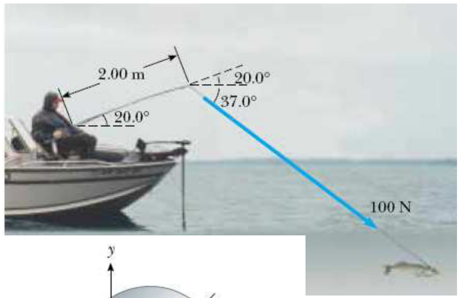
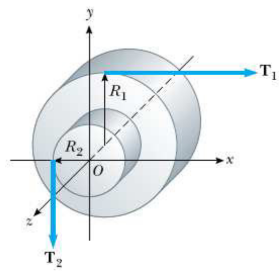
Mouvement d'un solide en rotation

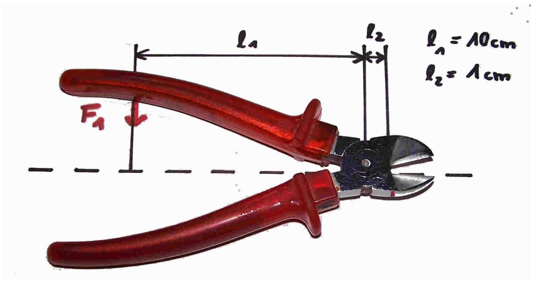
1. TMC : application directe du cours Un point matériel M de masse m est soumis à une force élastique du type $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{r}$. À $t = 0$, M est en M_0 tel que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\,\overrightarrow{e_x}$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$. Calculer à tout instant le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}$ de M par rapport au point O. Dans le cas où l'on tient compte de frottements faibles (de type $-\beta\,\overrightarrow{v}$ avec $\beta > 0$), calculer $\overrightarrow{\sigma_O}(t)$.

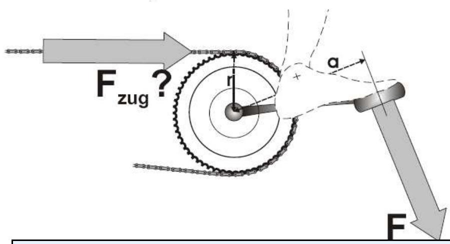
2. Calculs de moments

1. Calculer le moment de la tension du fil de pêche par rapport à un axe perpendiculaire à la feuille et passant par la main du pêcheur.
2. Et celui des deux forces ci-contre.
3. Expliquer le fonctionnement de la pince ci-dessous.
4. En supposant que le moment de la tension de la chaîne est opposé à celui de la force d'appui du cycliste, comparez l'intensité des deux forces.



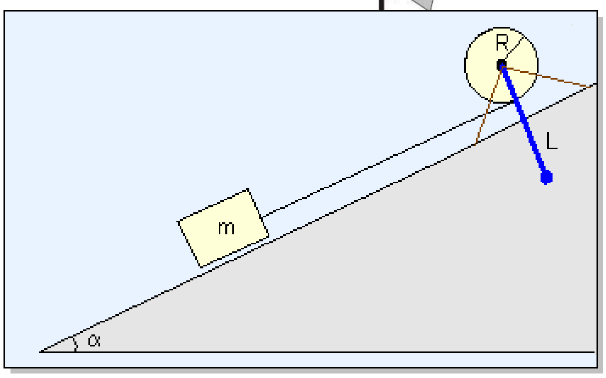






3. Équilibre sur plan incline Un solide de masse m peut glisser sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Il est maintenu par un fil inextensible parallèle au plan incliné. Le fil est enroulé sur un treuil de masse M et de rayon R. Quelle force $\overrightarrow{F}$ doit-on exercer perpendiculairement à la manivelle de longueur L pour maintenir le solide en équilibre ?

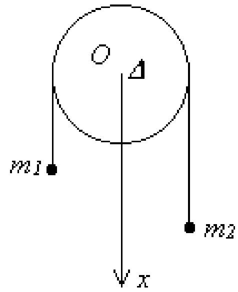
Application numérique : $g = 9{,}81$ N.kg^{-1} ; $m = 500$ g ; $R = 8$ cm ; $L = 50$ cm ; $\alpha = 30°$.



4. Expérience de Galilée* Afin de démontrer que le temps de chute d'un corps dans le champ de pesanteur terrestre ne dépend pas de la masse du corps qui chute, Galilée a mis au point un système de plan incliné pour ralentir au maximum la chute de grosses billes de différentes matières et lui permettre de mesurer avec précision les temps de chute [1].

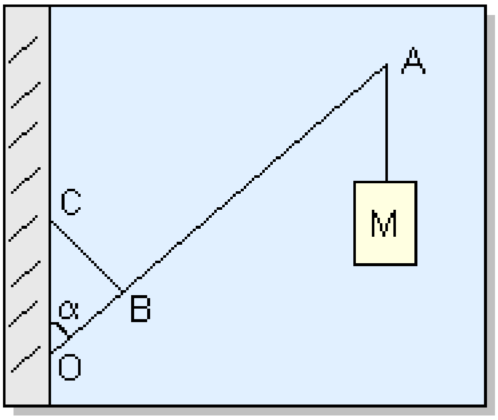
1. En supposant les billes ponctuelles, montrer que la mesure du temps de descente du plan incliné (d'un angle α par rapport à l'horizontale) permet effectivement de remonter à la valeur de g et est indépendant de la masse m de la bille.
2. En fait, les mesures donnent une valeur de g inférieure à celle escomptée (du moins à notre époque). Pouvez-vous expliquer ce fait en prenant en compte que le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse M vaut $I = 2MR^2/5$? Quelle est alors l'erreur commise sur la valeur de g ?

1. À l'époque, il n'y avait guère de chronomètre ou de traitement vidéo d'une expérience par LatisPro.



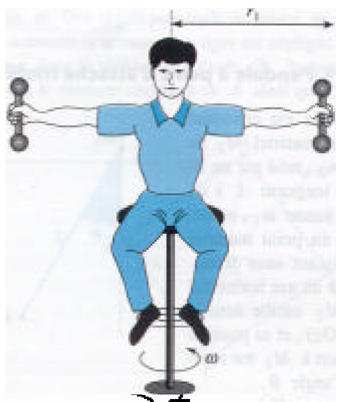
5. Machine d'Atwood* Deux corps ponctuels de masse m_1 et m_2, sont reliés par un fil de masse négligeable passant dans la gorge d'une poulie assimilable à un disque homogène de masse m_P, de rayon R, et de moment d'inertie $J_\Delta = \frac{1}{2} m_P R^2$. Le système est débloqué à l'instant $t = 0$ et se met en mouvement. On a $m_1 > m_2$.

1. Calculer le moment cinétique du système par rapport à l'axe Δ de la poulie en fonction de la vitesse $\dot{x}$ de descente de la masse m_1.
2. Calculer le moment des forces extérieures par rapport à Δ.
3. En déduire la nature du mouvement du système.



6. Enseigne de magasin* Une enseigne de magasin est composée d'une barre OA de masse $m = 2$ kg et de longueur $L = 1,20$ m mobile autour d'un point O. À l'extrémité A de la barre est suspendu un objet décoratif de masse $M = 3$ kg. En un point B tel que $OB = 30$ cm est fixée une tige BC perpendiculaire à la barre OA. Lorsque l'enseigne est placée sur son support, la barre OA fait un angle $\alpha = 42°$ avec la verticale.

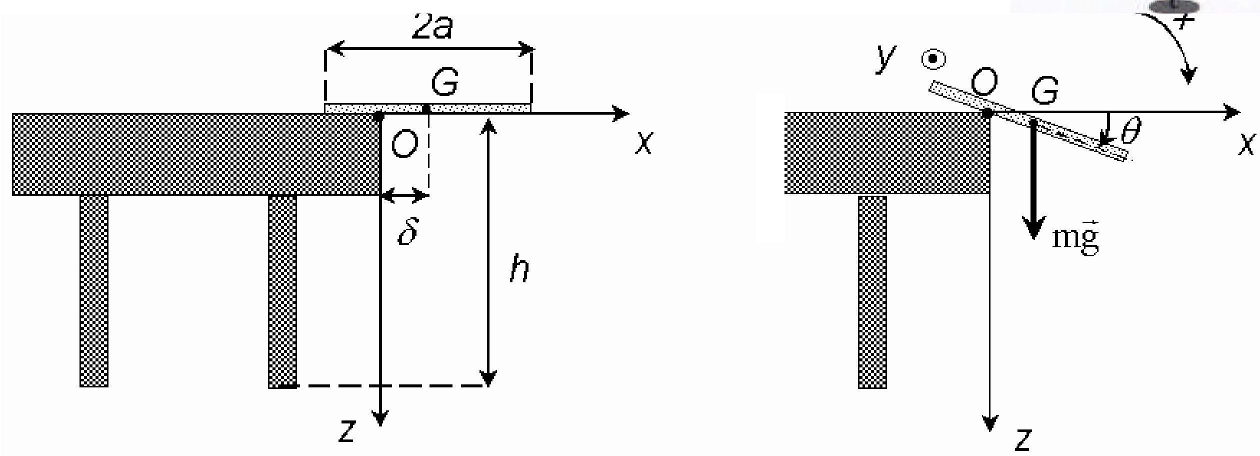
1. Faire le bilan des forces extérieures exercées sur la barre OA.
2. Déterminer la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la tige BC sur la barre OA lorsque l'enseigne est fixée sur son support.



7. Expérience classique* Le sujet de l'expérience est assis sur un tabouret tournant et tient deux haltères de masse m.

Le présentateur lui demande de tendre les bras, ce qui place les haltères à une distance r_1 de l'axe. Il lui imprime un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω_1, puis il lui demande de ramener les haltères près du corps jusqu'à une distance r_2 de l'axe. Quelle est alors la vitesse de rotation ω_2 ?

8. Tartine beurrée et loi de Murphy** Une tartine beurrée est négligemment posée sur le rebord d'une table. Pouvez-vous montrer qu'elle tombera forcément sur le côté beurré ? On fera toutes les hypothèses adéquates.



Peut-on résoudre le problème en construisant une table plus grande ou en se déplaçant sur mars ?

9. Énoncé sans paroles**

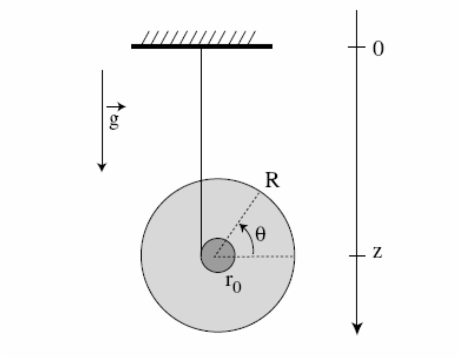


Figure 1: Schéma du yoyo avec un fil fin.

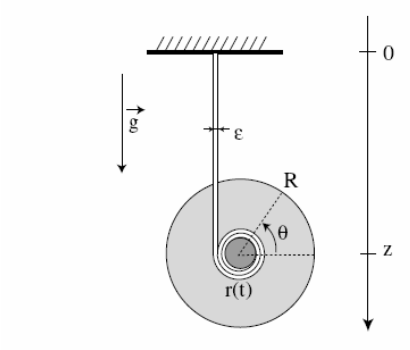


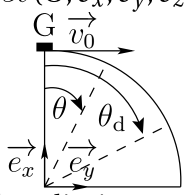
Figure 2: Schéma du yoyo avec un fil d'épaisseur ϵ.

$$\dot z = \sqrt{2gz}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad \dot z = \sqrt{2gz}\left[1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{{r_0}^2+\varepsilon\,(L-z)/\pi}\right]^{-1/2}$$

10. Yoyo à enroulage automatique** On pose le yoyo décrit dans l'exercice précédent sur le sol et on exerce une force de tension sur le fil, l'enroulement passant en-dessous de l'axe de rotation avant de finir dans votre main. Sous certaines hypothèses raisonnable et selon la valeur de l'angle α que fait le fil avec l'horizontale, on observe que le yoyo s'éloigne de la position de l'opérateur ou au contraire se rapproche de celui-ci.

Faites l'expérience à la maison (une bobine de fil de couture peut aussi convenir) et déterminer (théoriquement) la valeur de l'angle limite pour lequel le comportement du yoyo change.

11. Vol plané** Une luge assimilée à un point matériel G de masse m arrive au niveau d'un profil circulaire avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0}$. Tant que la luge suit ce profil, elle décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 5,0$ m et est repérée par l'angle θ (voir figure). On néglige les frottements. Le référentiel $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ lié à la Terre est supposé galiléen.



1. Écrire l'équation d'évolution de $\theta(t)$ à l'aide du théorème du moment cinétique.
2. En déduire l'expression de $\dot\theta$ en fonction de θ, v_0 et R.
3. Déterminer l'expression de la réaction exercée par le sol sur la luge.
4. En déduire l'angle θ_d à partir duquel la luge quitte le profil. On fera apparaître une valeur limite v_{lim}.
5. Tracer l'allure de $\theta_d(v_0)$. Que se passe-t-il au-delà de v_{lim} ?

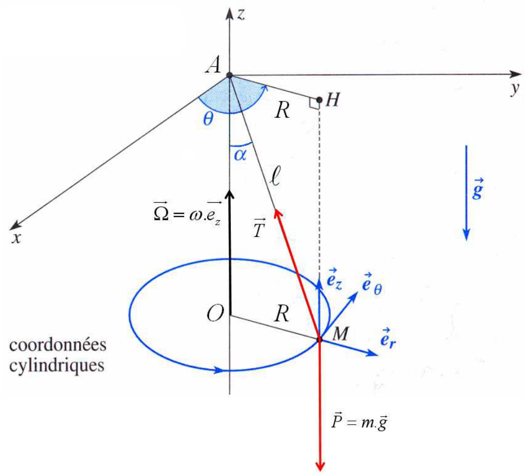
12. Modèle de l'atome de Bohr** L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton O, de masse m_p de charge $+e$, et d'un électron M, de masse m_e et de charge $-e$, ayant un mouvement circulaire uniforme, de rayon r et vitesse v autour de O. Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique de l'électron est quantifié : $\sigma_O(M) = n\hbar$, où n est un entier et $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck « réduite ». Le référentiel $\mathscr{R}(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen.

1. Déterminer une relation entre r, v, m_e, n et $\hbar$.
2. Sachant que l'électron n'est soumis qu'à l'interaction coulombienne qui s'écrit, ici, $\overrightarrow{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, déterminer une nouvelle relation entre r et v.
3. En déduire que r se met sous la forme $n^2 r_0$ où r_0 est à déterminer analytiquement et numériquement.
4. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme $E_m = -E_0/n^2$.
5. En supposant que l'électron est dans son état fondamental ($n = 1$), calculer numériquement la vitesse de l'électron ainsi que l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).

Données : $h = 6,64.10^{-34}$ J.s ; $e = 1,6.10^{-19}$ C ; $\varepsilon_0 = 8,84.10^{-12}$ SI ; $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg.

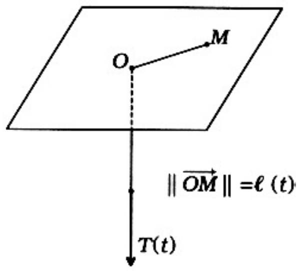
13. Pendule conique** Une masse m, assimilable à un point matériel M est suspendue en un point A par un fil inextensible et sans masse, de longueur ℓ. Soit α l'angle que fait la droite (AM) avec la verticale.

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, quelle vitesse angulaire ω doit-on communiquer au point M pour qu'il décrive d'un mouvement uniforme un cercle horizontal de rayon R et de centre O ? La droite (AM) décrit un cône d'axe vertical et de demi-angle au sommet α.
2. Déterminer, en coordonnées cylindriques, l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du point M par rapport au point O dans le référentiel du laboratoire. Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à O de la résultante des forces appliquées à M.



14. Énergie potentielle efficace**

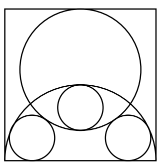
Sur un plan horizontal, percé d'un trou O, un point matériel M (de masse m) se déplace sans frottements, attaché à un fil passant par le trou. On exerce sur l'autre extrémité du fil une tension $\mathrm{T}(t)$ telle que $\ell(t) = a - bt$. Le passage du fil en O s'effectue sans frottement. On admettra que cette propriété assure la conservation de la norme de la tension du fil de part et d'autre du point O.



1. Décrire le mouvement pour une vitesse angulaire initiale ω_0 de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.
2. Calculer, de deux façons, le travail fourni par l'opérateur exerçant la tension $\mathrm{T}(t)$, entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant t quelconque.

15. Gravimètre de Holweck-Lejay** Étudions le mouvement d'une barre de longueur ℓ, de masse négligeable au bout de laquelle est fixé un point matériel M de masse m. Cette barre tourne sans frottement autour de l'axe horizontal Oz. Le point M est soumis à son poids et la liaison avec la barre se traduit par un couple de force élastique de moment $\vec{\Gamma} = -\mathrm{C}\theta\,\vec{e_z}$ dû à un ressort spiral fixé au point O.

1. Trouver l'équation horaire du mouvement de la barre pour un angle θ petit, et préciser dans quel cas la position verticale est une position d'équilibre stable. On posera $\mathrm{G} = \mathrm{C}/m\ell$.
2. L'intérêt de ce dispositif, appelé gravimètre, est de mesurer sur le terrain avec précision la valeur de l'accélération de la pesanteur g. Soit T la période des oscillations : à quelle variation dg de l'accélération de la pesanteur g correspond une variation relative de la période T ayant pour valeur $\mathrm{dT}/\mathrm{T} = 10^{-3}$? Pour une même variation relative de la période, comparez la variation dg obtenue avec ce dispositif avec la variation dg' obtenue avec un pendule simple de même longueur ℓ et de période $\mathrm{T}' = 2\pi\sqrt{\ell/g}$
Application numérique : $\mathrm{T} = 0{,}5$ s ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $\ell = 3{,}2$ cm.



$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{8}{3}$$