\frac{r_1 E - (r_1 + R) u_{B'}}{r_1 E - (r_1 + R) u_A} \right) = 1,9 \text{ ms}$$

- (b) Sur le segment AB', on a la relation

$$u = u_0 + r_2 i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_2 = \frac{u_{A'} - u_B}{i_{A'} - i_B} = 800 \Omega \\ u_0 = u_{A'} - r_2 i_{A'} = -380 \text{ V} \end{cases}$$

On en déduit l'équation $E + \frac{R}{r_2} u_0 = \left(1 + \frac{R}{r_2}\right) u + RC \frac{du}{dt}$

d'où de la même manière le temps t_2 pour passer de la tension $u_{A'}$ à la tension u_B

$$t_2 = \tau_2 \ln \left(\frac{r_2 E + R u_0 - (r_2 + R) u_{A'}}{r_2 E + R u_0 - (r_2 + R) u_B} \right) = 2,0 \text{ ms} \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{R r_2}{R + r_2} C = 1,6 \text{ ms}$$

18. Observation d'un circuit inductif**

1. Le courant est continu dans une bobine qui était nul avant la fermeture de l'interrupteur, donc

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

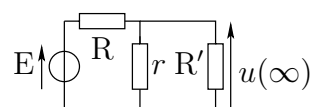
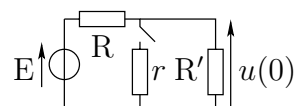
Si le courant est nul dans la branche contenant la bobine, c'est qu'il passe entièrement dans la résistance R' . La source de tension E ne « voit » que les résistances R et R' en série. Le diviseur de tension donne alors

$$u(0^+) = \frac{R'}{R + R'} E$$

Lorsque t tend vers l'infini, la bobine se comporte comme un fil. Les résistances r et R' , en parallèle, sont équivalentes à $R_{eq} = r R' / (r + R')$, d'où la tension donnée par un nouveau diviseur de tension

$$u(\infty) = \frac{R_{eq}}{R + R_{eq}} E = \frac{r R'}{R(r + R') + r R'} E$$

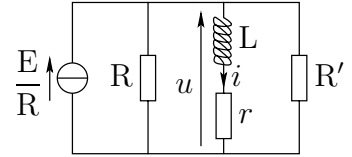
Enfin, la bobine étant toujours un fil pour $t \rightarrow \infty$, $u(\infty)$ est la tension aux bornes de r , d'où



$$i(\infty) = \frac{u(\infty)}{r} = \frac{R'}{R(r+R') + rR'} E$$

2. Si l'on transforme le générateur de Thévenin en générateur de Norton, la loi des nœuds donne la relation

$$\frac{E}{R} = \frac{u}{R} + i + \frac{u}{R'} \quad \text{Or,} \quad u = L \frac{di}{dt} + r i$$



d'où
$$\frac{E}{R} = \frac{1}{R} \left(L \frac{di}{dt} + r i \right) + i + \frac{1}{R'} \left(L \frac{di}{dt} + r i \right) \quad \text{soit} \quad \frac{E}{R} = \left(\frac{L}{R} + \frac{L}{R'} \right) \frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r}{R'} \right) i$$

ou encore
$$\frac{R' E}{RR' + r(R + R')} = \frac{L(R' + R)}{RR' + r(R + R')} \frac{di}{dt} + i = \tau \frac{di}{dt} + i$$

La fonction $i_p(t) = \frac{R' E}{RR' + r(R + R')} = i(\infty)$ est solution particulière de l'équation précédente et la fonction $i_h(t) = A e^{-t/\tau}$ est solution de l'équation homogène si l'on note $\tau = \frac{L(R' + R)}{RR' + r(R + R')}$.

On obtient donc
$$i(t) = \frac{R' E}{RR' + r(R + R')} + A e^{-t/\tau} = i(\infty) + A e^{-t/\tau}$$

La condition initiale $i(0) = 0$ impose alors $A = -i(\infty)$, ce qui mène à

$$i(t) = \frac{R' E}{RR' + r(R + R')} (1 - e^{-t/\tau})$$

Par construction,

$$i(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \frac{R' E}{RR' + r(R + R')} = i(\infty)$$

La tension $u(t)$ est celle de la branche contenant L en série avec r , d'où

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} + r i(t) = L \frac{RR' + r(R + R')}{L(R' + R)} \frac{R' E}{RR' + r(R + R')} e^{-t/\tau} + \frac{r R' E}{RR' + r(R + R')} (1 - e^{-t/\tau}) \\ &= \frac{r R' E}{RR' + r(R + R')} + R' E \left(\frac{1}{R + R'} - \frac{r}{RR' + r(R + R')} \right) e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

$$u(t) = \frac{r R' E}{RR' + r(R + R')} + \frac{RR'^2 E}{(R + R')(RR' + r(R + R'))} e^{-t/\tau}$$

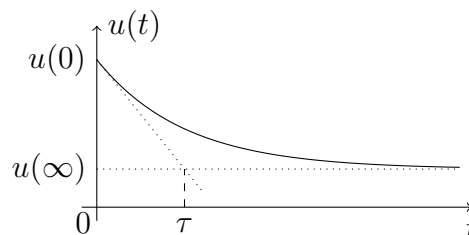
On a bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{r R' E}{RR' + r(R + R')} = u(\infty)$$

et

$$u(0) = \frac{r R' E}{RR' + r(R + R')} + \frac{RR'^2 E}{(R + R')(RR' + r(R + R'))} = \frac{R'}{R + R'} E$$

3. Sur le graphique, on peut mesurer $u(0) = 3,25 \text{ V}$, $u(\infty) = 0,84 \text{ V}$ et $\tau = 29 \text{ ms}$. τ se trouve au croisement de la tangente à l'origine avec l'asymptote horizontale.



(a) La mesure de $u(\infty)$ permet d'extraire la valeur de r en fonction de R , R' et E :

$$u(\infty) = \frac{r R' E}{RR' + r(R + R')} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{RR' u(\infty)}{R' E - (R + R') u(\infty)} = 11 \, \Omega$$

Pour $t = \tau$, on a croisement de la tangente à l'origine avec l'asymptote horizontale. Maintenant que r a été déterminé, on obtient,

$$\tau = \frac{L(R' + R)}{RR' + r(R + R')} \iff L = \frac{RR' + r(R + R')}{R' + R} \tau = 1,3 \text{ H}$$

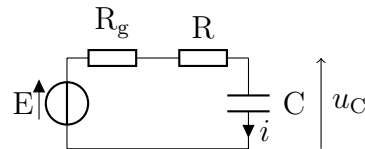
(b) La valeur initiale de la tension permet d'avoir accès à la résistance interne du générateur

$$u(0) = \frac{R'}{R + R'} E \iff R = \frac{R'(E - u(0))}{u(0)} = 54 \Omega$$

19. Charges et décharges : vers un « régime permanent »**

1. Première charge

(a) Le schéma de charge est donné ci-contre.



(b) En utilisant la loi des mailles et le fait que le courant est celui qui traverse le condensateur donc $i = C \frac{du_C}{dt}$, on obtient

$$E = R_g i + R i + u_C \quad \text{soit} \quad E = (R_g + R) C \frac{du_C}{dt} + u_C$$

(c) On a affaire à une équation différentielle linéaire à coefficients constants de solution particulière $u_{Cp} = E$ et de solution homogène³ $u_{Ch} = Ae^{-t/\tau}$ en posant $\tau = (R_g + R)C$. La solution générale s'écrit donc, avec A une constante à déterminer,

$$u_C = E + Ae^{-t/\tau}$$

(d) La tension est continue aux bornes du condensateur. Comme de plus $u_C(0^-) = 0$ puisque le condensateur est initialement déchargé, la condition initiale s'écrit

$$u_C(0^+) = 0$$

(e) Avec l'expression générale déterminée précédemment, on a

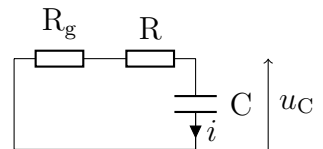
$$u_C(0) = E + A \quad \text{d'où} \quad A = -E$$

soit

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

2. Première décharge

(a) Le schéma équivalent pour $t \in [T/2; T]$ est présenté ci-contre.



(b) Le condensateur est à présent chargé sous la tension $u_C(T^-/2)$. La continuité de la tension aux bornes du condensateur permet donc d'affirmer

$$u_0 = E(1 - e^{-T/2\tau})$$

(c) Le même raisonnement que précédemment permet d'obtenir l'équation différentielle

$$0 = (R_g + R) C \frac{du_C}{dt} + u_C$$

3. L'exponentielle est votre amie!

- (d) L'équation est déjà homogène : la solution générale s'écrit donc $A'e^{-t/\tau}$. La condition « initiale » en $t = T/2$ donne que

$$A'e^{-T/2\tau} = u_0$$

soit

$$u_C(t) = u_0 e^{-(t-T/2)/\tau}$$

3. Deuxième charge

- (a) La continuité de la tension donne que $u_C(T) = u_C(T^-)$ soit

$$v_1 = u_C(T^-) = u_0 e^{-T/2\tau}$$

- (b) On retrouve la même équation différentielle que pour la première charge, donc la même solution générale $E + Ae^{-t/\tau}$. La nouvelle condition initiale (en $t = T$) implique que

$$E + Ae^{-T/\tau} = v_1$$

soit

$$u_C(t) = E(1 - e^{-(t-T)/\tau}) + v_1 e^{-(t-T)/\tau}$$

4. Relation de récurrence

- (a) La valeur de $u_0 = u_C(T/2)$ a été calculée précédemment. Quant à v_0 , il s'agit tout simplement de $u_C(0)$, c'est-à-dire

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = E(1 - e^{-T/2\tau})$$

- (b) Sur l'intervalle de temps $[nT; (n+1/2)T]$, on observe la charge qui démarre à la valeur « initiale » $u_C(nT) = v_n$, soit une expression générale

$$u_C(t) = E(1 - e^{-(t-nT)/\tau}) + v_n e^{-(t-nT)/\tau}$$

Il suffit alors de prendre la valeur en $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$ pour en déduire

$$u_n = E(1 - e^{-T/2\tau}) + v_n e^{-T/2\tau}$$

Sur l'intervalle $[(n+1/2)T; (n+1)T]$, c'est la décharge qui démarre à la valeur « initiale » $u_C(nT+T/2) = u_n$ soit

$$u_C(t) = u_n e^{-[t-(n+\frac{1}{2})T]/\tau}$$

v_{n+1} est la valeur prise en $t = (n+1)T$, soit

$$v_{n+1} = u_n e^{-T/2\tau}$$

- (c) En substituant u_n dans les deux relations précédentes, il vient

$$v_{n+1} = E(1 - e^{-T/2\tau})e^{-T/2\tau} + v_n e^{-T/\tau}$$

En utilisant la relation fournie dans l'énoncé, on en déduit (puisque $v_0 = 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = E(1 - e^{-T/2\tau})e^{-T/2\tau} \frac{1 - e^{-nT/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} + v_0 e^{-nT/\tau} = E(1 - e^{-T/2\tau})e^{-T/2\tau} \frac{1 - e^{-nT/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

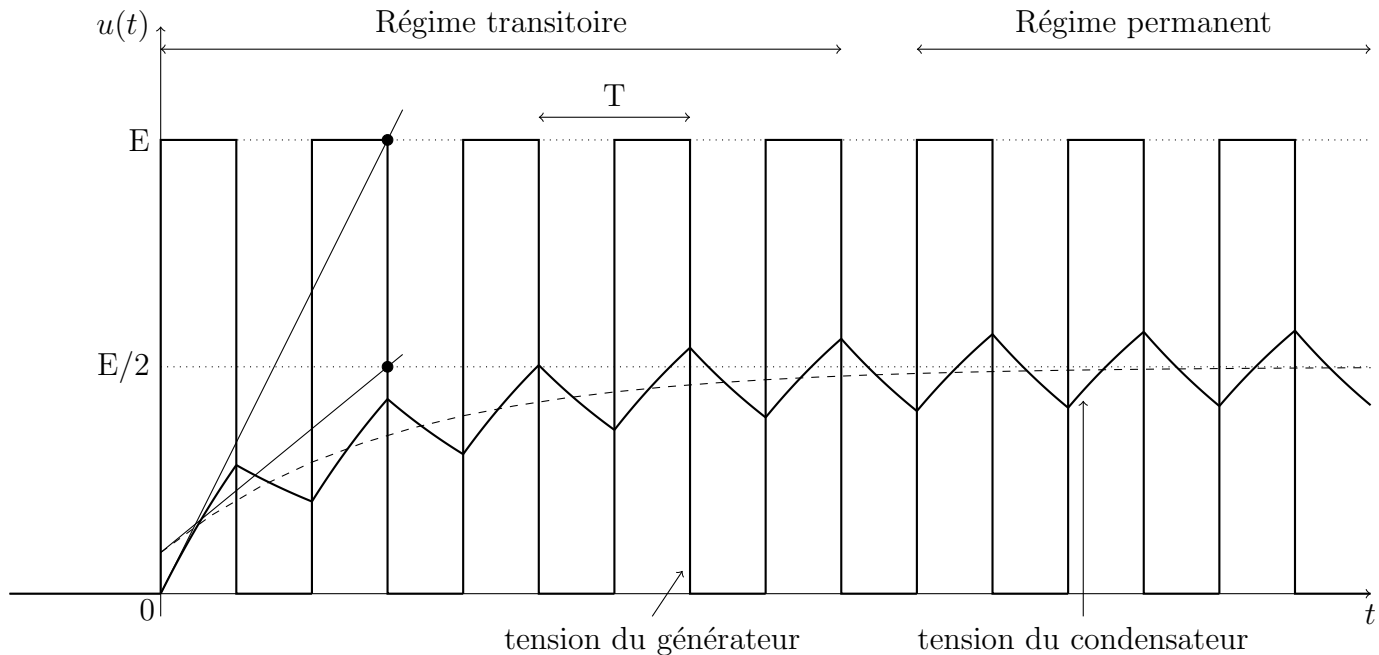
- (d) En inversant la seconde relation de récurrence, on a aisément

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_{n+1} e^{T/2\tau} = E(1 - e^{-T/2\tau}) \frac{1 - e^{-(n+1)T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

(e) La suite v_n tend vers $v_\infty = \frac{E(1 - e^{-T/2\tau})e^{-T/2\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$ et l'on cherche la première valeur de n telle que $\frac{v_\infty - v_n}{v_\infty} = e^{-nT/\tau} \leq 0,05$ soit

$$n \geq \frac{\tau}{T} \ln(20)$$

5. La courbe complétée de toutes les annotations est la suivante



Pour mesurer τ , il suffit de regarder l'intersection de la tangente à l'origine de la courbe $u_C(t)$ (de la forme $E(1 - e^{-t/\tau})$) avec son asymptote E. On lit

$$\tau = \frac{3T}{2}$$

Comme $\ln(20) = \ln(10) + \ln(2) = 3$, la condition trouvée pour la régime permanent s'écrit

$$n \geq 3 \times 3/2 = 4,5$$

Il faut 4 périodes et demi du signal générateur (3τ) pour atteindre le régime permanent.

En regardant la fonction « moyenne » (ie qui passe au milieu de la courbe en dents de scie), on « pressent » qu'elle est aussi du type $\alpha + \beta e^{-t/\tau}$ où $\alpha = E/2$. On peut donc retrouver τ par l'intersection de l'asymptote $E/2$ avec la tangente à l'origine, ce qui redonne bien $\tau = 3T/2$, résultat cohérent avec la détermination précédente.

20. Détecteur de particules***

1. La loi des nœuds donne

$$i_0(t) = i_R + i_C = \frac{V_s}{R} + C \frac{dV_s}{dt}$$

d'où

$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{RC} V_s = \frac{I_0}{C} e^{-t/\tau}$$

2. Avec l'expression fournie,

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{ARI_0}{\tau} \left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{k} e^{-t/(k\tau)} \right)$$

On peut déjà voir qu'elle vérifie la condition initiale $V_s(0) = 0$ puisque le condensateur est initialement déchargé et que la tension est continue à ses bornes. Reste à vérifier qu'elle vérifie l'équation différentielle. En l'y remplaçant et en utilisant $RC = k\tau$ comme défini dans l'énoncé, on obtient

$$\frac{I_0}{C} e^{-t/\tau} = \frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{k\tau} V_s = -\frac{ARI_0}{\tau} \left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{k} e^{-t/(k\tau)} \right) + \frac{ARI_0}{k\tau} (e^{-t/\tau} - e^{-t/(k\tau)}) = \frac{AI_0(1-k)}{C} e^{-t/\tau}$$

En identifiant les deux bouts

$$A = \frac{1}{1-k}$$

3. Recherche d'une solution pour $k = 1$

(a) En posant $k = 1 - \varepsilon$, on obtient

$$V_s = \frac{RI_0}{\varepsilon} (e^{-t/\tau} - e^{-t/(1-\varepsilon)\tau}) \approx \frac{RI_0}{\varepsilon} (e^{-t/\tau} - e^{-(1+\varepsilon)t/\tau}) = \frac{RI_0}{\varepsilon} e^{-t/\tau} (1 - e^{-\varepsilon t/\tau}) \approx \frac{RI_0}{\varepsilon} e^{-t/\tau} \frac{\varepsilon t}{\tau}$$

d'où

$$V_s \approx RI_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

(b) Stricto sensu, l'expression précédente n'est valable que pour t au maximum de l'ordre de τ pour que le développement en $\varepsilon \ll 1$ puisse être fait. Néanmoins, on va voir s'il ne s'agit pas de la solution générale pour $k = 1$. Calculons

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{RI_0}{\tau} e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

d'où

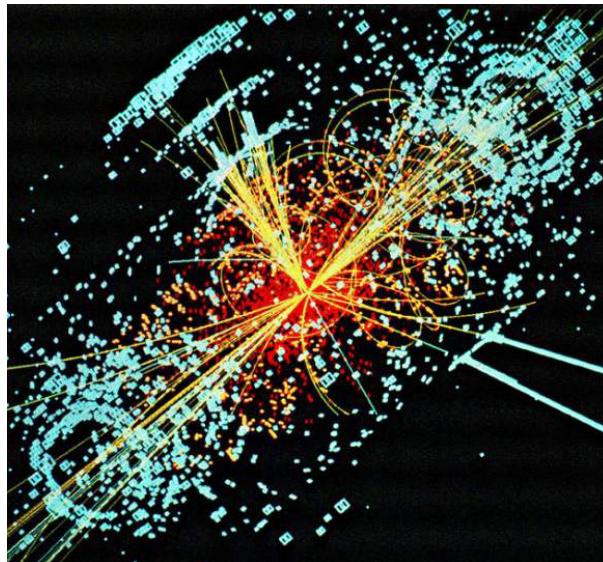
$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{\tau} V_s = \frac{RI_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{I_0}{C} e^{-t/\tau}$$

Comme en outre elle vérifie la condition initiale $V_s(0) = 0$

$$V_s : t \mapsto RI_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \text{ est bien la solution de notre problème pour } k = 1.$$

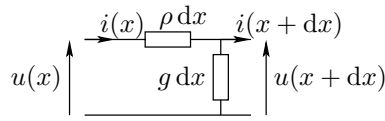
4. Le calcul précédent de la dérivée permet de dire que V_s passe par un maximum pour $t = \tau$, d'où

$$t_0 = \tau \quad \text{et} \quad V_s(t_0) = RI_0 e^{-1}$$



21. Clôture électrique***

1. Un élément de clôture de longueur dx est constitué d'une résistance ρdx reliée à la terre par une conductance $g dx$ (donc une résistance associée $1/g dx$) suivant le schéma



2. La loi d'Ohm appliquée à la résistance ρdx donne, au premier ordre,

$$\rho dx i(x) = u(x) - u(x + dx) \approx -\frac{du}{dx} dx$$

d'où

$$\boxed{\rho i(x) = -\frac{du}{dx}} \quad (1)$$

La loi des nœuds quant à elle permet d'écrire

$$g dx u(x + dx) + i(x + dx) = i(x)$$

Comme au premier ordre on a

$$i(x) - i(x + dx) \approx -\frac{di}{dx} dx \quad \text{et} \quad u(x + dx) \approx u(x)$$

alors

$$\boxed{g u(x) = -\frac{di}{dx}} \quad (2)$$

3. En remplaçant l'équation (1) dans l'équation (2), on obtient l'équation du second ordre vérifiée par $u(x)$:

$$\boxed{\rho g u(x) = \frac{d^2 u}{dx^2}}$$

On trouve bien des solutions sous la forme

$$u(x) = \alpha e^{\kappa x} + \beta e^{-\kappa x}$$

à condition de prendre

$$\boxed{\kappa = \sqrt{\rho g}}$$

Le courant $i(x)$ est obtenu par application de l'équation (1)

$$\boxed{i(x) = \sqrt{\frac{g}{\rho}} (-\alpha e^{\kappa x} + \beta e^{-\kappa x})}$$

4. Si le parc est ouvert à son extrémité, alors les conditions aux limite s'écrivent

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad i(L) = 0$$

En effet, le circuit étant ouvert en bout de clôture, le courant doit nécessairement y être nul. Ainsi, les constantes α et β sont solutions du système

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ 0 = -\alpha e^{\kappa L} + \beta e^{-\kappa L} \end{cases}$$

qui se résout aisément en

$$\begin{cases} \alpha = \frac{u_0}{1 + e^{2\kappa L}} \\ \beta = \frac{u_0 e^{2\kappa L}}{1 + e^{2\kappa L}} = \frac{u_0}{e^{-2\kappa L} + 1} \end{cases}$$

On peut vérifier que la seule position où la tension est minimum est en $x = L$ puisque sa dérivée $\rho i(L)$ y est nulle. On cherche donc g tel que

$$\begin{aligned} u_0(L) &> \frac{u_0}{2} \\ \frac{u_0}{1 + e^{2\kappa L}} e^{\kappa L} + \frac{u_0}{e^{-2\kappa L} + 1} e^{-\kappa L} &> \frac{u_0}{2} \\ \frac{u_0}{2 \operatorname{ch}(\kappa L)} + \frac{u_0}{2 \operatorname{ch}(\kappa L)} &> \frac{u_0}{2} \\ \operatorname{ch}(\kappa L) &< 2 \end{aligned}$$

Ce qui donne la condition

$$g < \frac{\operatorname{Argch}^2(2)}{\rho L^2} = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ S.m}^{-1}$$

Par analogie avec les formes exponentielles complexes des fonctions cos et sin, on définit les cosinus et sinus dits « hyperboliques » à l'aide des exponentielles réelles selon la correspondance

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Les fonctions hyperboliques permettent souvent de simplifier l'écriture d'expressions symétriques en exponentielles et sont connues de vos calculatrices. Elle vérifient certaines identités « trigonométriques » dont la relation

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

La fonction Argch est la fonction réciproque de ch et est telle que

$$\operatorname{Argch}(\operatorname{ch} x) = |x| \quad \text{car } \operatorname{ch} \text{ est paire}$$

mais vous reverrez tout cela en cours de mathématiques.

5. Si le générateur est relié aux deux brins du fil, alors les conditions limites s'écrivent

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u(L) = u_0$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_0 = \alpha e^{\kappa L} + \beta e^{-\kappa L} \end{cases}$$

Réolvons en faisant un petit pivot de Gauss

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_0(1 - e^{\kappa L}) = 0 + \beta(e^{-\kappa L} - e^{\kappa L}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = u_0 \frac{1 - e^{\kappa L}}{e^{-\kappa L} - e^{\kappa L}} = u_0 \frac{e^{\kappa L/2}(e^{-\kappa L/2} - e^{\kappa L/2})}{(e^{-\kappa L/2} - e^{\kappa L/2})(e^{-\kappa L/2} + e^{\kappa L/2})} = u_0 \frac{e^{\kappa L/2}}{e^{-\kappa L/2} + e^{\kappa L/2}} \\ \alpha = u_0 \frac{e^{-\kappa L} - 1}{e^{-\kappa L} - e^{\kappa L}} = u_0 \frac{e^{-\kappa L/2}}{e^{-\kappa L/2} + e^{\kappa L/2}} \end{cases} \end{aligned}$$

On cherche l'endroit pour lequel la tension est minimale, c'est-à-dire tel que

$$\alpha \kappa e^{\kappa x} - \beta \kappa e^{-\kappa x} = 0$$

$$\alpha e^{\kappa x} = \beta e^{-\kappa x}$$

$$e^{-\kappa L/2} e^{\kappa x} = e^{\kappa L/2} e^{-\kappa x}$$

$$e^{2\kappa x} = e^{\kappa L}$$

$$x = \frac{L}{2}$$

On aurait pu arriver à cette conclusion directement par un argument de symétrie, le rôle des points A et B étant interchangeable.

La condition s'écrit alors

$$\frac{u(L/2)}{u_0} = \frac{1}{e^{-\kappa L/2} + e^{\kappa L/2}} + \frac{1}{e^{-\kappa L/2} + e^{\kappa L/2}} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{ch}(\kappa L/2)} + \frac{1}{2 \operatorname{ch}(\kappa L/2)} > \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{ch}(\kappa L/2) < 2$$

Ce qui donne

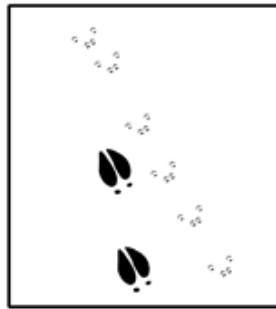
$$g < \frac{4 \operatorname{Argch}^2(2)}{\rho L^2} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$$

Pour une même perte de tension acceptable autour de la clotûre, on gagne une longueur de fil à fermer le circuit.

BACKYARD SNOW TRACKING GUIDE



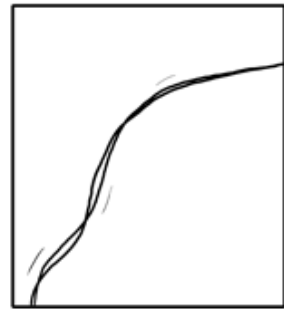
CAT



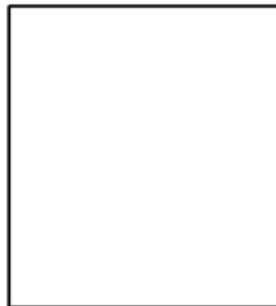
MOOSE AND SQUIRREL



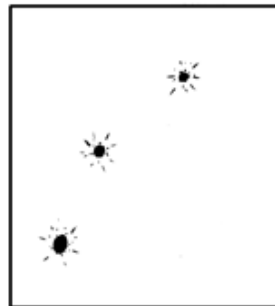
LONGCAT



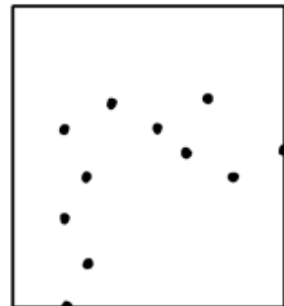
MOUSE RIDING BICYCLE

RABBIT STOPPING
TO USE HAIR DRYER

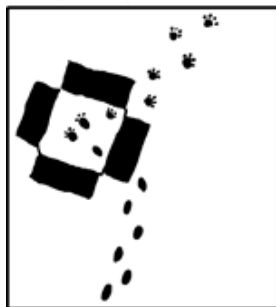
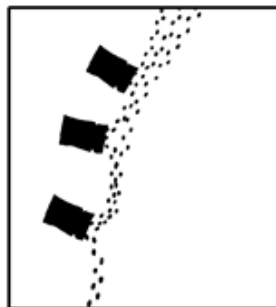
LEGOLAS



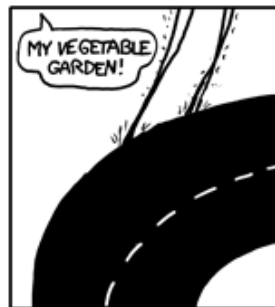
BOBCAT ON POGO STICK



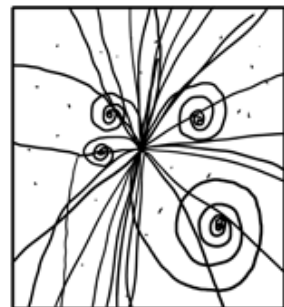
KNIGHT

KID WITH
TRANSMOGRIFIER

KID WITH DUPLICATOR

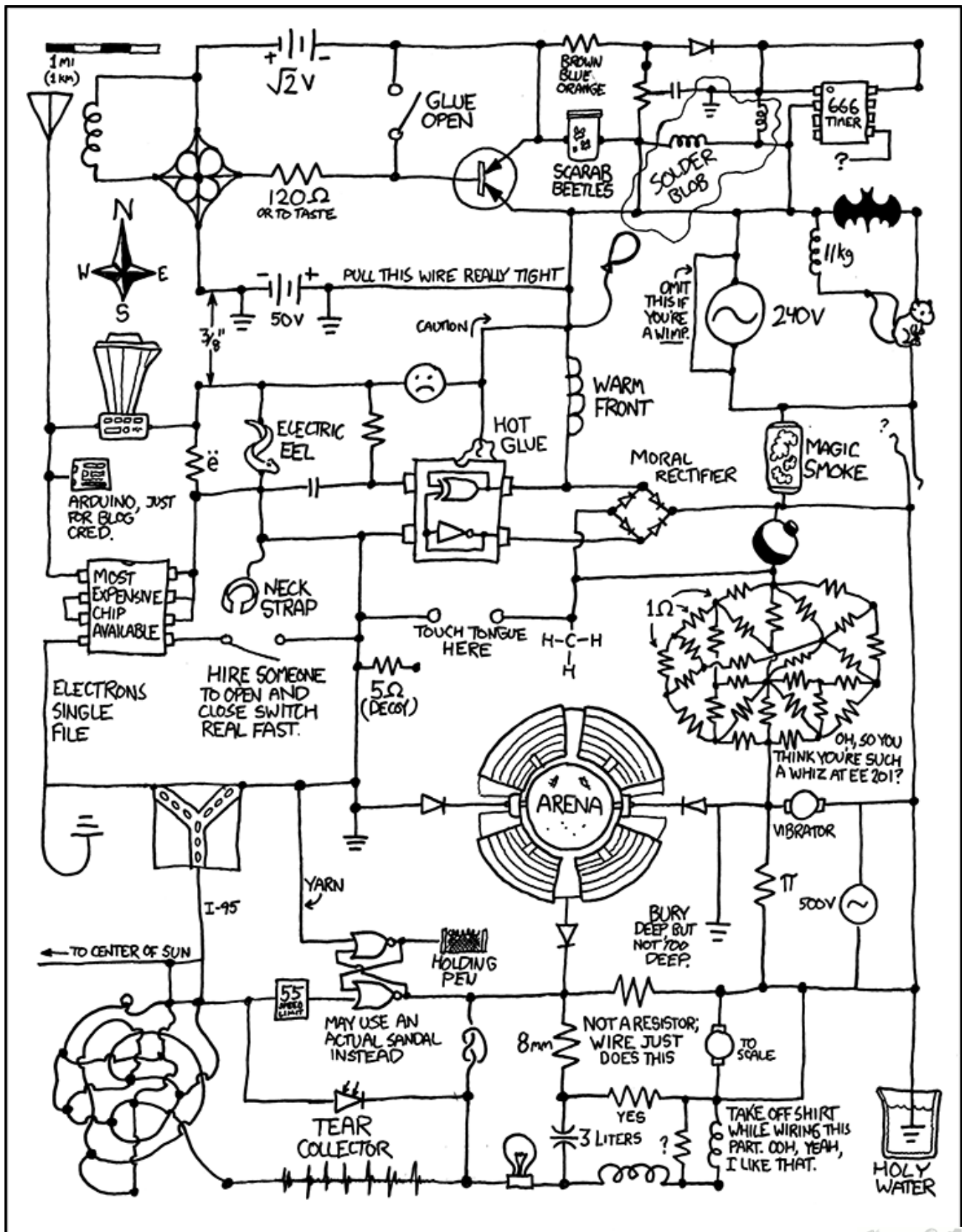


PRIUS



HIGGS BOSON

I suppose that's more accurately a hare dryer.



I just caught myself idly trying to work out what that resistor mass would actually be, and realized I had self-nerd-sniped.

