Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

1. Orbite rasante

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathscr{G}\,\mathrm{M_T}}{\mathrm{R_T}}} = 7,91\ \mathrm{km.s^{-1}}}$$

2. QCM Rocher dans la ceinture d'asteroïde Avec $\rho = 5,0.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ et $\dfrac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}} \approx 1$,

$$\boxed{\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{(\mathrm{R}+h)^3}{\mathscr{G}\,\mathrm{M}}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{\mathrm{R}+h}{\mathrm{R}}\right)^3 \frac{3}{4\pi\rho\mathscr{G}}} \approx 1,5\ \mathrm{h}}$$

3. Trajectoire impossible La vitesse ayant augmentée, le point P est nécessairement le périgée de la nouvelle orbite. La trajectoire elliptique ne peut donc par conséquent pas rentrer à l'intérieur du cercle.

4. Trou noir None available

5. Temps de visibilité* None available

6. Rendez-vous orbital* None available

7. Géostationnarité*

1. Comme on a affaire à une force centrale, le mouvement est nécessairement dans le plan contenant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire le plan passant par la position initiale du satellite et le centre de masse de la Terre. Supposons que l'orbite ne soit pas équatoriale, alors sur une moitié d'orbite le satellite survole l'hémisphère Nord de la Terre alors que sur l'autre moitié, il survole l'hémisphère Sud. Un même point ne pouvant pas se trouver strictement dans l'hémisphère Nord *et* dans l'hémisphère Sud, le satellite ne peut en aucun cas rester immobile au-dessus du même point de la surface terrestre. Il ne reste donc que le plan équatorial de disponible.
2. La période de rotation du satellite doit être égale à la période sidérale de la Terre pour que le satellite semble toujours être immobile au-dessus du même point de la surface. Or, la loi des périodes de Kepler permet d'obtenir, avec h l'altitude du satellite, c'est-à-dire la distance au sol,
$$\frac{\mathrm{T}^2}{(\mathrm{R_T}+h)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{GM_T}}$$
Avec la relation $g_0 = \mathrm{GM_T}/\mathrm{R_T}^2$, il vient
$$\boxed{h = \sqrt[3]{\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\right)^2 g_0\,\mathrm{R_T}^2} - \mathrm{R_T} = 35,8.10^3\ \mathrm{km}}$$

8. Lancement de satellite* Pour être sur une orbite de rayon r, le satellite doit avoir une énergie mécanique

$$\mathrm{E_{mf}} = -\frac{\mathrm{GM}m}{2r}$$

Or, sur sa base de lancement, il est déjà à une distance $\mathrm{R_T}$ du centre de la Terre et animé de la vitesse de rotation du sol, c'est-à-dire avec une énergie

$$\mathrm{E_{mi}} = \frac{1}{2}\, m\, [(\mathrm{R_T} \cos\lambda)\, \omega_\mathrm{T}]^2 - \frac{\mathrm{GM}m}{\mathrm{R_T}}$$

d'où l'énergie à fournir, d'autant plus faible que la latitude λ est proche de 0,

$$\boxed{\Delta\mathrm{E} = \mathrm{E_{mf}} - \mathrm{E_{mi}} = -\frac{\mathrm{GM}m}{2r} - \frac{1}{2}\, m\, (\mathrm{R_T} \cos\lambda\, \omega_\mathrm{T})^2 + \frac{\mathrm{GM}m}{\mathrm{R_T}}}$$

9. Satellite SPOT** None available

10. SOHO** None available

11. Freinage par poussières cosmiques** None available

12. Mouvement à force centrale** None available

13. Ellipse de transfert de Hohmann**

1. Le grand-axe de l'orbite elliptique de transfert vaut $2a = r_1 + r_2$, d'où l'énergie mécanique

$$\boxed{\mathrm{E_m} = -\frac{\mathrm{GM}m}{2a} = -\frac{\mathrm{GM}m}{r_1 + r_2}}$$

2. Écrivons l'équation donnant l'énergie mécanique à la fois au périgée de l'ellipse et sur l'orbite de rayon r_1,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} m {v'_1}^2 - \dfrac{\mathrm{GM}m}{r_1} = -\dfrac{\mathrm{GM}m}{r_1 + r_2} \\ \dfrac{1}{2} m {v_1}^2 - \dfrac{\mathrm{GM}m}{r_1} = -\dfrac{\mathrm{GM}m}{2\, r_1} \end{cases}$$

En prenant la différence,

$$\boxed{\frac{1}{2} m {v'_1}^2 = \frac{1}{2} m {v_1}^2 + \left(\frac{\mathrm{GM}m}{2\, r_1} - \frac{\mathrm{GM}m}{r_1 + r_2}\right) > \frac{1}{2} m {v_1}^2} \qquad \text{car } 2\, r_1 < r_1 + r_2$$

3. Écrivons l'équation donnant l'énergie mécanique à la fois à l'apogée de l'ellipse et sur l'orbite de rayon r_2,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} m {v'_2}^2 - \dfrac{\mathrm{GM}m}{r_2} = -\dfrac{\mathrm{GM}m}{r_1 + r_2} \\ \dfrac{1}{2} m {v_2}^2 - \dfrac{\mathrm{GM}m}{r_2} = -\dfrac{\mathrm{GM}m}{2\, r_2} \end{cases}$$

En prenant la différence,

$$\boxed{\frac{1}{2} m {v'_2}^2 = \frac{1}{2} m {v_2}^2 + \left(\frac{\mathrm{GM}m}{2\, r_2} - \frac{\mathrm{GM}m}{r_1 + r_2}\right) < \frac{1}{2} m {v_2}^2} \qquad \text{car } 2\, r_2 > r_1 + r_2$$

Il faut bien encore fournir de l'énergie pour se stabiliser sur l'orbite de plus grand rayon.

4. Le temps de transfert est égal à la moitié de la période de l'ellipse de transfert, obtenue à l'aide de la loi des périodes de Képler,

$$\boxed{t_\text{transfert} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{\mathrm{GM}} \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^3}}$$

L'énergie fournie est la différence entre les énergies cinétiques successives :

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{E} &= \left(\frac{1}{2}m{v_1'}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2\right) + \left(\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_2'}^2\right)\\ &= \left(\frac{\mathrm{GM}m}{2\,r_1} - \frac{\mathrm{GM}m}{r_1+r_2}\right) + \left(\frac{\mathrm{GM}m}{r_1+r_2} - \frac{\mathrm{GM}m}{2\,r_2}\right)\\ &\boxed{\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{GM}m}{2\,r_1} - \frac{\mathrm{GM}m}{2\,r_2}}\end{aligned}$$

C'est-à-dire exactement la différence d'énergie mécanique $\mathrm{E_{m2}} - \mathrm{E_{m1}}$ entre les deux orbites.

14. Free-fall time** Calculons l'énergie mécanique totale du corps laché sans vitesse initiale depuis la distance Terre-Soleil d_{TS} :

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m \times 0^2 - \frac{\mathrm{GM_S}m}{d_{\mathrm{TS}}} = -\frac{\mathrm{GM_S}m}{d_{\mathrm{TS}}}$$

Or, pour une orbite elliptique de demi-grand axe a, l'énergie mécanique vaut $-\mathrm{GM_S}m/2a$, d'où une orbite elliptique « limite » correspondante de demi-grand axe $a = d_{\mathrm{TS}}/2$ et de période, par la loi des périodes de Képler, $\mathrm{T} = \mathrm{T_T}/2\sqrt{2}$. Comme la chute se fait sur une demi-période, le temps total de chute vaut

$$\boxed{t_{\mathrm{ff}} = \frac{\mathrm{T_T}}{4\sqrt{2}}}$$

15. Expérience de Rutherford***

1. Équation de la trajectoire.
   (a) Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, la seule force substancielle à l'échelle des particules considérées est la force électrique (répulsive) entre la particule α et le noyau atomique

   $$\overrightarrow{\mathrm{F_e}} = \frac{2\,\mathrm{Z}\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

   Cette force étant centrale, le moment cinétique de la particule par rapport au centre O est **conservé** au cours du temps. En posant $\mathrm{H_0}$ la projection de M sur l'axe Oy, on a

$$\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{OH_0}} \wedge m\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\mathrm{H_0M}} \wedge m\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{OH_0}} \wedge m\,\overrightarrow{v} = -m\,y_0\,v_0\,(\overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_x}) = m\,y_0\,v_0\,\overrightarrow{e_z}$$

   Comme d'autre part, en polaires, $\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}}} = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$

   On en déduit $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{y_0\,v_0}{r^2}}$

   (b) À l'aide de la formule de Binet pour la vitesse, on écrit

   $$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,(y_0\,v_0)^2\,(u^2 + u'^2)}$$

   (c) En tant que force en $1/r^2$, la force électrique admet une énergie potentielle en $1/r$ de la forme

   $$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{p}} = \frac{2\,\mathrm{Z}\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{\mathrm{Z}\,e^2}{2\pi\,\varepsilon_0}\,u}$$

   L'énergie mécanique (conservée) de la particule α s'écrit donc

   $$\boxed{\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\mathrm{c}} + \mathscr{E}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,m\,{y_0}^2\,{v_0}^2\,(u^2 + u'^2) + \frac{\mathrm{Z}\,e^2}{2\pi\,\varepsilon_0}\,u}$$

(d) La conservation de l'énergie s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = 0$. Or, puisque $\dot{\theta} = y_0\, v_0/r^2 \neq 0$, on a que

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

Or, $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}\theta} = m\, {y_0}^2\, {v_0}^2\, (u + u'')\, u' + \frac{\mathrm{Z}\, e^2}{2\pi\, \varepsilon_0}\, u'$$

Comme $u' \neq 0$ la plupart du temps du fait du mouvement non circulaire de la particule α, on peut simplifier et on en déduit l'équation de la trajectoire

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{\mathrm{Z}\, e^2}{2\pi\, \varepsilon_0\, m\, {y_0}^2\, {v_0}^2}}$$

(e) Trajectoire hyperbolique.

i. Avec l'expression fournit pour r, on a que

$$u = \frac{\mathrm{A}}{p}\, \cos(\theta - \beta) - \frac{1}{p}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, le terme en $\cos(\theta - \beta)$ se simplifie (c'est la solution homogène) et il ne reste que $-1/p$, solution particulière. On en déduit que

$$\boxed{p = \frac{2\pi\, \varepsilon_0\, m\, {y_0}^2\, {v_0}^2}{\mathrm{Z}\, e^2}}$$

ii. La première condition, $r \to \infty$ quand $\theta \to 0$ revient à $u(0) = 0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{A}\cos\beta = 1$$

Comme d'habitude avec les conditions initiales, il nous faut une condition sur la position et une sur la vitesse pour pouvoir déterminer entièrement le système. Il faut donc trouver la condition sur la vitesse qui est que $v(\theta = 0) = v_0$ en norme. Le rapport avec u est donné par la formule de Binet

$${v_0}^2 = \mathrm{C}^2\, (u^2 + u'^2) = \mathrm{C}^2\, u'^2 = (y_0\, v_0)^2\, \frac{\mathrm{A}^2}{p^2}\, \sin^2\beta$$

Ainsi, $$\mathrm{A}\, \sin\beta = \pm\, \frac{p}{y_0} = \frac{p}{y_0}$$

On a choisi le signe positif car on veut que $\theta > 0$ soit possible et on a bien, si θ et β sont positifs, que $\cos(\theta - \beta) > \cos(\beta)$.

Ces deux conditions permettent alors d'extraire

$$\boxed{\tan\beta = \frac{p}{y_0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{y_0}\right)^2}}$$

2. Angle de déviation

(a) Loin du point O, l'énergie potentielle est nulle. L'énergie cinétique vaut donc l'énergie totale $\mathscr{E}$, justement égale à l'énergie cinétique initiale. Ainsi

$$\boxed{v_1 = v_0}$$

(b) La condition d'éloignement infini pour $\theta = \varphi$ s'écrit

$$\mathrm{A}\,\cos(\varphi - \beta) = 1 = \mathrm{A}\,\cos\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi = 2\beta \quad \text{ou} \quad \varphi = 0$$

La solution $\varphi = 0$ étant la situation de départ, on a alors

$$\boxed{\varphi = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{p}{y_0}\right)}$$

(c) *Application numérique* :

y_0 (en m)	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}
$180 - \varphi$ (en °)	$0,17$	$1,7$	$16,9$

(d) Ce type d'expérience permet de sonder le caractère ponctuel du noyau atomique en mesurant les écarts aux valeurs théoriques.

3. En fait, il n'est pas possible d'imposer la valeur du paramètre d'impact y_0 mais on peut en estimer la pertinence en calculant la probabilité de déflection avec un angle donné en fonction de la densité de la feuille d'or utilisée. L'expérience de Rutherford, réalisée en 1909, prouva que le noyau atomique était une boule positive de très faible dimension car ses résultats étaient en parfait accord avec les calculs réalisés précédemment. Elle infirma notamment le modèle alors en vogue (dit du plum's pudding énoncé en 1904 par JJ Thomson, père de l'électron (1897)) qui supposait la matière formée d'une assemblée diffuse de charges électriques positives (le pudding) dans laquelle nageait quelques électrons ponctuels (les raisins secs distribués dans le pudding).

16. Satellites de communication***

1. On établit facilement que la vitesse sur l'orbite circulaire s'écrit $v = \sqrt{\mathrm{GM_T/R}}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi\mathrm{R}}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(\mathrm{R_T}+h)^3}{\mathrm{GM_T}}}}$$

On retrouve la troisième de Kepler dans le cas particulier du mouvement circulaire.

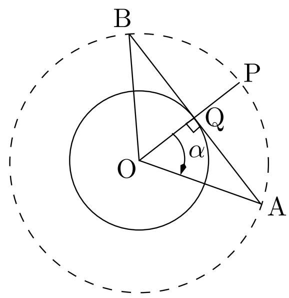
2. La vitesse sur l'orbite vaut $v = \mathrm{R}\,\omega = \sqrt{\mathrm{GM_T/R}}$, de fait

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{\mathrm{GM_T}\,m}{2\,(\mathrm{R_T}+h)}$$

Pour l'énergie potentielle, $$\mathrm{E_p} = -\frac{\mathrm{GM_T}\,m}{\mathrm{R_T}+h}$$

D'où le théorème du viriel $$\boxed{2\,\mathrm{E_c} + \mathrm{E_p} = 0}$$

3. La vitesse étant constante, l'angle parcouru vaut



$$2\alpha = \omega\,\tau = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,\tau$$

Or, $$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{R_T}}{\mathrm{R_T}+h}$$

soit $$\boxed{\tau = 2\,\mathrm{Arccos}\left(\frac{\mathrm{R_T}}{\mathrm{R_T}+h}\right)\sqrt{\frac{(\mathrm{R_T}+h)^3}{\mathrm{G\,M_T}}} = 9,2.10^2\ \mathrm{s}}$$

4. De la question précédente, on tire directement

$$\boxed{\frac{\mathrm{T}}{\tau} = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\mathrm{Arccos}[\mathrm{R_T}/(\mathrm{R_T}+h)]} = 6,6}$$

Pour pouvoir être constamment en vue d'un satellite sur une orbite polaire fixée, il faut donc au minimum un train de 7 satellites Les satellites couvrant la surface avec le même angle (2α) dans la direction est-ouest, il faut 7 orbites polaires pour couvrir l'ensemble de la surface terrestre, soit **49 satellites** en tout.

5. Un satellite est en orbite géostationnaire s'il apparaît immobile dans le référentiel terrestre pour un observateur lui-même immobile sur Terre. Une orbite géostationnaire est forcément située dans le plan équatorial de la Terre, la période du satellite est identique à celle de la Terre dans le référentiel géocentrique (jour sidéral), c'est-à-dire $\mathrm{T} = 86164$ s. À l'aide de la relation établie à la question 1, on constate que cela correspond à

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{G\,M_T\,T^2}}{4\pi^2}} - \mathrm{R_T} = 36.10^3\ \mathrm{km}}$$

Le satellite est fixe par rapport à la Terre, la notion de durée de visibilité n'a plus de sens. L'emploi de la formule obtenue dans la question précédente montre qu'un satellite couvre un angle d'environ 163°, trois satellites suffisent donc pour couvrir l'orbite équatoriale complète et leur suivi est facile. Par contre il ne pourra couvrir que les latitudes comprises entre −81° et +81° : la couverture de la Terre n'est pas assurée.

6. Une force est une masse multipliée par une accélération :

$$[f] = \mathrm{M.L.T^{-2}}$$

Selon la définition de la force fournie par l'énoncé :

$$[f] = [\alpha].\mathrm{M}.(\mathrm{L.T^{-1}})^2 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{M.L.T^{-2}} = [\alpha].\mathrm{M.L^2.T^{-2}}$$

et finalement $$\boxed{[\alpha] = \mathrm{L^{-1}}}$$

Le satellite est soumis à deux forces : la force gravitationnelle, qui dérive de l'énergie potentielle $\mathrm{E_p}$, et la force de frottement f. Pour un déplacement élémentaire du satellite, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\mathrm{dE_c} = \delta\mathrm{W_G} + \delta\mathrm{W_f} = -\mathrm{dE_p} + \delta\mathrm{W_f}$$

Le théorème du viriel donne $\mathrm{dE_c} = -\mathrm{dE_p}/2$ soit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathrm{dE_p} &= \delta\mathrm{W_f}\\ &= -\alpha\, m\, v\, \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{GM_T}\,m}{2\,(\mathrm{R_T}+h)^2}\,\mathrm{d}h = -\alpha\, m\, v^3\, dt$$

Puisque la vitesse varie très peu en norme au cours d'une révolution alors $v^2 = \mathrm{G\,M_T}/(\mathrm{R_T}+h)$, on en déduit que h vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + 2\,\alpha\,\sqrt{\mathrm{GM_T}\,(\mathrm{R_T}+h)} = 0}$$

7. Sur une révolution, $\Delta t = \mathrm{T}$ et la variation relative d'altitude $\Delta h/h$ est faible, permettant d'approximer $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \approx \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$. Ainsi, avec $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\mathrm{R}^3/\mathrm{GM_T}}$,

$$\boxed{\alpha = -\frac{\Delta h}{2\,\mathrm{T}\,\sqrt{\mathrm{G\,M_T}\,(\mathrm{R_T}+h)}} = -\frac{\Delta h}{4\pi\,(\mathrm{R_T}+h)^2} = 1,5.10^{-15}\ \mathrm{m}^{-1}}$$

Au bout de 10 ans de chute constante à 1 m par révolution, l'altitude du satellite aura varié d'autant de mètre qu'il a fait de révolutions (en supposant la période de révolution constante), c'est-à-dire d'une hauteur H telle que

$$\boxed{\mathrm{H} = \Delta h\,\frac{10\times 365,25\times 24\times 3600}{2\pi\sqrt{(\mathrm{R_T}+h)^3/\mathrm{GM_T}}} = -52,0\ \mathrm{km}}$$

Sans faire d'approximations, il faut intégrer l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h}{2\sqrt{\mathrm{R_T}+h}} = -\alpha\,\sqrt{\mathrm{G\,M_T}}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne $$\sqrt{\mathrm{R_T}+h_2} - \sqrt{\mathrm{R_T}+h_1} = -\alpha\,\sqrt{\mathrm{GM_T}}\,(t_2-t_1) \qquad \text{avec } t_2 - t_1 = 10 \text{ ans}$$

soit $$\boxed{\mathrm{H} = h_2 - h_1 = \left(\sqrt{\mathrm{R_T}+h_1} - \alpha\,\sqrt{\mathrm{GM_T}}\,(t_2-t_1)\right)^2 - \mathrm{R_T} - h_1 = -51,9\ \mathrm{km}}$$

L'écart relatif entre les valeurs de H données par les deux méthodes est de l'ordre de 10^{-4}, ce n'est pas étonnant au vu de la faible valeur de α. Il n'est pas paradoxal que la vitesse du satellite augmente en présence d'une force opposée au mouvement car comme $\mathrm{E_m} = \mathrm{E_p}/2$ et $\mathrm{E_c} = -\mathrm{E_p}/2 = -\mathrm{E_m}$, la perte d'énergie mécanique entraîne une augmentation d'énergie cinétique dûe au fait que la force gravitationnelle travaille plus (en valeur absolue) que les forces de frottement et surcompense ainsi leur action.

8. De même que précédemment, pour une faible variation d'altitude au cours d'une révolution, on a

$$\Delta h = -4\pi\,\alpha(h)\,(\mathrm{R_T}+h)^2 = -4\pi\,\frac{\gamma}{h^\beta}\,(\mathrm{R_T}+h)^2$$

Si on effectue le rapport entre les deux variations d'altitude données dans l'énoncé, pour $h_1 = 800$ km et $h_2 = 400$ km, on obtient

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^\beta \left(\frac{\mathrm{R_T}+h_1}{\mathrm{R_T}+h_2}\right)^2$$

soit $$\boxed{\beta = \frac{1}{\ln(h_2/h_1)}\,\ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\left(\frac{\mathrm{R_T}+h_2}{\mathrm{R_T}+h_1}\right)^2\right) = 1,2}$$

Par ailleurs, on sait que $\alpha(800\ \mathrm{km})$ vaut $1,5.10^{-15}\ \mathrm{m}^{-1}$, ce qui conduit à

$$\boxed{\gamma = 1,1.10^{-8}\ \mathrm{m}^{1/5}}$$

17. Mouvement képlérien en relativité générale****

1. Mirage gravitationnel
   (a) Équations du mouvement

i. La conservation du moment cinétique a déjà été démontrée dans le problème sur la station internationale. Pour la formule de Binet, la force étant centrale, l'accélération est nécessairement radiale, d'où, en coordonnées polaires,

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r}$$

On exprime $\quad \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{1}{u}\right)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{u^2}\,u'\,\dot{\theta} = -\mathrm{C}\,u' \qquad$ car $\mathrm{C} = r^2\,\dot{\theta} = \dfrac{\dot{\theta}}{u^2} = \mathrm{C^{te}}$

Ainsi, $\quad \ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\mathrm{C}\,u')\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{C}\,u''\dot{\theta} = -\mathrm{C}^2\,u^2\,u''$

d'autre part $\quad r\,\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{u}\left(\mathrm{C}\,u^2\right)^2 = \mathrm{C}^2\,u^3$

Au final, on a bien $\quad \boxed{\overrightarrow{a} = -\mathrm{C}^2\,u^2\,(u'' + u)\,\overrightarrow{e_r}}$

ii. Le terme perturbateur est très petit devant le terme newtonien si et seulement si

$$\frac{3\,\mathrm{L}^2 u^4}{mc^2} \ll mu^2$$

Or $\mathrm{L}/m = r^2\,\dot{\theta}$, ainsi cette condition s'écrit

$$\boxed{3\,(r\,\dot{\theta})^2 \ll c^2}$$

La vitesse tangentielle de la particule doit être très petite devant la vitesse de la lumière.

iii. Avec les deux forces fournies par l'énoncé et la formule de Binet, on retrouve **[ED1]**

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \mathrm{GM_S}\left(\frac{m}{\mathrm{L}}\right)^2 + 3\frac{\mathrm{GM_S}}{c^2}u^2$$

Il suffit alors de remplacer m par 0,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 3\frac{\mathrm{GM_S}}{c^2}\,u^2} \qquad \textbf{[EMP]}$$

(b) Déviation de la ligne de visée d'une étoile

i. En l'absence de gravitation, on s'attend à ce que les trajectoires soient des droites. L'équation précédente s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_0(\theta) = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta}$$

Avec les conditions initiales on obtient $u_0(\theta) = \dfrac{1}{\mathrm{R_S}}\cos\theta$, soit

$$\boxed{r(\theta) = \frac{\mathrm{R_s}}{\cos\theta} \qquad \text{d'où} \qquad x = r\cos\theta = \mathrm{R_s} \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta = \mathrm{R_s}\tan(\theta)}$$

Ce qui est bien une droite ($x = \mathrm{C^{te}}$ quelle que soit la valeur de y).

ii. En remplaçant $u = \mathrm{Z}/\mathrm{R_s}$ dans **[EMP]**, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z}}{\mathrm{d}\theta^2} + \mathrm{Z} = \kappa\,\mathrm{Z}^2 \qquad \text{avec} \qquad \kappa = \frac{3\,\mathrm{G\,M_S}}{\mathrm{R_S}\,c^2} = 6,4.10^{-6}} \qquad (\mathbf{1})$$

On vérifie que κ est bien très petit devant 1. Ce terme étant petit, le second membre est quasi-nul (si on suppose Z bornée et suffisament petite). On peut donc supposer que la solution est quasiment $\cos(\theta)$ auquel s'ajoute un terme correctif en κ. On injecte alors la solution proposée dans l'équation différentielle, on obtient un polynôme en κ. Les coefficients $\mathrm{A_Z}$ et $\mathrm{B_Z}$ s'obtiennent par identification. Le terme en $\kappa\,\mathrm{Z}^2$ va donner des termes en κ^2 et κ^3, de l'ordre de 10^{-12} et 10^{-18}. Si l'on suppose Z_1 bornée, les termes en κ^2 et κ^3 sont alors négligeables, d'où la proposition d'effectuer le développement au premier ordre. Cherchons Z sous la forme $\mathrm{Z}(\theta) = \cos\theta + \kappa\,\mathrm{Z}_1(\theta)$. Injecté dans l'équation (**1**), il vient

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z}_0}{\mathrm{d}\theta^2} + \mathrm{Z}_0}_{=0} + \kappa\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z}_1}{\mathrm{d}\theta^2} + \kappa\,\mathrm{Z}_1 = \kappa\cos^2\theta + \underbrace{2\,\kappa^2\,\mathrm{Z}_0\,\mathrm{Z}_1 + \kappa^3\,{\mathrm{Z}_1}^2}_{\text{négligeable}}$$

Au premier ordre,
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Z}_1}{\mathrm{d}\theta^2} + \mathrm{Z}_1 = \cos^2\theta \qquad (\mathbf{2})$$

L'énoncé propose de chercher une solution à l'équation sous la forme $\mathrm{Z}_1(\theta) = \mathrm{A_Z} + \mathrm{B_Z}\cos 2\theta$, ce qui donne pour l'équation (**2**),

$$\mathrm{A_Z} - 3\,\mathrm{B_Z}\cos 2\theta = \cos^2\theta$$

Or, comme $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$, on identifie

$$\boxed{\mathrm{A_Z} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B_Z} = -\frac{1}{6}}$$

$\mathrm{Z}_1 = 1/2 - \cos(2\theta)/6$ est donc bien solution de l'équation (**2**). Elle est bornée et on est assuré que le terme d'ordre 1 reste bien petit devant le terme d'ordre 0.

iii. Les directions asymptotiques s'obtiennent pour r tendant vers ∞, donc u tendant vers 0. On résout donc l'équation $\mathrm{Z}(\theta) = 0$ soit

$$\cos\theta + \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa}{6}\cos 2\theta = 0$$

La déviation étant faible et les directions asymptotiques de la trajectoire $\mathrm{Z}_0(\theta)$ non déviée étant $\theta_\pm = \pm\,\pi/2$, on peut raisonnablement poser $\theta_\pm = \pm(\pi/2+\zeta)$ avec $\zeta \ll 1$

$$-\sin\zeta + \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa}{6}\cos(\pi+\zeta) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\zeta + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa}{6} \approx 0$$

d'où
$$\boxed{\zeta = \frac{2\kappa}{3} \ll 1}$$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il suffit d'écrire que $\cos\theta = x/r = \mathrm{X}/\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}$ et de remplacer dans l'expression de $\mathrm{Z} = \mathrm{R_s}/r = 1/\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}} = \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}} + \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa}{6}\left[2\left(\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}}\right)^2 - 1\right]$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\mathrm{X} = 1 - \frac{2\kappa}{3}\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2} + \frac{\kappa}{3}\,\frac{\mathrm{X}^2}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}}}$$

iv. Si $r \gg \mathrm{R_s}$, alors Z est très petit devant 1 et on a $\mathrm{Z}(\theta) \simeq 0$ ce qui correspond à $\theta = \theta_\pm$ et la trajectoire est bien confondue avec ses asymptotes. L'angle entre les deux asymptotes est

$$\boxed{\Delta\theta = 2\zeta = \frac{4\kappa}{3} = 8{,}5.10^{-6}\ \text{rad}}$$

2. Mouvement képlérien en relativité générale

(a) Solution pertubative

i. Calculons tout d'abord la dimension de B.

$$[\mathrm{G\,M_S}] = \ \mathrm{L^3.T^{-2}} \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\mathrm{L}}{m}\right] = [\mathrm{C}] = \ \mathrm{L^2.T^{-1}} \qquad \text{ainsi} \qquad [\mathrm{B}] = \ \mathrm{L^{-1}}$$

Montrons de plus que ε est adimensionné. Comme on vient de le voir

$$\left[\mathrm{G\,M_S}\,\frac{m}{\mathrm{L}}\right] = \ \mathrm{L.T^{-1}} = [c] \qquad \text{d'où} \qquad [\varepsilon] = \left[\frac{\mathrm{G\,M_S}m}{\mathrm{L}\,c}\right]^2 = 1$$

$$\boxed{\text{L'équation [ED2] est donc bien dimensionnée.}}$$

ii. Il s'agit là encore d'une méthode pertubative identique à celle utilisée pour obtenir Z. On cherche donc une solution sous la forme

$$u(\theta) = u^{(0)}(\theta) + \varepsilon\, u^{(1)}(\theta)$$

L'équation **[ED2]** se lit alors

$$\frac{\mathrm{d}^2u^{(0)}}{\mathrm{d}\theta^2} + \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}^2u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(0)} + \varepsilon\, u^{(1)} = \mathrm{B} + \varepsilon\frac{u^{(0)\,2}}{\mathrm{B}} + \varepsilon^2\frac{\left(2u^{(0)}\,u^{(1)} + \varepsilon u^{(1)\,2}\right)}{\mathrm{B}}$$

On se limite au premier ordre en ε et on néglige par conséquent le terme en ε^2. L'équation différentielle doit être satisfaite ordre par ordre, ce qui s'écrit

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2u^{(0)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(0)} = \mathrm{B} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(1)} = \dfrac{(u^{(0)})^2}{\mathrm{B}} \end{cases}}$$

On vérifie aisément que $u^{(0)} = \mathrm{B} + \mathrm{A}\cos\theta$ est bien solution de l'équation d'ordre 0 et que moyennant la validité du développement perturbatif, c'est une bonne solution pour l'ordre 0.

iii. On voit que la solution du premier ordre dépend de l'ordre 0, donc en injectant la solution précédente dans la seconde équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(1)} = \frac{\mathrm{B}^2 + \mathrm{A}^2\cos^2\theta + 2\mathrm{AB}\cos\theta}{\mathrm{B}}$$

En remplaçant $\cos^2\theta$ par $(1+\cos 2\theta)/2$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u^{(1)}}{\mathrm{d}\theta^2} + u^{(1)} = \mathrm{B} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}}\cos 2\theta + 2\mathrm{A}\cos\theta}$$

iv. Il s'agit de vérifier si l'approximation qu'on a effectuée (développement perturbatif) est valide. La solution d'ordre (1) est

$$u^{(1)} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta + u_\mathrm{p}^{(1)} + \mathrm{A}\,\theta\sin(\theta)$$

où $u_\mathrm{p}^{(1)}$ correspond au terme périodique dont parle l'énoncé. On voit que les trois premiers termes de $u^{(1)}$ restent bornés, alors que le terme séculaire ne l'est pas. Le développement perturbatif qui contient le terme $\mathrm{A}\,\varepsilon\,\theta\sin(\theta)$ n'est donc valide que tant que $u_\mathrm{s}\varepsilon \ll u^{(0)}$, soit

$$\boxed{\varepsilon\,\theta \ll 1}$$

(b) Avance du périhélie

i. On a donc le développement suivant pour $u(\theta)$:

$$u = \mathrm{B} + \mathrm{A}\cos\theta + \varepsilon\, u_\mathrm{p} + \varepsilon\,\mathrm{A}\,\theta\sin\theta$$

En utilisant le fait que $\cos\theta + \varepsilon\,\theta\sin\theta = \cos(\theta - \varepsilon\,\theta)$, u s'écrit

$$u = \mathrm{B} + \mathrm{A}\cos\big(\theta(1-\varepsilon)\big) + \varepsilon\, u_\mathrm{p}$$

La quantité εu_p est bien négligeable devant $\mathrm{B} + \mathrm{A}\cos(\theta(1-\varepsilon))$, puisque u_p correspond à un terme périodique borné (car non résonant). Ce terme n'est donc pas nécessaire pour déterminer le maximum de u ; celui-ci est alors atteint pour $\theta_n\,(1-\varepsilon) = 2\pi n$, ce qui s'écrit

$$\boxed{\theta_n = 2\pi n\,(1-\varepsilon)^{-1} \approx 2\pi n\,(1+\varepsilon)}$$

ii. Entre deux périhélies successifs, l'angle θ a varié de $\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n = 2\pi\,(1+\varepsilon)$, c'est-à-dire qu'on a fait un tour (2π) plus un petit angle $2\pi\varepsilon$ pour réatteindre le périhélie.

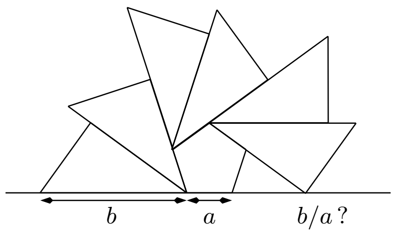
$$\boxed{\text{Le périhélie s'est donc déplacé de } 2\pi\varepsilon.}$$

iii. Calculons la valeur de $2\pi\varepsilon$ (en degrés) dans le cas de la planète Mercure.

$$2\pi\varepsilon = 6\pi\,\frac{180}{\pi}\left(\frac{\mathrm{GM_S}}{\mathrm{C}\,c}\right)^2$$

Soit en degrés par siècle $\qquad \dot\omega = \dfrac{36525}{87,969}\,2\pi\varepsilon = 0,012°/\text{siècle}$

et en secondes d'arc[2] par siècle $\qquad \boxed{\dot\omega = 43''/\text{siècle}}$



2. Il y a 3600 secondes d'arc par degré.