Homogénéité et incertitudes , indications

1. Calculs

1. **Identité remarquable** : Vérifiez si cette égalité correspond à une identité remarquable connue. Est-elle correcte ?
2. **Développement d'un carré** : Rappelez-vous de la formule du développement de $(a+b)^2$. Est-elle bien appliquée ici ?
3. **Division par une fraction** : Diviser par une fraction $\frac{1}{2}$ revient à multiplier par son inverse. Quel est l'inverse de $\frac{1}{2}$?
4. **Division d'une puissance de 10** : Vérifiez si la division de 10^6 par 2 est correctement effectuée. Comment divise-t-on une puissance de 10 par un nombre ?
5. **Division de puissances négatives** : Rappelez-vous de la règle pour diviser deux puissances de 10 : $10^m/10^n = 10$ Appliquez-la ici.
6. **Racine carrée d'un produit** : La racine carrée d'un produit $\sqrt{16ab}$ peut-elle se simplifier en $4ab$? Rappelez-vous des propriétés des racines carrées.
7. **Addition de fractions** : Pour additionner deux fractions $\frac{b}{a} + \frac{c}{d}$, faut-il additionner les numérateurs et les dénominateurs ? Quelle est la méthode correcte ?
8. **Inverse d'une somme** : L'inverse d'une somme $\frac{1}{a+b}$ est-il égal à la somme des inverses $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$? Testez avec des valeurs simples pour a et b.
9. **Soustraction de fractions** : La soustraction $\frac{b-a}{ab}$ peut-elle s'écrire comme $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$? Vérifiez en mettant les fractions au même dénominateur.
10. **Logarithme d'un produit** : Rappelez-vous de la propriété du logarithme d'un produit $\ln(ab)$. Est-ce bien $\ln(a) \times \ln(b)$?
11. **Exponentielle d'une soustraction** : La propriété $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ est-elle correcte ? Rappelez-vous des règles des exponentielles.
12. **Cosinus d'une somme** : La formule $\cos(a+b)$ est-elle égale à $\cos(a) + \cos(b)$? Rappelez-vous de la formule trigonométrique correcte.

2. Quiz

— **Une grandeur dérivée ne peut être sans dimension.**
Pensez à des exemples de grandeurs dérivées qui pourraient être le rapport de deux grandeurs de même dimension. Par exemple, que se passe-t-il si on divise une longueur par une autre longueur ?

— **On pourrait baser un système de grandeurs fondamentales sur M, L, V (vitesse), Q (charge), Θ, J (intensité lumineuse) et N (nombre de particules).**
Réfléchissez aux unités de base nécessaires pour exprimer toutes les autres grandeurs physiques. Peut-on exprimer le temps et l'intensité électrique à partir des grandeurs proposées ?

— α **et** $\tan\alpha$ **sont sans dimension.**
Rappelez-vous de la définition d'un angle et de la fonction tangente. Les angles sont-ils exprimés avec une unité ? Qu'en est-il des fonctions trigonométriques ?

— **Lors des calculs intermédiaires dans un exercice, on peut arrondir au nombre de chiffres significatifs choisis (le nombre le plus faible des toutes les données).**
Que se passe-t-il si on arrondit les résultats intermédiaires ? Comment cela peut-il affecter la précision du résultat final ?

— **On peut déterminer l'incertitude sur une mesure en cherchant la précision des appareils de mesure.**
Quelles autres sources d'incertitude peuvent influencer une mesure ? Pensez aux erreurs humaines, aux conditions expérimentales ou aux limitations du protocole.

3. Conversions en unités SI

1. Exprimer le kilomètre en mètres et l'heure en secondes pour obtenir une vitesse en mètres par seconde.
2. Convertir les grammes en kilogrammes et les centimètres cubes en mètres cubes, en notant que $1\,\mathrm{m}^3 = 10^6\,\mathrm{cm}^3$
3. Convertir les milliampères en ampères et ne pas oublier que le terme cm^2 doit être converti en m^2.
4. Convertir les millinewtons en newtons et les centimètres en mètres séparément avant de multiplier.
5. Convertir les millilitres en litres, puis les litres en mètres cubes (ou directement les millilitres en mètres cubes).
6. Utiliser la relation de conversion entre degrés et radians : $\pi\,\mathrm{rad} = 180°$.
7. Convertir d'abord les minutes et secondes d'arc en degrés, puis les degrés en radians.

4. Unités diverses Pour chaque grandeur physique, commencez par rappeler sa définition ou une relation mathématique qui la met en jeu. Ensuite, exprimez les unités de chaque grandeur en fonction des unités de base du système international (mètre, kilogramme, seconde, ampère, etc.). Voici quelques pistes :

1. **Masse volumique** : Comment est définie la masse volumique ? Quelles sont les unités de la masse et du volume dans le système international ?
2. **Volume massique** : Quelle relation lie le volume massique à la masse volumique ? Comment peut-on exprimer cette grandeur en fonction des unités de base ?
3. **Transfert thermique** : Le transfert thermique est une forme d'énergie. Quelle est l'unité de l'énergie dans le système international ? Comment peut-on l'exprimer en fonction des unités de base ?
4. **Moment d'une force** : Le moment d'une force est défini comme le produit d'une force par une distance. Quelles sont les unités de ces deux grandeurs dans le système international ?
5. **Conductance d'un résistor** : La conductance est l'inverse de la résistance. Quelle est l'unité de la résistance dans le système international ? Comment peut-on exprimer cette unité en fonction des unités de base (volt, ampère, etc.) ?
6. **Travail** : Le travail est défini comme le produit d'une force par un déplacement. Quelles sont les unités de ces deux grandeurs dans le système international ?
7. **Coefficient d'autoinduction** : Ce coefficient intervient dans la relation entre la tension et la variation du courant. Quelle est l'unité de la tension et celle du courant ? Comment peut-on exprimer cette unité en fonction des unités de base ?
8. **Différence de potentiel** : La différence de potentiel est liée à l'énergie et à la charge électrique. Quelles sont les unités de ces deux grandeurs dans le système international ?
9. **Intensité** : Quelle est l'unité de base du courant électrique dans le système international ?

5. Une tasse de café ?

1. Pour comprendre ce que quantifie la capacité thermique massique c, commencer par analyser son unité $\mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$. Décomposer cette unité en identifiant :
   — kJ : unité d'énergie ;
   — kg^{-1} : inverse d'une unité de masse ;
   — K^{-1} : inverse d'une unité de température.

   En déduire que c représente une quantité d'énergie par unité de masse et par unité de température.
2. Pour calculer la chaleur transférée au milieu extérieur lors du refroidissement, rappeler la formule reliant la chaleur Q, la masse m, la capacité thermique massique c, et la variation de température $\Delta\mathrm{T}$ en se basant sur l'unité de c. Introduire les masses de l'eau (m_e) et de la tasse (m_t) (penser à celle qui est importante ici) ainsi que la variation de température $\Delta\mathrm{T}$. Choisir des valeurs numériques raisonnables pour ces paramètres.

3. Pour déterminer l'altitude à laquelle la tasse pourrait monter en utilisant l'énergie perdue, utiliser la relation entre l'énergie potentielle E_p, la masse totale $(m_t + m_e)$, l'accélération gravitationnelle g, et l'altitude h. Exprimer h en fonction de Q, m, et g.
4. Pour calculer la vitesse que la tasse pourrait atteindre en utilisant la même énergie, utiliser la relation entre l'énergie cinétique E_c, la masse totale $(m_t + m_e)$, et la vitesse v. Exprimer v en fonction de Q, m, et des constantes nécessaires.

6. Mesure et précision du résultat

7. Une année, vision du physicien

8. L'instrument de mesure

9. Batman

10. Problèmes de poids

11. Maquette mécanique des fluides

12. Anecdote historique sur la puissance de l'analyse dimensionnelle

1. Commencer par rappeler les principes de l'analyse dimensionnelle : les équations physiques doivent être homogènes en unités. Cela signifie que chaque terme d'une équation doit avoir la même dimension.
2. Identifier les dimensions des grandeurs impliquées dans le problème :
   — R est une longueur, donc sa dimension est L.
   — t est un temps, donc sa dimension est T.
   — E est une énergie, donc sa dimension est $M.L^2.T^{-2}$.
   — ρ est une masse volumique, donc sa dimension est $M.L^{-3}$.
3. À partir de l'expression donnée $R = A\,t^{2/5}$, déterminer la dimension de A en utilisant les dimensions de R et t. Exprimer [A] en fonction des dimensions de base L et T.
4. Supposer que A dépend de E, ρ, et d'un coefficient sans dimension α. Écrire A sous la forme $A = \alpha E^a \rho^b$, où a et b sont des exposants à déterminer.
5. Utiliser l'homogénéité dimensionnelle pour établir un système d'équations permettant de trouver les valeurs de a et b. Résoudre ce système pour obtenir les exposants.
6. Pour exprimer E en fonction de R, t, ρ, et k, utiliser la relation $R = A\,t^{2/5}$ et substituer A par son expression en fonction de E et ρ. Isoler E pour obtenir une expression de la forme $E = k\rho^c R^d t^e$, où c, d, et e sont des exposants à déterminer.
7. Vérifier l'homogénéité dimensionnelle de l'expression finale pour E afin de confirmer la validité des exposants trouvés.

13. Analyse dimensionnelle pour trouver une loi

14. Chiffres significatifs et encadrement

15. Précision de mesure

16. Je pense donc je me trompe! Pour exprimer l'erreur relative commise sur G en fonction des erreurs commises sur M_1, M_2, et M_3, suivre ces étapes :

1. Écrire G sous la forme $\frac{X}{Y}$ pour se ramener à une formule connue concernant l'erreur relative.
2. Exprimer l'incertitude sur Y en fonction de celle sur M_2 et M_3 pour remplacer dans la formule précédente
3. Pour identifier la mesure la moins critique, analyser les coefficients devant chaque terme d'erreur relative.

17. Incertitude en optique

1. Pour déterminer l'incertitude-type sur la mesure des angles, **observer attentivement la graduation du disque** utilisé pour mesurer les angles. L'incertitude-type est généralement estimée comme étant la moitié de la plus petite division visible. **Convertir cette incertitude en radians** si nécessaire pour les calculs ultérieurs.
2. Pour calculer l'indice n et son incertitude-type :
   - **Exprimer n en fonction des angles i et r** en utilisant la loi de Descartes.
   - **Utiliser la formule de propagation des incertitudes** pour une grandeur composée $n = f(i, r)$. Cela nécessite de calculer les dérivées partielles de n par rapport à i et r.
   - **Calculer les dérivées partielles** en considérant que $\sin r$ est constant pour la dérivée par rapport à i, et que $\sin i$ est constant pour la dérivée par rapport à r.
   - **Convertir les incertitudes $u(i)$ et $u(r)$ en radians** avant de les utiliser dans la formule de propagation des incertitudes.
   - **Effectuer l'application numérique** en utilisant les valeurs mesurées et les incertitudes estimées.

18. Étude d'une pile

1. Pour déterminer $E \pm \Delta E$ et $r \pm \Delta r$ sans les barres d'erreurs :
   - **Représenter graphiquement** les points de mesure U en fonction de I pour visualiser la relation linéaire $U = E - rI$.
   - **Utiliser une méthode d'ajustement linéaire** (par exemple, la méthode des moindres carrés) pour déterminer les valeurs de E (ordonnée à l'origine) et r (pente de la droite).
   - **Extraire les valeurs ajustées** de E et r à partir des résultats de l'ajustement.
   - **Estimer les incertitudes** sur E et r en utilisant les outils statistiques fournis par la méthode d'ajustement (par exemple, les écarts-types sur les paramètres).
2. Pour déterminer $E \pm \Delta E$ et $r \pm \Delta r$ en incluant les incertitudes de mesure :
   - **Calculer les incertitudes sur** U **et** I en utilisant les précisions données par le fabricant du multimètre. Pour chaque mesure, l'incertitude dépend de la valeur lue L et des spécifications du calibre utilisé.
   - **Représenter les barres d'erreur** sur le graphique pour chaque point de mesure afin de visualiser l'impact des incertitudes.
   - **Effectuer un ajustement linéaire en tenant compte des incertitudes** (par exemple, en utilisant une méthode pondérée ou un tirage Monte-Carlo).
   - **Analyser l'impact des incertitudes** sur les valeurs ajustées de E et r. Cela peut inclure :
     - **Estimer les valeurs extrêmes** de E et r en traçant des droites passant par les limites des barres d'erreur.
     - **Utiliser une méthode Monte-Carlo** pour générer des jeux de données aléatoires dans les intervalles d'incertitude et ajuster chaque jeu pour obtenir une distribution des valeurs de E et r.

— **Comparer les résultats** avec et sans prise en compte des incertitudes pour évaluer leur impact sur la précision des mesures.

19. Chiffres significatifs et mesures suivies d'un calcul

20. Homogénéité

1. Pour déterminer les dimensions des constantes $\mathscr{G}$ et $\hbar$, commencer par analyser les relations données :
   — Pour $\mathscr{G}$, utiliser la loi de Newton $F = \mathscr{G} M m / r^2$. Se rappeler que la dimension d'une force est $[F] = M{\cdot}L{\cdot}T^{-2}$. En déduire la dimension de $\mathscr{G}$ en isolant cette constante dans l'équation dimensionnelle.
   — Pour $\hbar$, utiliser la relation $E = \hbar\omega$. Se rappeler que l'énergie E a pour dimension $M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ et que la pulsation ω a pour dimension T^{-1}. En déduire la dimension de $\hbar$.
2. Pour construire les grandeurs de Planck m_P, t_P, et ℓ_P sous la forme $\mathscr{G}^\alpha \hbar^\beta c^\gamma$, suivre ces étapes :
   — Pour la masse de Planck m_P : Écrire $m_P = \mathscr{G}^\delta \hbar^\eta c^\mu$ et établir un système d'équations en égalant les dimensions des deux côtés de l'équation. Résoudre ce système pour trouver les exposants δ, η, et μ.
   — Pour le temps de Planck t_P : Une méthode possible consiste à chercher une combinaison de $\mathscr{G}$, $\hbar$, et c qui donne une dimension de temps. Par exemple, considérer le produit $\mathscr{G}\hbar$ et déterminer comment éliminer les dimensions indésirables en utilisant c.
   — Pour la longueur de Planck ℓ_P : Utiliser la relation $\ell_P = c\,t_P$ ou suivre une approche similaire à celle de la masse de Planck en cherchant une combinaison dimensionnelle appropriée.
3. Pour calculer les valeurs numériques de m_P, t_P, et ℓ_P, substituer les valeurs données pour $\mathscr{G}$, $\hbar$, et c dans les expressions obtenues précédemment. Veiller à utiliser les bonnes unités et à effectuer les calculs avec soin.

21. Exploitation de mesures expérimentales : chute libre d'une bille

22. Unités mécaniques

23. Unités thermodynamiques

24. Dimensions et unités en mécanique des fluides

25. Électromagnétisme : ε_0 et μ_0

26. Mobile en orbite circulaire

1. Pour trouver la vitesse v par analyse dimensionnelle, commencer par rappeler les dimensions de la force F, de la masse m, du rayon R, et de la vitesse v. La force a pour dimension $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$. Exprimer la dimension de $\dfrac{FR}{m}$ et montrer qu'elle correspond à une vitesse au carré. En déduire que v est proportionnelle à $\sqrt{\dfrac{FR}{m}}$.
2. Pour déterminer la période T, rappeler que la circonférence de l'orbite circulaire est $2\pi R$. La vitesse v est constante sur l'orbite, donc le temps T pour effectuer un tour complet est donné par $T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Substituer l'expression de v obtenue précédemment pour exprimer T en fonction de F, m, et R.

3. Dans le cas gravitationnel, la force F est donnée par $\mathrm{F} = \dfrac{\mathscr{G}\mathrm{M}m}{\mathrm{R}^2}$. Substituer cette expression dans les formules de v et T obtenues précédemment. Simplifier les expressions pour faire apparaître v et T en fonction de $\mathscr{G}$, M, et R.
4. Pour établir la troisième loi de Képler, partir de l'expression de T obtenue à la question précédente. Élever au carré et diviser par R^3 pour faire apparaître une constante. Identifier cette constante et exprimer-la en fonction de $\mathscr{G}$ et M.
5. Pour calculer la masse M du Soleil, utiliser la troisième loi de Képler et les données fournies ($\mathscr{G}$, R, et T pour la Terre). Isoler M dans l'équation et substituer les valeurs numériques pour obtenir sa masse. Attention aux unités : convertir R en mètres et utiliser $\mathrm{T} = 3{,}15.10^7$ s (1 an en secondes).

27. Différentiation logarithmique

1. Pour effectuer une différentiation logarithmique, commencer par prendre le logarithme naturel de la fonction f, soit $\ln(f)$. Puis, différencier les deux côtés de l'équation en utilisant les règles de dérivation du logarithme et des fonctions composées. Se rappeler que

$$\mathrm{d}(\ln(f)) = \frac{\mathrm{d}f}{f}$$

   Pour chaque fonction, appliquer cette méthode en tenant compte des variables indépendantes (par exemple, x et y pour $f(x,y) = xy$).
2. Pour exprimer $\mathrm{d}f$ par différentiation directe, différencier chaque fonction f en utilisant les règles classiques de dérivation (par exemple, la règle du produit, du quotient ou de la chaîne). Ensuite, comparer cette expression avec celle obtenue à partir de la différentiation logarithmique en multipliant $\mathrm{d}f/f$ par f. Vérifier que les deux expressions sont équivalentes après simplification.

28. Petite variation d'indice Pour résoudre ce problème en utilisant un calcul de petites variations, suivre ces étapes :

1. Commencer par différencier la loi de Cauchy $n = \mathrm{A} + \dfrac{\mathrm{B}}{\lambda^2}$ par rapport à λ. La constante A disparaît lors de la différentiation, et la différentielle de $\dfrac{\mathrm{B}}{\lambda^2}$ est $-\dfrac{2\mathrm{B}}{\lambda^3}\mathrm{d}\lambda$.
2. Substituer les valeurs numériques de B, λ, et $\mathrm{d}\lambda = \lambda' - \lambda$ dans l'expression de $\mathrm{d}n$. Veiller à convertir λ et $\mathrm{d}\lambda$ en micromètres (µm) pour assurer la cohérence des unités avec B.
3. Ajouter la variation $\mathrm{d}n$ à la valeur initiale n pour obtenir n'. Cette méthode est valable car $\mathrm{d}n$ est supposé petit devant n.

29. Pesanteur

1. Pour obtenir une expression approchée de g pour des altitudes faibles, commencer par réécrire la formule donnée sous la forme :

$$g = g_0\left(\frac{1}{(1+\frac{z}{\mathrm{R}})^2}\right).$$

   Puis, utiliser un développement limité de l'expression $(1+x)^\alpha$ au premier ordre, où $x = \frac{z}{\mathrm{R}}$. Se rappeler que pour $x \ll 1$, on a $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.
2. Pour déterminer l'altitude maximale z telle que l'erreur relative ne dépasse pas $0,001$, commencer par exprimer l'erreur relative entre l'expression exacte et l'expression approchée de g. L'erreur relative est définie par :

$$\left|\frac{g_{\text{exacte}} - g_{\text{approchée}}}{g_{\text{exacte}}}\right|.$$

Utiliser l'expression approchée obtenue à la question précédente pour établir une inégalité et résoudre pour z. Penser à isoler z en fonction des autres paramètres.