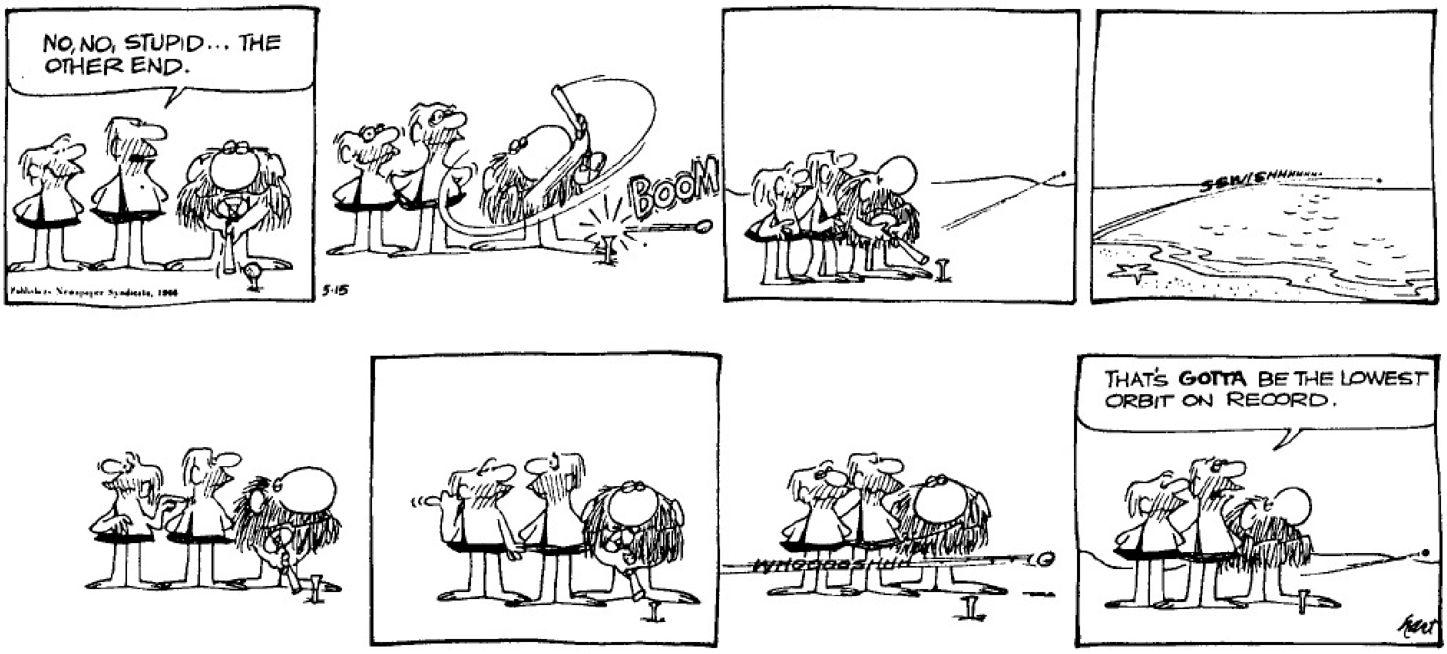
# Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

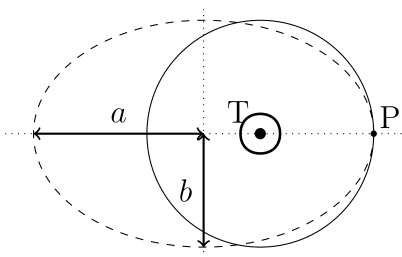
**1. Orbite rasante** Calculer la vitesse linéaire que devrait avoir la balle pour se trouver dans le cas décrit dans l'illustration ci-dessous.




**2. QCM Rocher dans la ceinture d'asteroïde** Dans la ceinture d'astéroïdes, un caillou est en orbite extrêmement rapprochée autour d'un rocher. La période orbitale de ce caillou autour du rocher est environ de

A) 2 min B) 2 h C) 2 j D) 2 ans

**3. Trajectoire impossible** On considère un satellite terrestre, sur une orbite circulaire de rayon R. Afin de changer d'orbite, on fait fonctionner le moteur pour exercer une poussée parallèle au mouvement ; ceci a pour effet d'augmenter la vitesse. On suppose la durée de cette action assez courte pour que le déplacement soit négligeable en comparaison de la taille de l'orbite. On se propose de tracer l'allure de cette trajectoire ; justifier que la représentation ci-contre est incohérente.

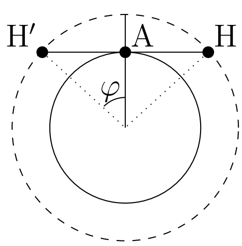



**4. Trou noir** Le Soleil émet de la lumière qu'on assimilera à des particules (suivant les lois de la mécanique newtonienne) nommées photon de vitesse $c = 3,0.10^8$ m.s$^{-1}$ dans cet exercice. Quel devrait être le rayon du soleil pour qu'il ne soit plus visible ?

Données : $G = 6,67.10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$ ; $M_S = 2,0.10^{30}$ kg.

**5. Temps de visibilité*** Pour un observateur situé en A, le temps de visibilité d'un satellite terrestre en orbite circulaire (représentée en pointillé) est le temps mis par le satellite pour parcourir l'arc $\widehat{HH'}$ si l'on néglige la rotation propre de la Terre, hypothèse que l'on retiendra par la suite. Calculer le temps de visibilité d'un satellite terrestre en orbite circulaire à l'altitude de $h = 200$ km.

Données : $\mathscr{G} = 6,67.10^{-11}$ SI ; $M_T = 6,0.10^{24}$ kg et $R_T = 6,4.10^3$ km.



**6. Rendez-vous orbital*** Deux satellites A et B tournent sur une même orbite circulaire de rayon $r$. Depuis le centre de la Terre, l'arc AB est vu sous l'angle $\alpha$, B étant en retard sur A.

1. Faire un schéma de la situation
2. Exprimer la vitesse $v_1$ de A et B en fonction de $r$.
3. Pour réaliser un rendez-vous orbital, B modifie sa vitesse en un temps très court, en faisant passer le module de sa vitesse de $v_1$ à $v_2$, mais sans changer sa direction. Déterminer $v_2$ pour qu'après avoir décrit sa nouvelle trajectoire une seule fois, B rencontre exactement A. Comparer $v_1$ et $v_2$. On notera $M_T$ la masse de la Terre et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

**7. Géostationnarité*** Un satellite est dit géostationnaire lorsqu'il est immobile dans tout référentiel lié à la Terre.

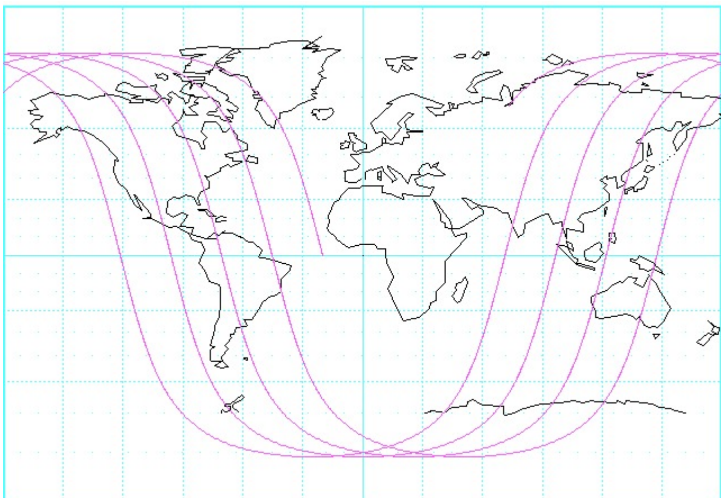
1. Démontrer qu'un satellite géostationnaire a obligatoirement sa trajectoire dans le plan équatorial.
2. Déterminer l'altitude $h$ d'un tel satellite.

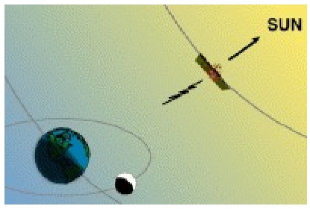
Données : $g_0 = 9,81$ m.s$^{-2}$ ; $R_T = 6,37.10^6$ m ; jour sidéral : $T = 86,2.10^3$ s.

**8. Lancement de satellite*** Un satellite de masse $m$ est lancé d'une base $M_0$ située à la latitude $\lambda$. Quelle énergie E faut-il fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon $r$ ? Exprimer le résultat en fonction de $m$, $\lambda$, $g_0$ (champ gravitationnel terrestre au niveau du sol), $R_T$ (rayon de la Terre), et $\omega_T$ vitesse angulaire de la Terre dans le référentiel géocentrique. Commenter.

**9. Satellite SPOT**** Le satellite Spot est un satellite en orbite circulaire lancé en 1986 et qui effectue 369 révolutions en 26 jours dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Expliquez pourquoi le mouvement est uniforme.
2. Calculer l'altitude $h$ du satellite SPOT en fonction de la période T et sa vitesse, $v$, en fonction de $h$ et des données.
3. Le satellite SPOT est à la verticale d'un point $M_0$ de la Terre à la latitude $\lambda$. Après 71 révolutions, il est à la verticale d'un autre point $M_1$ de la Terre. Montrer que les points $M_0$ et $M_1$ sont sur un même parallèle (*ie* ont même latitude). Calculer la distance $M_0M_1$ en fonction de $\lambda$.
4. Les caméras de SPOT balaient une surface sur la Terre dont une des dimensions est de 117 km. Quel est l'intérêt d'avoir choisi cette période de révolution






**10. SOHO**$^{**}$ Fruit d'une collaboration entre la NASA et l'ESA, la sonde spatiale SOHO (Solar and heliospheric Observatory) observe le soleil depuis 1996 à l'aide de 12 instruments complémentaires pour étudier la sismologie solaire. Le satellite SOHO a une hauteur de 3,65 m, une largeur de 3,65 m et pèse 610 kg. Il a été lancé de la station Cape Canaveral (USA), le 2 décembre 1995, par une fusée Atlas et placé sur une orbite en halo dans la direction du Soleil à environ 1,5 millions de kilomètres de la Terre de telle sorte que la sonde soit à tout instant alignée avec les centres de la Terre et du Soleil.

1. Quelle donnée, indiquée dans le texte, pouvez vous valider avec les données ci-dessous?
2. On suppose que le satellite est légèrement écarté perpendiculairement au plan de l'écliptique (plan de la trajectoire terrestre) par rapport à sa position de travail en restant à la même distance du Soleil. Prévoir qualitativement le mouvement de la sonde.

Données :

— masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24}$ kg;

— masse du Soleil $M_S = 2,0.10^{30}$ kg;

— Constante de gravitation $\mathscr{G} = 6,67.10^{-11}$ S.I;

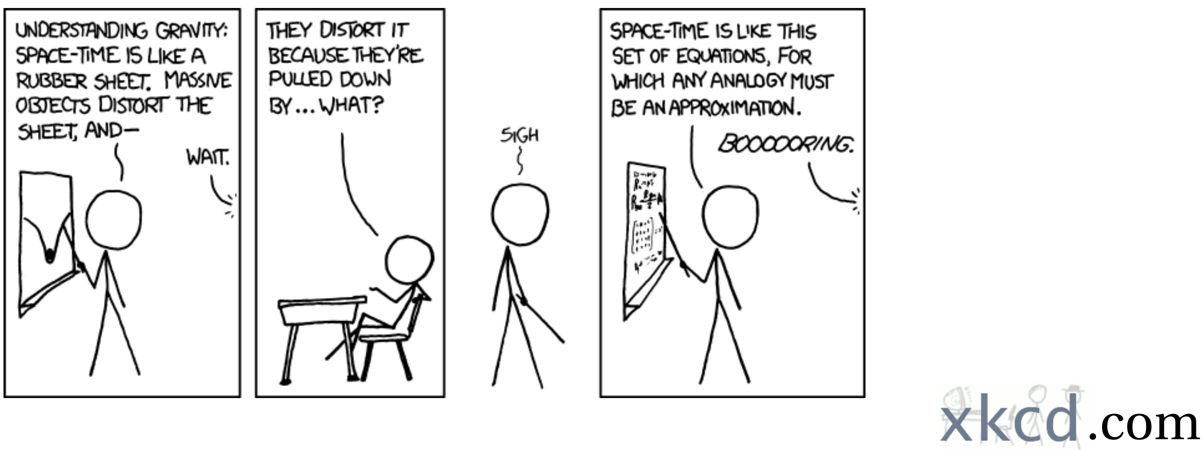
— Distance TS $d_{TS} = 1,5.10^8$ km.

**11. Freinage par poussières cosmiques**$^{**}$ On considère un satellite lunaire de masse $m$ en orbite circulaire. Un nuage de poussières se forme brutalement et exerce sur le satellite une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\, v\, \overrightarrow{v}$. On suppose qu'à toute date, l'orbite peut être considérée comme circulaire mais que ce rayon décroît (sur une échelle de temps bien supérieure à la durée de révolution du satellite sur une orbite circulaire). Montrer que le temps de chute du satellite depuis l'orbite de rayon $R_0$ jusqu'au contact de la lune de rayon $R_L$ est

$$\Delta t = \frac{m}{\alpha\sqrt{GM_L}}\left(\sqrt{R_0} - \sqrt{R_L}\right) \qquad \text{où } M_L \text{ désigne la masse de la Lune.}$$

**12. Mouvement à force centrale**$^{**}$ Un point matériel M de masse $m$ est soumis à une force centrale conservative $\overrightarrow{F} = -(a/r^3)\,\overrightarrow{e_r}$ exprimée dans la base locale sphérique, $a$ étant une constante positive. À l'instant initial, il se trouve en $M_0$ tel que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\,\overrightarrow{e_x}$ (O point fixe du référentiel d'étude $\mathscr{R}_g$ supposé galiléen) avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y})$ dans $\mathscr{R}_g$.

1. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_0}(M)$ se conserve dans $\mathscr{R}_g$. En déduire que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire. Exprimer la constante des aires en fonction de $r_0$, $v_0$ et $\alpha$.
2. Montrer que l'énergie mécanique du point M peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$. On exprimera $U_{eff}(r)$ en fonction de $r$, $a$, $r_0$, $v_0$, $m$ et $\alpha$.



```
Space-time is like some simple and familiar system which is both intuitively understandable
and precisely analogous, and if I were Richard Feynman I'd be able to come up with it.
```

**13. Ellipse de transfert de Hohmann**$^{**}$ On désire transférer un satellite terrestre d'une orbite circulaire basse de rayon $r_1$ sur une orbite circulaire haute de rayon $r_2 > r_1$. Pour cela, en un point P de l'orbite basse, on modifie à l'aide de fusées pendant un temps très court le module de la vitesse de telle sorte que le satellite change d'orbite et décrive une demi-ellipse se raccordant tangentiellement en A à l'orbite haute. Arrivé en A on actionne à nouveau les fusées pour permettre au satellite de décrire l'orbite circulaire haute. On suppose que la variation de la vitesse est instantanée et que seul le module est modifié.

1. Exprimer l'énergie totale du satellite sur l'orbite elliptique en fonction de $r_1 + r_2$. On rappelle que $r_1$ et $r_2$ sont les périgée et apogée de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse $v_1$ du satellite sur son orbite basse et la vitesse $v_1'$ après l'utilisation des fusées. Comparer $v_1$ et $v_1'$.
3. À quelle vitesse $v_2'$ le satellite atteint-il le point A ? Quelle est la vitesse finale $v_2$ du satellite sur son orbite haute ? Comparer $v_2'$ et $v_2$.
4. Calculer le temps de transfert de l'orbite basse à l'orbite haute ainsi que l'énergie dépensée. Comparer à la différence d'énergie des orbites basse et haute.

**14. Free-fall time**$^{**}$ Un corps est abandonné sans vitesse initiale dans le référentiel héliocentrique à une distance du Soleil égale au rayon de l'orbite de la Terre (on néglige donc l'excentricité de cette orbite) autour du Soleil. Calculer la durée $t_{\mathrm{ff}}$ que ce corps mettra pour atteindre le Soleil (considéré comme ponctuel). Le résultat final ne fera intervenir que la durée de révolution de la Terre : $\mathrm{T_T} = 365,25$ j.

**15. Expérience de Rutherford**$^{***}$ Une particule α (ou noyau d'hélium) de masse $m$, de charge $+2e$ est lancée vers un noyau lourd immobile de charge $+\mathrm{Z}e$ situé au point O de masse très supérieure à $m$.

Très loin du point O, la vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\,\overrightarrow{e_x}$ de la particule α est dirigée suivant un axe parallèle à O$x$ distant de $y_0$ de cet axe.

On donne les formules de Binet, où $\mathrm{C} = \sigma_{\mathrm{O}}/m$ et $u = 1/r$,

$$v^2 = \mathrm{C}^2\left[u^2 + \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right] \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{e_r} = -\mathrm{C}^2\,u^2\left(u + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\right)$$

1. On se propose d'établir l'équation de la trajectoire de la particule M en utilisant les coordonnées polaires telles que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r}$ et $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_r}) = \theta$.
   (a) Quelle propriété vérifie le moment cinétique $\sigma_{\mathrm{O}}$ de la particule par rapport à O ? En déduire l'expression de la vitesse angulaire $\dot\theta$ en fonction de $v_0$, $y_0$ et $r$.
   (b) On pose $u = 1/r$. Exprimer l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{\mathrm{c}}$ de la particule en fonction de $m$, $y_0$, $v_0$, $u$ et $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.
   (c) Déterminer l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{\mathrm{p}}$ d'interaction coulombienne en fonction de Z, $e$, $\varepsilon_0$ et $u$. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathscr{E}$ du point matériel M.
   (d) Montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme
   $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{\mathrm{Z}e^2}{2\pi\,\varepsilon_0\,m\,{y_0}^2\,{v_0}^2}$$
   (e) L'équation de la trajectoire s'écrit
   $$r = \frac{p}{\mathrm{A}\cos(\theta-\beta) - 1}$$
   Il s'agit d'une branche d'hyperbole dont l'un des foyers est confondu avec le point O.

i. Quelle est l'expression du paramètre $p$ de cette conique ?
ii. Déterminer A et $\beta$ à partir des conditions initiales ($\theta = 0$, $r = \infty$).

2. Lorsque la particule s'éloigne à nouveau du point O, elle tend à reprendre très loin de O un mouvement rectiligne de vitesse $\overrightarrow{v_1}$.

   (a) Quelle est la norme de $\overrightarrow{v_1}$ ?
   (b) On note $\varphi$ l'angle d'inclinaison en valeur absolue de la direction de diffusion de la particule $\alpha$ par rapport à la direction incidente. Exprimer $\varphi$ en fonction de Z, $e$, $m$, $\varepsilon_0$, $y_0$ et $v_0$.
   (c) Calculer numériquement $\varphi$ pour les valeurs suivantes de $y_0$ : $10^{-11}$ m, $10^{-12}$ m, $10^{-13}$ m.
   (d) Quel est l'intérêt de ce type d'expérience ?

   Données : $Z = 79$, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $m = 6{,}63.10^{-27}$ kg, $\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi}$ SI et $v_0 = 1{,}92.10^{7}$ m.s$^{-1}$.

3. En pratique, il n'est possible ni d'utiliser une particule $\alpha$ unique, ni de choisir une valeur précise de $y_0$. On considère un faisceau de particules $\alpha$ provenant de l'infini avec des vitesses initiales $\overrightarrow{v_0}$ identiques traversant une feuille d'or très fine de quelques nanomètres d'épaisseur. Que va-t-on observer et que peut-on en déduire (qualitativement) sur la structure de la matière ?

**16. Satellites de communication**$^{***}$ On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon $R_T$ et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre. À la fin de cet énoncé sont regroupées des valeurs de grandeurs physiques utilisables dans cette épreuve.

1. Un satellite de masse $m$ est en orbite circulaire de centre O, à une altitude $h$ de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période de révolution T et $h$.
2. Soient $E_c$ et $E_p$ l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre. Établir le « théorème du viriel » : $2\,E_c + E_p = 0$.
3. À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité $\tau$ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. 1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer $\tau$ en fonction de $h$, G, $M_T$ et $R_T$.
4. Calculer $T/\tau$. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites, identiques, appelé «train de satellites». Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un «train» afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant. Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est-à-dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

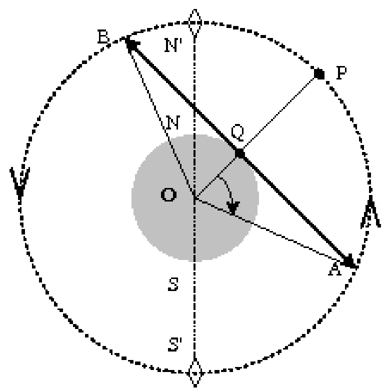


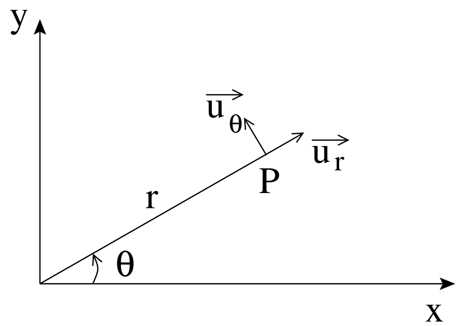
*Fig. 1 : Satellite P, point Q et ligne des horizons AB. Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est N'SNS'). L'angle est dit ancillaire.*

5. Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire c'est-à-dire tel qu'il survole à tout instant le même point de l'équateur. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4 ?

6. La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\overrightarrow{f}$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse $v$ du satellite et elle s'exprime par $\overrightarrow{f} = -\alpha m v \overrightarrow{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question et $v = \|\overrightarrow{v}\|$. Déterminer la dimension de α. Écrire le théorème de l'énergie cinétique en supposant que le théorème du viriel établi à la question 2 reste applicable en présence de $\overrightarrow{f}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $h$.
7. Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat!). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal?
8. En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \dfrac{\gamma}{h^\beta}$ où β et γ sont positifs. Le même satellite que celui de la question 7 (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer β et γ.

Données : Constante gravitationnelle $G = 6,67.10^{-11}$ m$^3$.kg$^{-1}$.s$^{-2}$, rayon de la Terre $R_T = 6400$ km, masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24}$ kg, masse du satellite $m = 2,0.10^3$ kg.

**17. Mouvement képlérien en relativité générale**$^{****}$ Ce problème concerne la déviation d'objets non massifs (rayons lumineux) ou massifs (planètes) dans divers champs (gravitationnel, coulombien). Il fait référence à des notions relativistes qu'il suffira d'admettre sans autre forme de procès, et conduisant à des conséquences observables. La première partie étudie la déviation de la lumière dans un champ gravitationnel. La seconde partie concerne un mouvement képlerien en relativité générale.




Les deux parties sont indépendantes entre elles, mais elles peuvent étendre ou utiliser des résultats de l'autre partie, en adoptant éventuellement un point de vue différent.

Le référentiel d'étude est, dans tout le problème, supposé galiléen. Toutes les trajectoires seront planes, situées dans le plan $xy$; dans le repère polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, les coordonnées d'un corps ponctuel P de masse $m$ (éventuellement nulle) sont notées, conformément au schéma ci-contre, $(r, \theta)$.

Selon la relativité générale, l'équation différentielle régissant la fonction $u = 1/r(\theta)$ lorsque P est soumis au champ gravitationnel d'un objet massif de masse $M_S$ placé au centre de force O est

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = GM_S\left(\frac{m}{L}\right)^2 + 3\frac{GM_S}{c^2}u^2 \qquad \textbf{[ED1]}$$

où G est la constante de la gravitation ($G = 6,67.10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$) et $c$ la vitesse de la lumière (célérité) dans le vide : $c = 3.10^8$ m.s$^{-1}$. Le moment cinétique $\overrightarrow{L} = mr^2\dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_z}$ est constant. Le corps massif sera, dans la suite, le Soleil; voici quelques données numériques : masse du Soleil, $M_S = 2.10^{30}$ kg; rayon du Soleil, $R_S = 7.10^8$ m.

1. Mirage gravitationnel
   (a) Équations du mouvement
      i. Établir que, en mécanique newtonienne, $L = mr^2\dfrac{d\theta}{dt} = mC$ est constant pour une particule soumise à une force centrale. Toujours dans ce cadre, établir l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a}$ de la particule (formule de Binet pour l'accélération) :
      $$\overrightarrow{a} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right)\overrightarrow{u_r}$$
      ii. Dans le cadre relativiste, la force centrale est la résultante

— de la force de gravitation newtonienne $\overrightarrow{\mathrm{F_N}} = -\dfrac{\mathrm{GM_S}\,m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r} = -\mathrm{GM_S}\,m\,u^2\,\overrightarrow{u_r}$

— et d'une force dite perturbatrice $\overrightarrow{\mathrm{F_R}} = -3\,\dfrac{\mathrm{GM_S}}{c^2}\,\dfrac{\mathrm{L}^2}{m}\,u^4\,\overrightarrow{u_r}$

À quelle condition le terme perturbateur est-il, pour une particule de masse non nulle, très petit devant le terme newtonien ?

iii. La particule P est un photon, particule de charge nulle et de masse nulle et dont on admettra ici qu'elle se comporte comme une particule ponctuelle de moment cinétique non nul. Montrer que « l'équation du mouvement du photon » est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 3\frac{\mathrm{GM_S}}{c^2}u^2 \qquad \textbf{[EMP]}$$

(b) Déviation de la ligne de visée d'une étoile

i. On note $u_0(\theta)$ la solution de l'équation **[EMP]** de la question 1.a.iii correspondant à $\mathrm{G} = 0$, c'est-à-dire à l'absence de gravitation ; quelle est a priori la trajectoire du photon dans ce cas ? Sachant que $u_0(0) = 1/\mathrm{R_S}$ et $u_0(\pi/2) = 0$, donner l'équation de la trajectoire, d'abord en coordonnées polaires, ensuite en coordonnées cartésiennes ordinaires $(x, y)$ ou réduites $\left(\mathrm{X} = x/\mathrm{R_S}, \mathrm{Y} = y/\mathrm{R_S}\right)$.

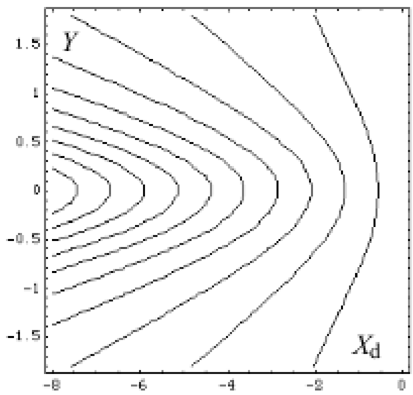
ii. Introduisant dans **[EMP]** la variable sans dimension $\mathrm{Z} = \mathrm{R_S}\,u = \mathrm{R_S}/r$, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z}}{\mathrm{d}\theta^2} + \mathrm{Z} = \kappa\mathrm{Z}^2 \qquad \text{où } 0 < \kappa \ll 1$$

Calculer la valeur numérique de $\kappa$. On cherche la solution approchée de l'équation différentielle en Z au premier ordre en $\kappa$, sous la forme

$$\mathrm{Z}(\theta) = \mathrm{Z}_0(\theta) + \kappa\mathrm{Z}_1(\theta) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Z}_0(\theta) = \cos(\theta)$$

Exprimer la composante au premier ordre sous la forme : $\mathrm{Z}_1(\theta) = \mathrm{A_Z} + \mathrm{B_Z}\cos(2\theta)$ en précisant les valeurs des constantes $\mathrm{A_Z}$ et $\mathrm{B_Z}$. À titre d'exemple, la figure ci-contre montre un ensemble de solutions pour quelques valeurs de $\kappa$. En abscisse, l'écart relatif $\mathrm{X_d} = 10^6\,(\mathrm{X}-1)$ et en ordonnée Y.




iii. Préciser les directions asymptotiques de la trajectoire ; établir l'équation cartésienne de cette dernière sous la forme $\mathrm{X} = \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ (on peut aussi bien trouver les directions asymptotiques à partir de l'équation cartésienne).

iv. On considère un rayon lumineux provenant d'une étoile lointaine ; ce rayon rase le Soleil et il est observé de la Terre, c'est-à-dire à une distance grande devant $\mathrm{R_S}$. Montrer que loin du Soleil la trajectoire se réduit à ses deux asymptotes. Calculer numériquement la valeur du petit angle entre les deux asymptotes.

2. Mouvement képlérien en relativité générale.

On considère maintenant le mouvement d'une planète, considérée comme un objet ponctuel de masse $m$, dont le mouvement est régi par l'équation différentielle **[ED1]** du préambule de ce problème. Avec les notations $\mathrm{B} = \left(\dfrac{m}{\mathrm{L}}\right)^2\mathrm{GM_S}$ et $\varepsilon = 3\left(\dfrac{\mathrm{GM_S}\,m}{\mathrm{L}c}\right)^2$, cette équation s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \mathrm{B} + \varepsilon\frac{u^2}{\mathrm{B}} \qquad \textbf{[ED2]}$$

(a) Solution perturbative

i. Vérifier l'homogénéité dimensionnelle de l'équation **[ED2]**.

ii. On suppose que l'inégalité $\varepsilon \ll 1$ est satisfaite. On cherche la solution approchée de l'équation du mouvement **[ED2]** sous la forme $u(\theta) = u^{(0)}(\theta) + \varepsilon u^{(1)}(\theta)$. Identifier les termes d'ordre 0 en $\varepsilon$ et montrer que l'on peut accepter la solution $u^{(0)} = \mathrm{B} + \mathrm{A}\cos(\theta)$ où A est une constante, que l'on ne cherchera pas à expliciter.

iii. L'identification des termes d'ordre 1 en $\varepsilon$ permet de déterminer la fonction $u^{(1)}(\theta)$. Établir l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(1)} = \mathrm{B} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}}\cos(2\theta) + 2\mathrm{A}\cos(\theta)$$

La solution de l'équation homogène : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(1)} = 0$ est $u^{(1)}(\theta) = \alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta)$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes. Cette solution ne nous intéresse pas.

iv. La solution de l'équation différentielle non homogène de la question précédente est la somme de deux termes : un terme périodique, associé à $\mathrm{B} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}}\cos(2\theta)$ dans le membre de droite et un terme « résonant », dit séculaire, $u_s^{(1)}$, associé à $2\mathrm{A}\cos(\theta)$. C'est ce terme qui va nous intéresser désormais. La solution de l'équation différentielle

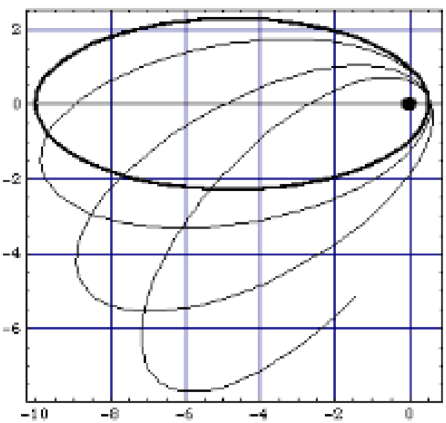
$$\frac{\mathrm{d}^2 u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(1)} = 2\mathrm{A}\cos(\theta)$$

est $u_s^{(1)} = \mathrm{A}\theta\sin(\theta)$. Cette solution est-elle admissible quel que soit $\theta$ ?

(b) Avance du périhélie

i. On suppose dans ce qui suit que l'inégalité $\varepsilon\theta \ll 1$ est satisfaite, ce qui permet d'admettre l'approximation $\cos(\theta - \varepsilon\theta) \approx \cos(\theta) + \varepsilon\theta\sin(\theta)$. Déduire, dans ce cadre, que le périhélie ($r$ minimum, $u$ maximum) est obtenu pour les angles $\theta = \theta_n \approx 2\pi n(1+\varepsilon)$.

ii. De combien a varié l'angle $\theta$ entre deux périhélies successifs ? Le déplacement du périhélie pour une révolution de la planète autour du Soleil, $\dot{\omega}$, est donc $\dot{\omega} = 2\pi\varepsilon$ (formule de Robertson, 1938). La figure ci-contre donne une idée du phénomène. Le point noir est le centre de forces. La courbe en trait gras représente la trajectoire képlerienne classique d'une planète imaginaire. La courbe en trait fin montre l'effet d'une perturbation relativiste de la trajectoire ; en réalité, la perturbation est infime, de l'ordre de $10^{-4}$ rad par siècle.




iii. Calculer, en seconde d'arc par siècle, la valeur de $\dot{\omega}$ pour la planète Mercure, sachant que $\mathrm{C} = \mathrm{L}/m = 2{,}718.10^{15}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ et que sa période de révolution autour du Soleil est de 87,969 jours.