

Optique géométrique

1. **Éclipse totale du 11 août 1999** None available.

2. **Prisme à réflexion totale.** None available.

3. **Cube rétrorélecteur** Pour mesurer avec grande précision la distance Terre-Lune, on a déposé sur la Lune une sorte de miroir et on le vise avec un laser. Il s'agit d'un coin de cube rétrorélecteur : un rayon incident arrive sur une face, à l'intérieur d'un coin de cube réfléchissant. En raisonnant sur l'évolution du vecteur unitaire définissant la direction et le sens du rayon lumineux, montrer qu'après réflexion sur les trois faces, le rayon repart parallèle à lui-même.

4. **Tube à essai*** On utilise le principe du retour inverse de la lumière en disant que si on ne voit pas l'épaisseur du verre, c'est que tous les rayons qui entrent dans le verre en provenance d'une direction donnée (par exemple l'horizontale) seront déviée de sorte à entrer en contact avec le liquide intérieur. Les rayons qui ont le plus de chance de passer « autour » sont ceux qui tapent sur les côtés. On considère donc le rayon extrême qui arrive de manière tangente au cercle extérieur. Son angle incident vaut $\pi/2$, l'angle du rayon réfracté est donc tel que $\sin \theta_{\text{lim}} = 1/n$. Or ce rayon réfracté doit, à la limite, toucher le rayon intérieur de manière tangente (formant ainsi un triangle rectangle) et vérifie donc $\sin \theta = R_i/R_e$. En égalant ces deux quantités, on trouve que, à la limite,

$$R_i = \frac{R_e}{n}$$

Si le rayon intérieur est plus faible, on « voit » l'épaisseur du verre alors que s'il est plus grand, on ne le voit pas.

5. **À la pêche!** None available.

6. **Narcissisme** None available.

7. **Miroir cylindrique** None available.

8. **Cyclope** None available.

9. **Le pêcheur pêché** None available.

10. **Aquarium** None available.

11. **Cuve de verre*** None available

12. Fibre optique à saut d'indice**

- Lorsqu'un rayon lumineux atteint l'interface entre deux milieux transparents d'indice n et n' dans le sens $n \rightarrow n'$,
 - il existe (toujours) un rayon réfléchi dans le **plan d'incidence** (défini par le rayon incident et la normale à l'interface) tel que l'angle que fait ce rayon avec la normale est égale à l'angle i (dit incident) que fait le rayon incident avec la normale;
 - il existe (parfois) un rayon réfracté dans le **plan d'incidence** tel que l'angle r que fait ce rayon avec la normale soit relié à l'angle incident i par la formule

$$n \sin i = n' \sin r$$

Il n'existe pas de rayon réfracté si l'angle incident vérifie

$$n \sin i > n'$$

c'est-à-dire s'il n'existe pas d'angle r telle que la relation de réfraction puisse être satisfaite (vu que $\sin r$ est majorée par 1). Par croissance de la fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, il suffit donc que

$$i > \text{Arcsin}\left(\frac{n'}{n}\right)$$

On remarque ainsi qu'un tel phénomène n'est possible que si $n' < n$, c'est-à-dire lors du passage d'un milieu plus réfringent (par exemple l'eau) vers un milieu moins réfringent (par exemple l'air).

- Pour qu'il y ait propagation confinée dans la fibre, il faut justement qu'il y ait réflexion totale à chaque interface cœur/gaine et donc que i vérifie

$$i > i_\ell = \text{Arcsin}\left(\frac{n_G}{n_C}\right)$$

- Procédons par équivalence en utilisant la croissance des fonctions sinus (sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$) et arcsinus (sur $[-1; 1]$):

$$\begin{aligned} & i > i_\ell \\ \Leftrightarrow & \theta = \frac{\pi}{2} - i < \frac{\pi}{2} - i_\ell = \theta_\ell \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n_A \sin \alpha = n_C \sin \theta < n_C \sin \theta_\ell$$

$$\Leftrightarrow \alpha < \alpha_\ell \quad \text{avec} \quad \alpha_\ell = \text{Arcsin}\left[\frac{n_C}{n_A} \sin \theta_\ell\right]$$

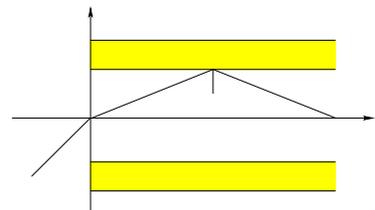
- Avec l'expression précédente, on a

$$ON = n_A \sin \alpha_\ell = n_C \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_\ell\right) = n_C \cos(i_\ell) = n_C \sqrt{1 - \sin^2(i_\ell)} = n_C \sqrt{1 - \left(\frac{n_G}{n_C}\right)^2}$$

On trouve bien

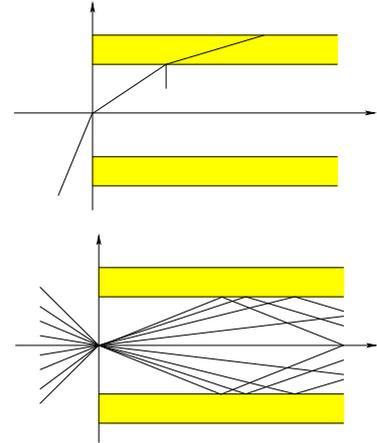
$$ON = \sqrt{n_C^2 - n_G^2}$$

- Le rayon confiné rebondit à l'interface cœur/gaine du fait de l'angle d'incidence interne supérieur à i_ℓ :



Un rayon non confiné est rentré trop tangentiellement à la fibre et atteint la gaine avec un angle d'incidence inférieur à i_ℓ . Il se fait donc réfracter dans la gaine puis absorber par la couche externe. Seule une infime partie est réfléchi et reste confinée ... jusqu'au prochain rebond !

Finalement, pour tout un faisceau incident convergent sur l'entrée de la fibre, les trajets sont aussi différents que les angles d'incidence initiaux conduisant à une dispersion de l'impulsion initiale si l'on ne corrige pas les décalages temporels dû à la propagation de chaque rayon sur une distance différente (avec plus ou moins de virages)



6. Pour calculer la dispersion intermodale, il faut identifier le rayon qui parcourt la fibre le plus vite et celui qui est le plus lent. Comme tous les rayons vont à la même vitesse, il est assez clair que celui qui est le plus rapide est celui qui parcourt le moins de distance et que la distance minimale à parcourir dans la fibre est L pour le rayon qui va tout droit. Ainsi, le temps minimal vaut

$$t_{\min} = \frac{L}{v} = \frac{L}{c/n_C} = \frac{n_C L}{c}$$

car la vitesse v de propagation de la lumière dans la fibre est reliée à la célérité c de la vitesse dans le vide et à l'indice n_C de la fibre.

Le rayon qui mettra le plus de temps à parcourir la fibre est celui qui fera le plus de rebonds sur les parois¹ et qui part donc avec l'angle limite θ_ℓ de l'entrée de la fibre. Pour calculer la distance totale parcourue, le plus simple est encore de « déplier » le chemin pour former un très grand triangle dont l'hypothénuse est la distance d à calculer et le côté adjacent à θ_ℓ est la longueur L de la fibre. On a donc

$$t_{\max} = \frac{d}{v} = \frac{\frac{L}{\cos\theta_\ell}}{\frac{c}{n_C}} = \frac{n_C L}{c \cos\theta_\ell} = \frac{n_C L}{c \cos(\frac{\pi}{2} - i_\ell)} = \frac{n_C L}{c \sin(i_\ell)} = \frac{n_C^2 L}{c n_G}$$

Finalement, la dispersion intermodale est donnée par la différence des deux

$$t_{\max} - t_{\min} = \frac{n_C L}{c} \left(\frac{n_C}{n_G} - 1 \right)$$

7. Les applications numériques donnent

$$i_\ell = 1,37 \text{ rad} = 78,5^\circ, \quad \text{ON} = 0,298 \quad \alpha_\ell = 0,303 \text{ rad} = 17,4^\circ \quad \text{et} \quad t_{\max} - t_{\min} = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Sur 1 km de fibre, on n'a qu'une différence de $0,1 \mu\text{s}$ dans le temps de propagation de l'information, mais cela limite tout de même la fréquence des signaux que l'on peut transmettre. Si on impose une fréquence de 10 MHz, le signal de la prochaine période est déjà arrivé par la route directe quand celui de la période courante est encore en train de venir par la route en zig-zag, ce qui posera à coup sûr des problèmes de détection.

13. Optique dans les milieux stratifiés***

1. Lois de Descartes

- (a) La première loi de Descartes affirme que le rayon réfracté reste dans le plan d'incidence. Ainsi, toute la trajectoire du rayon reste plane.
 (b) À chaque interface, la deuxième loi de Descartes donne

$$n_i \sin(\theta_i) = n_{i+1} \sin(\theta_{i+1}) = C^{\text{te}}$$

1. Aussi appelé the « drunk sailor path » par certains.

2. La relation précédente est valable quelle que soit l'épaisseur des couches. On peut donc conserver la relation $n \sin(\theta) = C^{\text{te}}$ en passant d'un paramétrage par i à un paramétrage par z .

3. Petits calculs

(a) En $z = z_0$, $\theta = \pi/2$ donc $K = n_0$. On obtient donc

$$\boxed{n(z) \sin(\theta) = n_0}$$

(b) On a $\tan \theta = \frac{dx}{dz}$ soit $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} - 1 = \left(\frac{n(z)}{n(z_0)}\right)^2 - 1$

d'où

$$\boxed{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{[n^2(z) - n_0^2]}{n_0^2}}$$

4. Approximation

(a) En factorisant, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{[n(z) + n_0][n(z) - n_0]}{n_0^2}$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \sqrt{f(n(z)) \times g(n(z))} \quad \text{avec} \quad f(n(z)) = \frac{n(z)}{n_0} + 1 \quad \text{et} \quad g(n(z)) = \frac{n(z)}{n_0} - 1}$$

(b) Avec $n(z) = n_0 + \alpha(z - z_0)$, on a, au premier ordre non nul en $z - z_0$,

$$f(n(z)) \approx 2 \quad \text{et} \quad g(n(z)) = \frac{\alpha(z - z_0)}{n_0}$$

et en remplaçant

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \sqrt{2\alpha \frac{z - z_0}{n_0}}}$$

5. D'un côté, on a

$$\frac{dz}{dx} = 2Ax$$

De l'autre,

$$\sqrt{2\alpha \frac{z - z_0}{n_0}} = \sqrt{2\alpha \frac{Ax^2}{n_0}} = x \sqrt{\frac{2\alpha A}{n_0}}$$

La solution $z = z_0 + Ax^2$ convient à condition que

$$2A = \sqrt{\frac{2\alpha A}{n_0}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A = \frac{\alpha}{2n_0}}$$

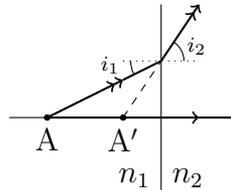
La trajectoire est une parabole donc la concavité est tournée vers les zones de fort indice.

2. On pouvait aussi poser $f(z) = n(z) \sin \theta(z)$ et remarquer qu'au passage d'un plan à un autre, on obtient $f(z) = f(z + dz)$. Or $f(z + dz) \approx f(z) + f'(z) dz$, soit $f'(z) = 0$, f est une fonction constante.



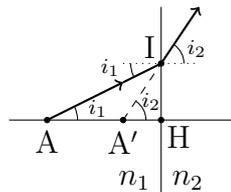
14. Dioptrés**

1. Un «dioptré» est une surface séparant deux milieux transparents différents (d'indice de réfraction différent).
2. **1^{er} rayon** Le rayon perpendiculaire au dioptré ne subit aucune déviation.
2^e rayon Un rayon quelconque arrive avec un angle d'incidence i_1 sur le dioptré et émerge avec un angle i_2 donné par la loi de Snell-Descartes : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$. On note que $i_2 > i_1$ car $n_2 < n_1$.



A' est l'image (virtuelle) de A par le dioptré (intersection des rayons émergents).

3. On se retrouve dans la situation du schéma ci-dessus (l'eau a un indice n_1 plus grand que l'air) : l'observateur placé dans l'air voit donc l'image de la partie immergée du crayon dont chaque point a une image rapprochée du dioptré par rapport au point objet.
4. Conditions de Gauss : les rayons lumineux traversant le système centré sont des rayons paraxiaux et peu inclinés par rapport à l'axe de sorte que $\sin i \approx i \approx \tan i$ pour les angles d'incidence et de réfraction sur les différents systèmes.
5. Soit H le point d'intersection du premier rayon avec le dioptré et I celui du deuxième rayon. La distance HI s'exprime



— Dans le triangle AHI $\overline{HI} = \overline{HA} \tan i_1$

— Dans le triangle $A'HI$ $\overline{HI} = \overline{HA'} \tan i_2$

Ainsi,
$$\frac{\overline{HA}}{\overline{HA'}} = \frac{\tan i_2}{\tan i_1} = \frac{\overbrace{\sin i_2}^{n_1/n_2}}{\sin i_1} \overbrace{\frac{1}{\cos i_1}}^{\approx 1} \frac{1}{\cos i_2}$$

on trouve

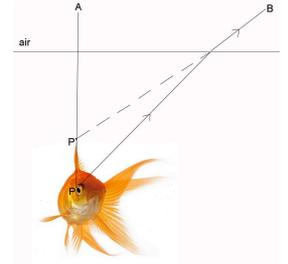
$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{HA'}} = \frac{n_1}{\overline{HA}}}$$

6. À la recherche de Maurice

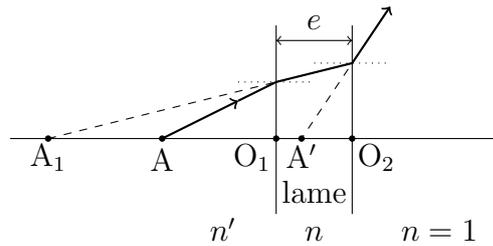
- (a) L'observateur voit le poisson P en P' déterminé par la relation de conjugaison ci-dessus, avec H le projeté orthogonal du poisson sur le dioptre eau-air,

$$\overline{HP'} = \overline{HP} \frac{n_2}{n_1} = 38 \text{ cm}$$

Le poisson est vu à 38 cm sous l'eau par l'observateur en A. Si l'observateur se déplace en B, l'image du poisson sera toujours en P' déterminé ci-dessus.



- (b) Passons par une image intermédiaire de sorte que $A \xrightarrow{n' \rightarrow n} A_1 \xrightarrow{n \rightarrow 1} A'$. En appliquant les relations aux deux dioptres (avec O_i les projections orthogonales de A sur les deux dioptres), on a



$$\overline{O_1 A_1} = \frac{n}{n'} \overline{O_1 A} \quad \text{et} \quad \overline{O_2 A'} = \frac{1}{n} \overline{O_2 A_1}$$

De plus, $\overline{O_1 O_2} = e$. Il ne reste qu'à décomposer la relation recherchée

$$\overline{AA'} = \overline{AO_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A'} = -\overline{O_1 A} + e + \frac{\overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1}}{n} = -\overline{O_1 A} + e \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \frac{n}{n'} \overline{O_1 A}$$

On trouve bien

$$\overline{AA'} = e \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \overline{O_1 A} \left(\frac{1}{n'} - 1\right)$$

Pour le plongeur, ce qui importe, c'est la longueur $\overline{O_1 A'} = \overline{O_1 A} + \overline{AA'}$, qui vaut

$$\overline{O_1 A'} = e \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\overline{O_1 A}}{n'} \quad \text{soit} \quad \overline{O_1 A} = n' \overline{O_1 A'} - n' e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Le plongeur voit nettement des images A' situés entre 25 cm et l'infini devant ses yeux. Pour l'infini, on trouve directement avec la relation précédente que A doit aussi être à l'infini, ce qui ne change rien. En revanche, si A' est situé à 25 cm, soit à $\overline{O_1 A'} = -25 + 6,6 = -18,4$ cm de l'extérieur du masque, l'objet devrait se placer en

$$\overline{O_1 A} = n' \overline{O_1 A'} - n' e \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -24,8 \text{ cm}$$

c'est-à-dire à 31,4 cm des yeux du plongeur.

- (c) Sans le masque de plongée, les yeux du plongeur sont en contact direct avec l'eau. Ceci modifie la vergence de son cristallin. Or ce cristallin a des focales pour voir nettement dans l'air entre le P.P. et le P.R. Dans l'eau, la vergence est telle qu'aucune image nette ne peut se former sur la rétine : le plongeur voit tout flou. On peut aussi analyser le fait qu'au niveau de la cornée, le passage de l'extérieur vers le corps vitreux ne s'accompagne de presque aucune déviation car l'intérieur de l'œil est principalement aqueux : les rayons arrivent sur le cristallin et étant bien plus divergent que normalement (où l'entrée dans l'œil s'accompagne d'un rapprochement à la normale locale de la cornée), donc le cristallin devrait être bien plus convergent qu'il n'en est capable pour renvoyer ces rayons se focaliser sur la rétine.

