Circuits électriques dans l'ARQS

1. Convention de signe None available.

2. Dipôle non linéaire None available.

3. Résistance équivalente None available

4. Diode réelle None available.

5. Diode modèle* None available.

6. Montage écrêteur* None available.

7. Optimisation de puissance* None available

8. Batteries automobiles* None available

9. Bilan de puissance en régime périodique non sinusoïdal* None available.

10. Sources Idéales* None available.

11. Caractéristique** None available.

12. Chaîne résistive**

1. En regardant la maille entre la n^{e} et la $n+1^{\text{e}}$ résistance verticale, la loi des maille permet d'écrire

$$\mathrm{R}\, i_n = \mathrm{R}\, i_{n+1} + 2\mathrm{R}\left(\mathrm{I} - \sum_{k=1}^{n} i_k\right)$$

En simplifiant les R et en injectant la relation proposée $i_n = i_0\,\lambda^n$ dans cette dernière relation, il vient

$$i_0\,\lambda^n = i_0\,\lambda^{n+1} + 2\left(\mathrm{I} - i_0 \sum_{k=1}^{n} \lambda^k\right) = i_0\,\lambda^{n+1} + 2\left(\mathrm{I} - i_0\,\lambda \sum_{k'=0}^{n-1} \lambda^{k'}\right) = i_0\,\lambda^{n+1} + 2\left(\mathrm{I} - i_0\,\lambda\,\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right)$$

soit $$i_0\,\lambda^n\,(1-\lambda) = i_0\,\lambda^n\,\lambda\,(1-\lambda) + 2\,(\mathrm{I}\,(1-\lambda) - i_0\,\lambda\,(1-\lambda^n))$$

On réarrange pour mettre tous les λ^n ensemble,

$$\lambda^n\, i_0\left[1 - 4\lambda + \lambda^2\right] = 2\,(\mathrm{I}\,(1-\lambda) - i_0\,\lambda)$$

Cette relation devant être valable pour toute valeur de n, il est nécessaire [1] que chaque membre soit nul, ce qui permet d'arriver au système

$$1 - 4\lambda + \lambda^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}\,(1-\lambda) - i_0\,\lambda = 0$$

1. Sauf cas dégénéré où $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$ dont il est facile de vérifier qu'ils ne conviennent pas.

soit $\boxed{\lambda = \dfrac{4-\sqrt{12}}{2} = 2-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad i_0 = \mathrm{I}\dfrac{1-\lambda}{\lambda} = \mathrm{I}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}}$

La solution $\lambda = 2+\sqrt{3}$ n'est bien entendu pas physiquement acceptable puisqu'elle est supérieure à 1 et entraîne une divergence [2].

2. Avec le travail effectué précédemment, on obtient

$$\boxed{i_n = \mathrm{I}\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)^n = \mathrm{I}\,(\sqrt{3}-1)\,(2-\sqrt{3})^{n-1}}$$

La tension u aux bornes de la chaîne s'écrit

$$u = 2\mathrm{RI} + \mathrm{R}\,i_1 = 2\mathrm{RI} + \mathrm{RI}\,(\sqrt{3}-1) = \left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{RI}$$

La résistance $\mathrm{R_c}$ de la chaîne est telle que $u = \mathrm{R_c\,I}$, ainsi,

$$\boxed{\mathrm{R_c} = \frac{u}{\mathrm{I}} = \left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{R}}$$

3. La résistance entre A et A′ correspond à R en série avec l'ensemble $\mathrm{R}//(\mathrm{R}\oplus\mathrm{R_0})$. Ainsi,

$$\mathrm{R_{AA'}} = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}\,(\mathrm{R}+\mathrm{R_0})}{\mathrm{R}+(\mathrm{R}+\mathrm{R_0})} = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}\,(\mathrm{R}+\mathrm{R_0})}{2\mathrm{R}+\mathrm{R_0}}$$

On cherche $\mathrm{R_0}$ tel que $\mathrm{R_{AA'}} = \mathrm{R_0}$, ce qui donne l'équation

$$\mathrm{R_0} = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}\,(\mathrm{R}+\mathrm{R_0})}{2\mathrm{R}+\mathrm{R_0}}$$

soit $(\mathrm{R_0}-\mathrm{R})(2\mathrm{R}+\mathrm{R_0}) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R}+\mathrm{R_0})$

ou encore ${\mathrm{R_0}}^2 = 3\mathrm{R}^2$ soit $\boxed{\mathrm{R_0} = \sqrt{3}\,\mathrm{R}}$

On se rend compte que

$$\boxed{\mathrm{R_c} = \mathrm{R} + \mathrm{R_0}}$$

ce qui est logique puisque la chaîne toute entière est en fait une résistance R à laquelle on a rajouté une infinité des monômes proposés.

13. Résistance itérative**

1. On cherche $\mathrm{R_1}$ telle que $\mathrm{R_1} = \dfrac{(2\mathrm{R}+\mathrm{R_1})\,\mathrm{R}}{(2\mathrm{R}+\mathrm{R_1})+\mathrm{R}}$ $\qquad (\mathrm{R} \parallel [\mathrm{R}\oplus\mathrm{R_1}\oplus\mathrm{R}])$

c'est à dire $(3\mathrm{R}+\mathrm{R_1})\,\mathrm{R_1} = (2\mathrm{R}+\mathrm{R_1})\,\mathrm{R}$

ou encore ${\mathrm{R_1}}^2 + 2\mathrm{R}\,\mathrm{R_1} - 2\mathrm{R}^2 = 0$

La résolution du trinôme donne $\mathrm{R_1} = \dfrac{-2\mathrm{R} \pm \sqrt{12}\,\mathrm{R}}{2}$

dont la seule solution positive est $\boxed{\mathrm{R_1} = \left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{R}}$

2. Notons que l'on a supposé $\lambda < 1$ pour calculer la somme des λ^k, cette solution serait donc incohérente avec nos hypothèses de travail.

2. Par formule du diviseur de tension dans la dernière branche, on trouve

$$u_n = \frac{\mathrm{R}_1}{2\mathrm{R}+\mathrm{R}_1}\,u_{n-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\,u_{n-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\,u_{n-1} = \left(2-\sqrt{3}\right)u_{n-1}$$

Comme le carré de résistance $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}$ peut être remplacé par une simple résistance R_1 entre A_{n-1} et B_{n-1} avec la valeur trouvée en question 1, la même relation relie u_{n-1} à u_{n-2} et ainsi de suite jusqu'à u_1 et u_0. Au final, on a

$$\boxed{u_n = (2-\sqrt{3})^n\,u_0}$$

14. Cuve à électrolyse**

1. Supposons plutôt que $i = 0$ et trouvons une condition sur i_0 pour que cela soit possible. Ainsi, prendre la négation de cette condition garantira que le courant i n'est pas nul.
Ainsi, si $i = 0$, le courant i_0 part tout entier dans la résistance R, de sorte que la tension u à ses bornes (qui est aussi la tension aux bornes de la cuve) vaille $u = \mathrm{R}i_0$. Comme sur la caractéristique, on voit que i n'est nul que si $|u| \leqslant e'$, on en déduit que

$$i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |i_0| \leqslant \frac{e'}{\mathrm{R}}$$

Par négation, on trouve alors

$$\boxed{|i_0| > \frac{e'}{\mathrm{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad i \neq 0}$$

2. Supposons à présent que $i > 0$. La tension u aux bornes de la cuve peut donc être exprimée en fonction de i en suivant la droite indiquée sur la caractéristique. Cette dernière s'écrit (partie droite de la courbe) sous la forme

$$i = \frac{u-e'}{r} \qquad \text{soit} \qquad u = r\,i + e'$$

Le courant i_0 du générateur s'écoule pour partie dans la cuve (i) et pour partie dans la résistance (u/R) de sorte que la loi des nœuds puisse s'écrire

$$i_0 = i + \frac{u}{\mathrm{R}} = i + \frac{r\,i+e'}{\mathrm{R}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i = \frac{i_0 - e'/\mathrm{R}}{1+r/\mathrm{R}}}$$

On vérifie au passage que on a bien $i > 0$ quand $i_0 > e'/\mathrm{R}$, ce qui correspond à la condition que l'on a trouvé plus haut.

3. Calculons la puissance reçue par la cuve. Celle-ci s'écrit

$$\mathscr{P} = u \times i = (r\,i + e') \times i = r\,i^2 + e'\,i$$

Cette puissance doit être inférieure à la puissance maximale $\mathscr{P}_{\max}$ ce qui donne

$$r\,i^2 + e'\,i \leqslant \mathscr{P}_{\max} \qquad \text{soit} \qquad r\,i^2 + e'\,i - \mathscr{P}_{\max} \leqslant 0$$

Ce trinôme en i est négatif entre ses racines (car le coefficient du terme dominant est positif). L'équation est donc vérifier entre i_- et i_+ tels que

$$i_\pm = \frac{-e' \pm \sqrt{e'^2 + 4r\,\mathscr{P}_{\max}}}{2r}$$

De ces deux expressions, seul i_+ est positif, c'est donc la valeur maximale $i_{\max}$ de i acceptable sans abîmer le dispositif. Il ne reste plus qu'à trouver la valeur maximale correspondante de i_0 puisqu'on connaît le lien entre i et i_0. Ainsi, en inversant la relation trouvée à la question précédente, on obtient

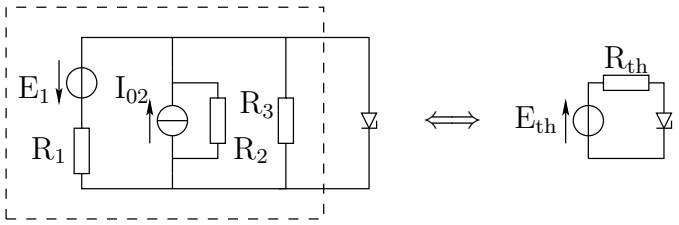
$$\boxed{i_{0,\max} = \frac{e'}{\mathrm{R}} + \left(1+\frac{r}{\mathrm{R}}\right)i_{\max} = \frac{e'}{\mathrm{R}} + \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\mathrm{R}}\right)\frac{-e' + \sqrt{e'^2 + 4r\,\mathscr{P}_{\max}}}{2}}$$

15. Pont de Wheatstone et jauges de contrainte** None available.

16. Traitement général d'un pont de Wheatstone résistif** None available.

17. Diode Zéner et modélisation**

1. On modélise la partie en pointillés par un générateur de Thévenin :



Pour ce faire, on utilise les équivalences Thévenin/Norton.

On transforme l'association E_1 en série avec R_1 par l'association parallèle d'un générateur de courant fournissant $\eta = -E_1/R_1$, η étant orienté dans le même sens que I_{02}. La résistance totale équivalente R_{eq} est telle que $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$. Et en l'occurrence, $R_{eq} = R_{th}$. Soit :

$$\boxed{R_{th} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = 4{,}3\ \Omega}$$

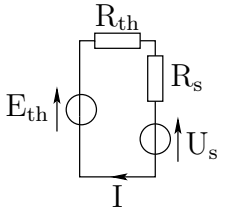
La force électromotrice de Thévenin se déduit de la transformation précédente :

$$\boxed{E_{th} = R_{th}\left(I_{02} - \frac{E_1}{R_1}\right) = \frac{R_2R_3(R_1I_{02} - E_1)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}$$

A.N. : $E_1 = 5{,}8$ V : $\boxed{E_{th} = 1{,}2\ \text{V}}$; $E_1 = 8{,}0$ V : $\boxed{E_{th} = 0{,}31\ \text{V}}$; $E_1 = 17$ V : $\boxed{E_{th} = -3{,}2\ \text{V}}$.

2. Pour $E_1 = 5{,}8$ V : $E_{th} = 1{,}2$ V. La valeur de la tension E_{th} est supérieure à U_s ; la diode est passante dans le sens direct.
L'intensité I qui traverse la diode s'exprime par :

$$\boxed{I = \frac{E_{th} - U_s}{R_s + R_{th}}}$$



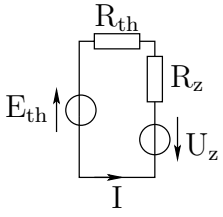
Le sens « réel » du courant est indiqué sur le schéma ci-contre.

Application numérique : $\boxed{I = 0{,}073\ \text{A}}$

3. Pour $E_1 = 8{,}0$ V : $E_{th} = 0{,}31$ V. La valeur de la tension E_{th} est comprise entre $-U_z$ et U_s ; la diode est bloquée et $\boxed{I = 0}$.

4. Pour $E_1 = 17$ V : $E_{th} = -3{,}2$ V. La valeur de la tension E_{th} est inférieure à $-U_z$; la diode est passante dans le sens inverse.
L'intensité I qui traverse la diode s'exprime par :

$$\boxed{I = -\frac{E_{th} + U_z}{R_z + R_{th}}}$$



Le sens « réel » du courant est indiqué sur le schéma ci-contre.

Application numérique : $\boxed{I = 0{,}056\ \text{A}}$

18. Stabilisation de tension par diode Zener***

1. Par application de la formule du diviseur de tension, on a directement

$$\boxed{U = \frac{R}{R+r}E = 8\,V}$$

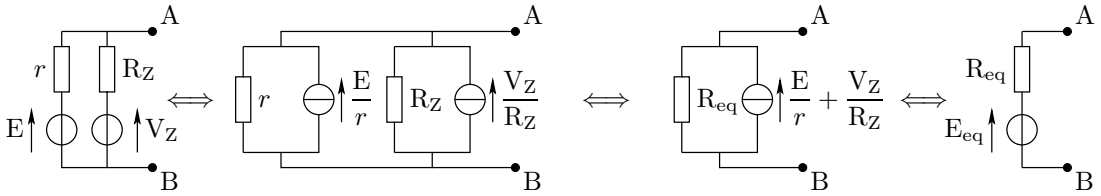
Pour faire apparaître le facteur de stabilisation S, calculons la différentielle de U. E et r étant fixés,

$$dU = \frac{dR}{R+r}E - \frac{R\,dR}{(R+r)^2}E = \frac{r\,dR}{(R+r)^2}E = \frac{r\,dR}{R(R+r)}U$$

Il vient $$\boxed{S = \frac{dR}{R}\frac{U}{dU} = 1 + \frac{R}{r} = 5}$$

2. Le montage de la diode Zener va permettre un facteur de stabilisation plus élevé, donc une moindre variation de tension de sortie lorsque l'on modifie la résistance de charge R.

   (a) En premier lieu, sommons les deux dipôles de Thévenin en parallèle en passant par leur conformation de Norton, puis il suffit de retransformer la configuration de Norton unifiée en configuration de Thévenin.



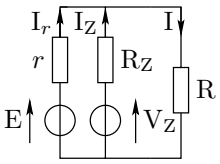
où $$\boxed{R_{eq} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_Z}\right)^{-1} = \frac{r\,R_Z}{r+R_Z} \approx 3{,}7\,\Omega \quad \text{et} \quad E_{eq} = \left(\frac{E}{r} + \frac{V_Z}{R_Z}\right)R_{eq} \approx 5{,}4\,V}$$

   (b) De même que précédemment, la tension U aux bornes de R et le facteur de stabilisation sont donnés par

$$\boxed{U = \frac{R}{R+R_{eq}}E_{eq} \approx 5{,}3\,V \qquad \text{et} \qquad S = 1 + \frac{R}{R_{eq}} = 55}$$

   (c) Les courants circulant dans les trois branches valent respectivement

$$\boxed{I = \frac{U}{R} \approx 26\,mA, \qquad I_r = \frac{E-U}{r} \approx 95\,mA \qquad \text{et} \qquad I_Z = \frac{V_Z - U}{R_Z} \approx -68\,mA}$$

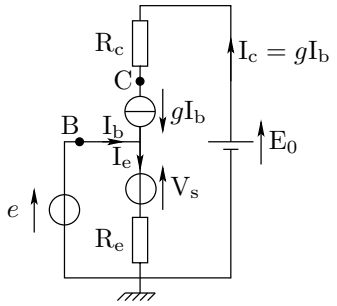


> On peut noter que le courant passant dans la diode est *négatif* ainsi défini et donc qu'il passe en réalité vers le bas, ce qui correspond bien au sens passant « Zener » d'après le schéma défini dans l'énoncé.

   (d) La stabilisation est bien plus efficace car la diode impose sa tension seuil (qui varie peu en fonction du courant) et absorbe les variations de courant induites par la modification de la résistance d'utilisation R. Ainsi, le générateur fourni toujours quasiment le même couple courant-tension, la diode absorbant le surplus.

   (e) Pour R = 50 Ω, on trouve U = 5,0 V : on sort du domaine de linéarisation de la diode et la stabilisation ne fonctionne plus.

19. Modélisation d'un transistor NPN***



1. Le courant qui circule dans la branche contenant le point C vaut $I_c = gI_b$, mais aussi, avec cette orientation
$$I_c = \frac{E_0 - V_C}{R_c} \qquad \text{d'où} \qquad V_C = E_0 - R_c\, gI_b$$
Il ne reste plus qu'à exprimer I_b en fonction de e à l'aide de la loi des nœuds en B
$$I_e = I_b + gI_b = (1+g)\, I_b$$
et de la loi des mailles donnant la tension aux bornes de la résistance R_e
$$V_e = e - V_s = R_e I_e$$
Ainsi,
$$\boxed{V_C = E_0 - \frac{R_c}{R_e}\frac{g}{1+g}(e - V_s)}$$
Si l'on remplace e par $e + v$, alors V_C est remplacé par
$$V_C + V = E_0 - \frac{R_c}{R_e}\frac{g}{1+g}(e + v - V_s)$$
d'où
$$\boxed{V = -\frac{R_c}{R_e}\frac{g}{1+g}\, v}$$

2. Comme $g \gg 1$,
$$\frac{g}{1+g} \approx 1$$
Et de ce fait, l'amplification en tension V ne dépend pas de la valeur exacte de g tant qu'elle fluctue en restant très supérieure à 1.

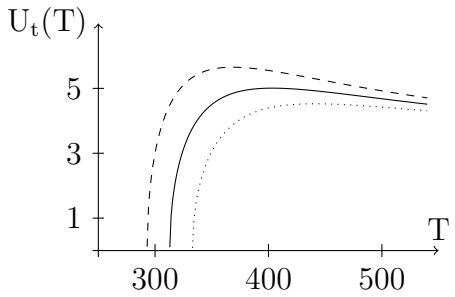
20. Étude d'une thermistance***

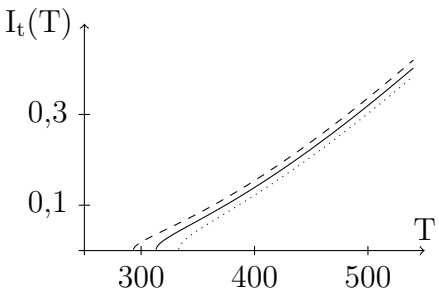
1. Connaissant la dépendance en température de la thermistance, on peut écrire le système à deux équations à deux inconnues pour déterminer R_∞ et a :
$$R_\infty\, e^{a/T_1} = \alpha \qquad \text{et} \qquad R_\infty\, e^{a/T_2} = \beta$$
Le rapport de ces deux équations permet d'isoler a qu'il suffit alors de remplacer dans la première par exemple pour obtenir (à 2 CS only)
$$\boxed{a = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \approx 1{,}8.10^3\ \text{K} \qquad \text{et} \qquad R_\infty = \alpha\, e^{-a/T_1} \approx 0{,}40\ \Omega}$$

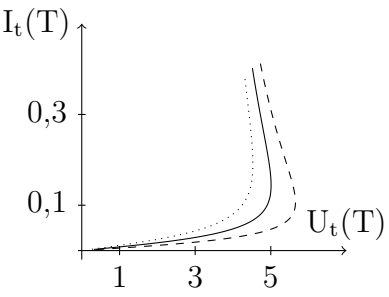
2. La puissance dissipée dans une résistance peut s'écrire indifféremment $\mathscr{P} = RI^2 = U^2/R$

   (a) Dans le cas qui nous intéresse, comme $\mathscr{P} = K(T - T_0)$, on a directement
$$\boxed{U_t(T) = \sqrt{R_\infty K(T - T_0)}\, e^{a/2T} \qquad \text{et} \qquad I_t(T) = \sqrt{\frac{K(T - T_0)}{R_\infty}}\, e^{-a/2T}}$$

(b) Les caractéristiques demandées sont des fonctions paramétriques de T. Traçons dans un premier temps les fonctions $U_t(T)$ et $I_t(T)$ puis le couple $(U_t(T), I_t(T))$ pour T variant de 280 K à 550 K

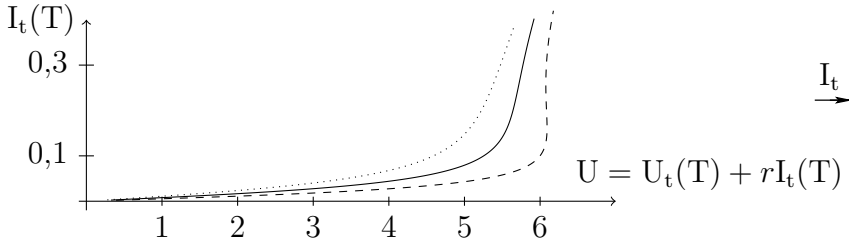


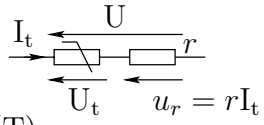




3. Dans cette question, on tente d'améliorer la stabilisation de tension en rajoutant une résistance en série avec la thermistance de manière à compenser la chute de tension observée à forts courants.

(a) Pour avoir la caractéristique du dipôle « thermistance en série avec une résistance r », il suffit de rajouter la tension $u_r = r\,I_t(T)$ apportée par la résistance rajoutée et on obtient le graphe

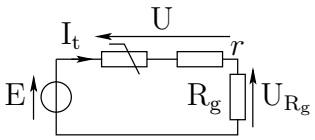




(b) On voit sur le graphe que la stabilisation de tension (tension relativement constante pour I variable) est effective pour une intensité traversant le circuit entre $I_1 = 0,1$ à $I_2 = 0,4$ A.

(c) La stabilisation se fait aux alentours de U = 6 V pour $T_0 = 293$ K = 20°C. La tension aux bornes de la résistance R_g vérifiant $U_{R_g} + U = E$, R_g doit vérifier les inégalités

$$I_1 < \frac{E-U}{R_g} < I_2$$



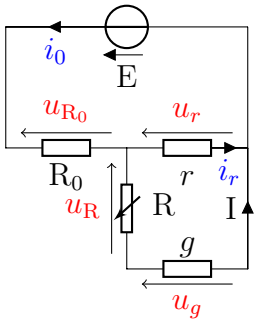
c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{E-U}{I_2} = 10\ \Omega < R_g < \frac{E-U}{I_1} = 40\ \Omega}$$

(1 CS car estimations)

21. Résistance d'un galvanomètre***

1. On commence par reproduire le schéma en y incluant toutes les grandeurs qui nous seront utiles, à savoir les courants dans les deux branches où il n'est pas nommé et les tensions aux bornes de toutes les résistances. On a choisi de mettre toutes les résistances en convention récepteur pour se simplifier la vie au niveau de l'écriture des lois d'Ohm, mais il faut donc réfléchir un peu pour écrire les lois des mailles. Les deux lois des mailles (maille globale et maille du bas) s'écrivent respectivement



$$E - u_{R_0} - u_R - u_g = 0 \qquad \text{et} \qquad u_r - u_R - u_g = 0$$

soit, en remplaçant tout de suite les tensions par les lois d'Ohm associées et en réarrangeant un peu les termes, il vient

$$E = R_0\, i_0 + (R+g)\, I \qquad \text{et} \qquad r\, i_r = (R+g)\, I$$

On a alors la possibilité d'exprimer les deux intensités annexes en fonction de l'intensité I recherchée et on obtient

$$i_0 = \frac{E-(R+g)\,I}{R_0} \qquad \text{et} \qquad i_r = \frac{R+g}{r}\,I$$

Il ne reste qu'à remplacer ces deux expressions dans la loi des nœuds $i_0 = i_r + \mathrm{I}$ pour obtenir

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_0} - \frac{\mathrm{R}+g}{\mathrm{R}_0}\mathrm{I} = \frac{\mathrm{R}+g}{r}\mathrm{I} + \mathrm{I} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{I} = \frac{r\mathrm{E}}{(\mathrm{R}+g)(\mathrm{R}_0+r)+\mathrm{R}_0 r}}$$

Dans le cas où $r \ll \mathrm{R}_0$, on peut négliger r dans la somme $\mathrm{R}_0 + r$ (mais nulle part ailleurs!). On remplace alors $\mathrm{R}_0 + r \approx \mathrm{R}_0$ et on peut factoriser un peu plus pour obtenir

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{r}{\mathrm{R}_0} \times \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}+g+r}}$$

2. Traduisons l'énoncé pour $\mathrm{R} = 0$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}_0$. On a alors

$$kn_0 = \frac{r}{\mathrm{R}_0} \times \frac{\mathrm{E}}{g+r} \qquad \text{et} \qquad kn_1 = \frac{r}{\mathrm{R}_0} \times \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_0+g+r}$$

En faisant le rapport de ces deux équations, k disparaît et il ne reste qu'une équation sur g que l'on peut extraire assez facilement

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{\mathrm{R}_0+g+r}{g+r} \quad \text{soit} \quad n_0(g+r) = n_1(\mathrm{R}_0+g+r) \quad \text{ou encore} \quad (n_0-n_1)(g+r) = n_1\mathrm{R}_0$$

Finalement l'expression de g est assez simple

$$\boxed{g = \frac{n_1}{n_0-n_1}\mathrm{R}_0 - r = 999\ \Omega}$$

Pour trouver k, il suffit de remplacer $g + r = \dfrac{n_1}{n_0-n_1}\mathrm{R}_0$ dans l'expression donnant kn_0 pour obtenir

$$\boxed{k = \frac{r\mathrm{E}}{{\mathrm{R}_0}^2} \times \frac{n_0-n_1}{n_1 n_0} = 2,0.10^{-7}\ \mathrm{A/division}}$$

On remarque que le galvanomètre est un outil de précision car une division correspond à deux dixièmes de microampère, soit un courant très faible.

Pour calculer l'incertitude sur g, on va utiliser la formule des incertitudes relatives puisque $g+r$ s'écrit comme un rapport de quantités (n_1 et n_0-n_1) mesurées avec des incertitudes respectives $\Delta n_1 = \Delta n$ et $\Delta(n_0-n_1) = \sqrt{2}\,\Delta n$ (comme différence de deux mesures à Δn près). On a alors

$$\frac{\Delta(g+r)}{g+r} = \sqrt{\left(\frac{\Delta n_1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(n_0-n_1)}{n_0-n_1}\right)^2}$$

Comme $\Delta(g+r) = \Delta g$ puisque l'énoncé n'indique pas d'erreur sur les résistances du circuit, on en déduit

$$\boxed{\Delta g = (g+r)\sqrt{\left(\frac{\Delta n}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\,\Delta n}{n_0-n_1}\right)^2} = 34\ \Omega}$$

On peut par conséquent réviser l'application numérique donnée plus haut et en déduire

$$\boxed{g = 1{,}00 \pm 0{,}04\ \text{k}\Omega}$$

3. Si les quatre résistance du pont était strictement égale, la symétrie du système imposerait que le potentiel à gauche du galvanomètre (notons le point A) est strictement égal au potentiel à droite du galvanomètre (notons le point B), les deux branches étant interchangeables. Il n'y a donc aucun courant qui traverse le galvanomètre dans ce cas. On peut donc raisonnablement supposer que le courant traversant le galvanomètre lorsque la dernière résistance vaut $\text{R}+\Delta\text{R}$ au lieu de R est effectivement négligeable devant le courant de la branche principale de sorte que l'on puisse utiliser un diviseur de tension dans chacune des deux branches principales. En outre, c'est cohérent avec le fait qu'un graduation du galvanomètre corresponde à 0,2 µA, c'est-à-dire un courant bien inférieur au milliampère qui circule quand on alimente une résistance de 2 kΩ avec une tension de 2 V.

   Appelons M le point le plus bas du circuit. On applique le diviseur de tension dans la branche de droite et on obtient directement

$$\text{V}_\text{B} - \text{V}_\text{M} = \frac{\text{R}}{\text{R}+\text{R}}\,\text{E} = \frac{\text{E}}{2}$$

   Le même diviseur de tension appliqué à la branche de gauche donne quant à lui

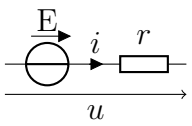
$$\begin{aligned}
\text{V}_\text{A} - \text{V}_\text{M} &= \frac{\text{R}+\Delta\text{R}}{\text{R}+\text{R}+\Delta\text{R}}\,\text{E} \\
&= \frac{\text{E}}{2}\left(1+\frac{\Delta\text{R}}{\text{R}}\right) \times \frac{1}{1+\Delta\text{R}/2\text{R}} \\
&\approx \frac{\text{E}}{2} \times \left(1+\frac{\Delta\text{R}}{\text{R}}\right) \times \left(1-\frac{\Delta\text{R}}{2\text{R}}\right) \\
&= \frac{\text{E}}{2}\left(1+\frac{\Delta\text{R}}{\text{R}} - \frac{\Delta\text{R}}{2\text{R}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\text{R}}{\text{R}}\right)^2\right) \\
\text{V}_\text{A} - \text{V}_\text{M} &\approx \frac{\text{E}}{2}\left(1+\frac{\Delta\text{R}}{2\text{R}}\right)
\end{aligned}$$

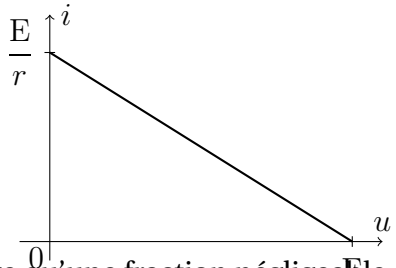
   Le courant I qui traverse le galvanomètre est donné par $(\text{V}_\text{A}-\text{V}_\text{B})/g$ et est relié à l'indication n via $kn = \text{I}$ de sorte que l'on ait

$$\boxed{n = \frac{\text{I}}{k} = \frac{\text{V}_\text{A}-\text{V}_\text{B}}{kg} = \frac{\text{E}}{2} \times \frac{\Delta\text{R}}{2k\text{R}g}}$$

   ce qui permet de mesurer très précisément ΔR si on connait tout le reste.

22. Mesure d'une résistance***





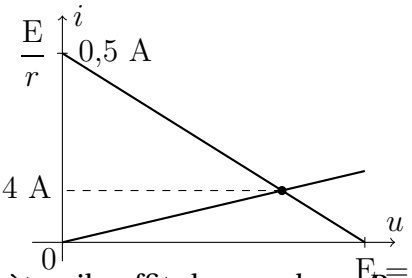
1. Préliminaires
   (a) La source de tension est composée d'une source indéale de tension de f.é.m. E en série avec une résistance r. En convention générateur, on a donc $u = \mathrm{E} - r\,i$ ou encore $i = (\mathrm{E} - u)/r$.
   (b) Pour que l'influence du voltmètre soit négligeable, il est nécessaire qu'une fraction négligeable du courant le traverse, c'est-à-dire que sa résistance interne soit très grande comparée à celle mesurée.

$$\boxed{\mathrm{R_v} \gg \mathrm{R}}$$

2. Calcul de R
   (a) Si on peut négliger l'influence du voltmètre, un simple diviseur de tension donne le lien

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + \mathrm{R_1} + r}\,\mathrm{E}$$

   d'où l'on extrait $\boxed{\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{E} - \mathrm{U}}\,(\mathrm{R_1} + r) = 23\ \Omega}$



   (b) La tension u aux bornes du générateur est aussi celle aux bornes du dipôle $\mathrm{R_1} + \mathrm{R}$. Pour obtenir le point de fonctionnement, il suffit de prendre l'intersection des droites $i = (\mathrm{E} - u)/r$ et $i = u/(\mathrm{R_1} + \mathrm{R})$. On trouve

$$\boxed{i = 0,14\ \mathrm{A}}$$

   (c) Lorsqu'on ne peut plus négliger la résistance interne du voltmètre, il suffit de remplacer R par $\mathrm{R_{éq}} = \mathrm{R}\,\mathrm{R_v}/(\mathrm{R} + \mathrm{R_v})$ dans le diviseur de tension pour retrouver U :

$$\boxed{\mathrm{U} = \frac{\mathrm{R_{éq}}}{\mathrm{R_{éq}} + \mathrm{R_1} + r}\,\mathrm{E} = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{R_v}}{\mathrm{R}\,\mathrm{R_v} + (\mathrm{R_1} + r)(\mathrm{R} + \mathrm{R_v})}\,\mathrm{E}}$$

3. Incertitudes de mesure
   (a) La mesures est supérieure à 500 mV mais inférieure à 5 V. Pour cette gamme, la notice indique une impédance d'entrée de 11 MΩ pour le voltmètre, bien supérieure à la valeur précédemment trouvée pour R. L'approximation était donc valable : on peut négliger le courant passant dans le voltmètre (que l'on peut estimer aux alentours de 3 µA)
   (b) L'incertitude de la mesure de U donnée par le constructeur s'écrit sous la forme $0,025\%\mathrm{L} + 2\mathrm{UR}$,

   c'est-à-dire $\boxed{\Delta\mathrm{U} = \dfrac{0,025}{100} \times 3,1540 + 2 \times 0,0001 = 9,9.10^{-4}\ \mathrm{V}}$ soit $\mathrm{U} = 3,154 \pm 1.10^{-3}\ \mathrm{V}$

4. Sensibilité
   (a) La sensibilité du montage est définie par $s = \mathrm{dU}/\mathrm{dR}$. C'est donc la variation de la tension mesurée avec la résistance que l'on cherche. Plus U varie avec R, plus le montage de mesure est sensible et la mesure de R précise. En particulier, on a

$$\mathrm{dR} = \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dU}}\,\mathrm{dU} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\mathrm{R} = \left|\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dU}}\right|\Delta\mathrm{U} = \frac{\Delta\mathrm{U}}{|s|}}$$

   (b) Le diviseur de tension nous a donné $\mathrm{U} = \mathrm{E}\,\mathrm{R}/(\mathrm{R} + \mathrm{R_1} + r)$, soit

$$\boxed{s = \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dR}} = \frac{(\mathrm{R} + \mathrm{R_1} + r) - \mathrm{R}}{(\mathrm{R} + \mathrm{R_1} + r)^2}\,\mathrm{E} = \frac{\mathrm{R_1} + r}{(\mathrm{R} + \mathrm{R_1} + r)^2}\,\mathrm{E}}$$

   L'application numérique donne $s = 0,094\ \mathrm{V}.\Omega^{-1}$, c'est-à-dire que la tension varie de 100 millivolts pour chaque Ohm de variation de R. En appliquant la formule signalée plus haut, on trouve $\Delta\mathrm{R} = 0,011\ \Omega$. Ce qui limite ici la précision sur les chiffres significatifs de R est moins la mesure que l'absence de précision dans les autres valeurs (E, r et $\mathrm{R_1}$).

(c) Pour maximiser la sensibilité en fonction de R_1, il faut choisir R_1 tel que

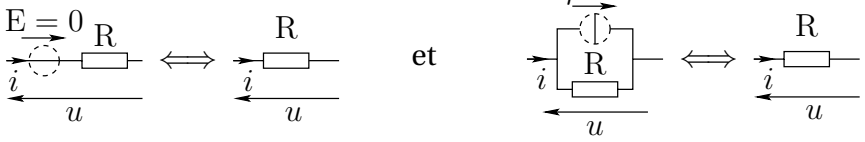
$$\boxed{\frac{ds}{dR_1} = 0}$$

23. Théorème de Thévenin***

1. Démonstration du théorème

   (a) Lorsqu'on passive une source idéale de tension, cela revient à imposer une tension nulle à ses bornes et on se retrouve avec l'équivalent d'un fil. Au contraire, éteindre une source de courant revient à imposer un courant nul dans la branche, ce qui revient à un interrupteur ouvert[3].

   (b) Si on passive les sources présentes dans un bout de circuit, on se retrouve avec l'équivalent d'une simple résistance donc une relation de proportionnalité entre u et i : $u = R_{eq}\, i$. Pour les générateurs de Thévenin ou de Norton :



   (c) La linéarité du circuit implique une relation linéaire entre tension et intensité : $u = \alpha\, i + \beta$. On peut alors modéliser le réseau linéaire par un générateur de Thévenin de résistance interne $R_T = \alpha$ et de force électromotrice $E_T = \beta$.

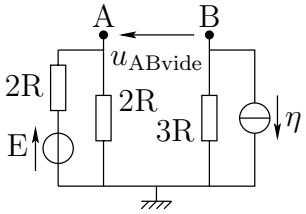
   En circuit ouvert, la tension aux bornes du générateur de Thévenin vaut directement E_T puisqu'aucun courant ne circule dans R_T. Comme on cherche une équivalence avec notre bout de circuit, cela implique que la tension de circuit ouvert du circuit complexe donne directement la valeur de la force électromotrice équivalente.

   Si on éteint les sources, le circuit complexe se réduit à une résistance équivalence R_{eq}. Or si on éteint la source E_T du générateur de Thévenin, la résistance équivalente vaut directement R_T.

   On obtient bien au final le théorème de Thévenin avec la méthode pour calculer E_T et R_T.

2. Application directe.

   (a) Le réseau étudié est défini ci-contre. En plaçant la masse comme indiqué, le théorème de Millman et la loi d'Ohm permettent de trouver que, sans autre dipôle branché entre A et B,



$$V_A = \frac{E/2R}{1/2R + 1/2R} = \frac{E}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 - V_B = 3R\eta$$

   D'où une fém $\boxed{E_T = u_{ABvide} = \frac{E}{2} + 3R\eta}$

   La résistance équivalente est celle d'une résistance 3R en série avec deux résistance 2R en parallèle, c'est-à-dire

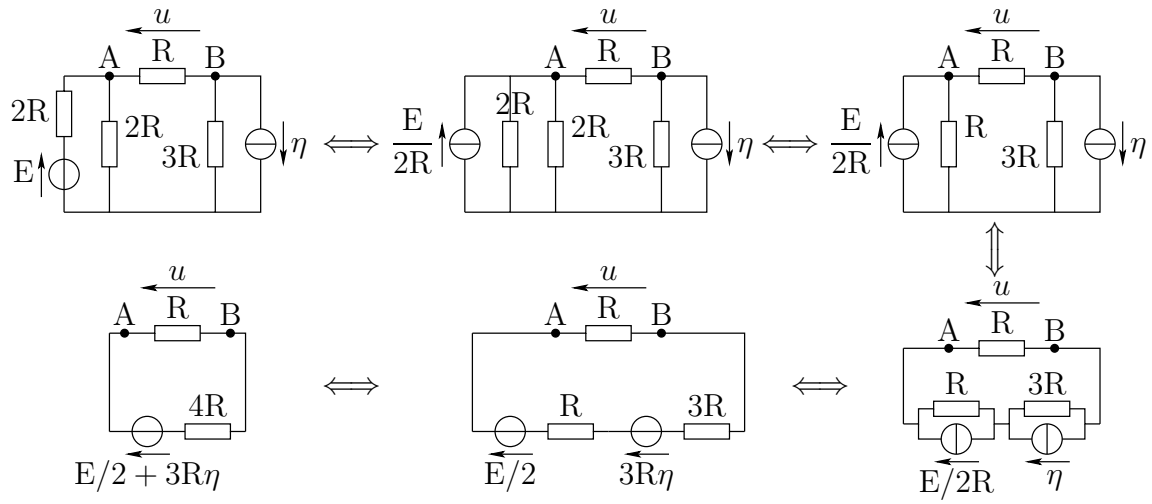
$$\boxed{R_T = 4R}$$

   (b) L'équivalence avec le générateur de Thévenin permet alors de calculer immédiatement u

$$\boxed{u = \frac{R}{R + R_T} E_T = \frac{E}{10} + \frac{3R\eta}{5}}$$

   (c) La suite d'équivalences Thévenin/Norton permet bien d'arriver au même résultat

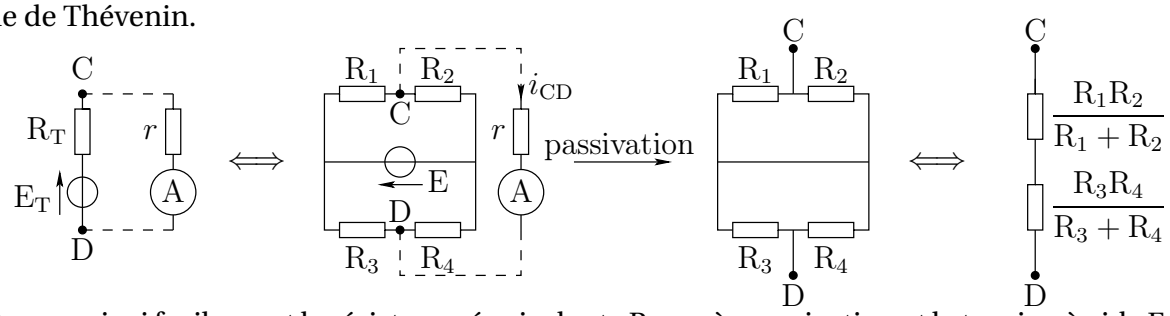
3. Effacer le cercle autour de la source permet de retrouver « graphiquement » ces comportements.



3. En se basant sur la même méthode, on peut énoncer le théorème de Norton :
   Un réseau dipolaire linéaire (ne comportant aucune source liée à son milieu extérieur) est équivalent à un générateur de Norton de
   — courant électromoteur η_N égal au courant sortant du réseau lorsqu'il est soumis à une tension nulle, aussi appelé « courant de court-circuit » ;
   — résistance R_N égale à la résistance équivalente au réseau quand avec ses sources passivées.

24. Application**

1. En réarrangeant les éléments du schéma, on se retrouve avec le dipôle CD sur lequel appliquer le théorème de Thévenin.



   On trouve ainsi facilement la résistance équivalente R_T après passivation et la tension à vide $E_T = u_{CDvide}$ par simple diviseur de tension

$$R_T = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} \qquad \text{et} \qquad E_T = \frac{R_2}{R_1+R_2}E - \frac{R_4}{R_3+R_4}E = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}E$$

   d'où
$$\boxed{i_{CD} = \frac{E_T}{R_T+r} = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)\,E}{R_1R_2(R_3+R_4) + R_3R_4(R_1+R_2) + r(R_1+R_2)(R_3+R_4)}}$$

2. Avec les valeurs fournies des résistances et en développant à l'ordre le plus bas en dR_4, on remarque que E_T va être proportionnel à la petite résistance dR_4 alors que R_T vaut presque R :

$$E_T = \frac{-R\,dR_4}{2R(2R+dR_4)}E \approx -\frac{dR_4}{4R}E \qquad \text{et} \qquad R_T = \frac{R^2}{2R} + \frac{R(R+dR_4)}{2R+dR_4} \approx \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

   Ainsi,
$$\boxed{i_{CD} \approx \frac{-dR_4}{R+r}\frac{E}{4R}}$$

3. Avec $dR_4 = \alpha\,dT$,
$$\boxed{dT = -\frac{4R(R+r)\,i_{CD}}{\alpha E}}$$

25. Impédances d'entrée et de sortie d'un AO***

1. L'amplificateur fonctionnant en régime linéaire, on a $V^+ = V^-$, or, comme $V^+ = U_e$, on en déduit $V^- = U_e$. D'autre part, comme aucun courant ne rentre par la borne inverseuse de l'AO, on peut appliquer un diviseur de tension sur cette branche (en ne se trompant pas pour le sens des tensions), ce qui donne

$$U_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_s$$

d'où $$\boxed{\frac{U_s}{U_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

2. L'amplificateur n'est plus supposé idéal. On se base donc sur le schéma équivalent correspondant fourni par l'énoncé.

   (a) Le cas interrupteur fermé est équivalent au cas interrupteur ouvert lorsque l'on prend $R_3 = 0$. On peut donc calculer U_{s1} puis prendre la limite $R_3 = 0$ pour obtenir U_{s0}. La première étape est d'utiliser Millman pour exprimer V^- en fonction de U_e et U_{s1}. Pour plus de lisibilité, on travaille avec les conductances dans un premier temps.

$$(G_1 + G_2 + G_{e+3})\, V^- = G_{e+3}\, U_e + G_2\, U_{s1} \qquad \text{avec} \quad G_{e+3} = \frac{1}{R_3 + R_e}$$

   Comme le même courant traverse R_e et R_3, on a la relation

$$G_{e+3}\,(U_e - V^-) = G_e\,\varepsilon \qquad \text{soit} \qquad V^- = U_e - \frac{G_e}{G_{e+3}}\,\varepsilon$$

   En utilisant que $\varepsilon = U_{s1}/\mu_0$ et en remplaçant V^- dans l'équation de Millman, on a

$$(G_1 + G_2 + G_{e+3})\left(U_e - \frac{G_e}{G_{e+3}}\,\frac{U_{s1}}{\mu_0}\right) = G_{e+3}\, U_e + G_2\, U_{s1}$$

d'où $$(G_1 + G_2)\, U_e = \left(G_2 + \frac{G_e}{\mu_0\, G_{e+3}}\,(G_1 + G_2 + G_{e+3})\right) U_{s1}$$

   Le cas où l'interrupteur est fermé s'obtient en remplaçant G_{e+3} par G_e, d'où

$$(G_1 + G_2)\, U_e = \left(G_2 + \frac{1}{\mu_0}\,(G_1 + G_2 + G_e)\right) U_{s0}$$

   Le rapport membre à membre de ces deux équations donne

$$\frac{U_{s0}}{U_{s1}} = \frac{1 + \dfrac{G_e}{\mu_0\, G_{e+3}}\,\dfrac{G_1 + G_2 + G_{e+3}}{G_2}}{1 + \dfrac{1}{\mu_0}\,\dfrac{G_1 + G_2 + G_e}{G_2}}$$

   Or les termes $\dfrac{G_e}{\mu_0\, G_2}$ et $\dfrac{G_{e+3}}{\mu_0\, G_2}$ sont d'ordre 2 par rapport à 1 puisqu'on a à la fois $1 \ll \mu_0$ et $R_3 \approx R_e \gg R_2$ (soit G_e et $G_{e+3} \ll G_e$). On peut donc les négliger en haut et en bas.

$$\frac{U_{s0}}{U_{s1}} = \frac{1 + \dfrac{G_e}{\mu_0\, G_{e+3}}\,\dfrac{G_1 + G_2}{G_2}}{1 + \dfrac{1}{\mu_0}\,\dfrac{G_1 + G_2}{G_2}}$$

Or, $$\frac{G_1 + G_2}{G_2} = \frac{R_2}{R_1} + 1 = A_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{G_e}{G_{e+3}} = \frac{R_e + R_3}{R_e} = 1 + \frac{R_3}{R_e}$$

Ainsi,
$$\frac{U_{s0}}{U_{s1}} = 1 + \frac{\dfrac{R_3}{R_e}\dfrac{A_0}{\mu_0}}{1+\dfrac{A_0}{\mu_0}}$$

Comme $\mu_0 \approx 10^5 \gg 1$, on peut supposer $\mu_0 \gg A_0$ qui au pire est de l'ordre de la centaine en pratique. Ainsi,

$$\boxed{\frac{U_{s0}}{U_{s1}} \approx 1 + \frac{A_0}{\mu_0}\frac{R_3}{R_e}}$$

(b) L'intérêt de ce calcul réside dans la détermination de la résistance d'entrée de l'AO par la mesure des tensions de sortie dans chacun des cas en supposant que seule l'erreur sur les tensions est importante. Comme

$$R_e = R_3 \frac{A_0}{\mu_0}\left(\frac{U_{s0}}{U_{s1}} - 1\right)^{-1}$$

on a
$$dR = -R_3 \frac{A_0}{\mu_0}\left(\frac{U_{s0}}{U_{s1}} - 1\right)^{-2} \times \left(\frac{dU_{s0}}{U_{s1}} - \frac{U_{s0}}{{U_{s1}}^2}\,dU_{s1}\right)$$

d'où
$$\boxed{\Delta R = R_3 \frac{A_0}{\mu_0}\frac{U_{s1}\,\Delta U}{(U_{s0}-U_{s1})^2}\left(1+\frac{U_{s0}}{U_{s1}}\right)}$$

On vérifie au passage que le tout est bien homogène à une résistance.

3. Le même type de raisonnement s'applique lorsqu'on suppose à présent la résistance de sortie faible mais non nulle et la résistance d'entrée infinie.

(a) À nouveau le cas simple se déduit du cas plus complexe dans la limite $r \to \infty$, il suffit donc de faire le seul calcul de U_{s2} pour avoir automatiquement U_{s2} et U_{s0}. Par définition de ε, on a

$$\varepsilon = V^+ - V^- = U_e - V^-$$

D'autre part, un même courant traverse R_1 et $R_1 + R_2$, d'où

$$\frac{V^- - 0}{R_1} = \frac{U_{s2} - 0}{R_1 + R_2}$$

En combinant les deux
$$A_0\,(U_e - \varepsilon) = U_{s2}$$

Il reste à lier ε à U_{s2}, ce que l'on peut faire en appliquant Millman à la sortie S (puisqu'aucun courant ne rentre par l'entrée inverseuse, on peut aller jusqu'à la masse à gauche)

$$(G_s + G_r + G_{1+2})\,U_{s2} = G_s\,\mu_0\varepsilon \qquad \text{avec } G_{1+2} = \frac{1}{R_1+R_2}$$

En rassemblant ε dans la relation obtenue précédemment, on obtient alors

$$A_0\,U_e = \left[1 + \frac{A_0}{\mu_0}\left(1 + \frac{G_r + G_{1+2}}{G_s}\right)\right]U_{s2}$$

La limite $r \to \infty$ revient à prendre $G_r = 0$ et l'on en déduit que

$$A_0\,U_e = \left[1 + \frac{A_0}{\mu_0}\left(1 + \frac{G_{1+2}}{G_s}\right)\right]U_{s0}$$

Le rapport membre à membre donne alors

$$\frac{U_{s0}}{U_{s2}} = \frac{1+\dfrac{A_0}{\mu_0}\left(1+\dfrac{G_{1+2}}{G_s}\right)+\dfrac{A_0}{\mu_0}\dfrac{G_r}{G_s}}{1+\dfrac{A_0}{\mu_0}\left(1+\dfrac{G_{1+2}}{G_s}\right)} = 1+\frac{\dfrac{A_0}{\mu_0}\dfrac{G_r}{G_s}}{1+\dfrac{A_0}{\mu_0}\left(1+\dfrac{G_{1+2}}{G_s}\right)}$$

Comme $A_0 \ll \mu_0$ et $G_{1+2} \ll G_s$ (car $R_s \ll R_1, R_2$), on trouve bien

$$\boxed{\frac{U_{s0}}{U_{s2}} \approx 1+\frac{A_0}{\mu_0}\frac{G_r}{G_s} = 1+\frac{A_0}{\mu_0}\frac{R_s}{r}}$$

(b) Là encore, l'intérêt de ce calcul réside dans la détermination de R_s via

$$R_s = \frac{\mu_0 r}{A_0}\left(\frac{U_{s0}}{U_{s2}}-1\right)$$

Ainsi,
$$dR_s = \frac{\mu_0 r}{A_0}\left(\frac{dU_{s0}}{U_{s2}}-\frac{U_{s0}\,dU_{s2}}{{U_{s2}}^2}\right)$$

d'où
$$\boxed{\Delta R = \frac{\mu_0 r}{A_0}\frac{\Delta U}{U_{s2}}\left(1+\frac{U_{s0}}{U_{s2}}\right)}$$

♫