Systèmes à un degré de liberté et oscillateurs, indications

1. Évolution temporelle et portrait de phase

1. Pour la vitesse, regarder le signe de la pente à l'origine. Le reste est de la lecture directe.
2. Penser au cours *M6*.
3. Chercher le lien entre y_m, $\dot{y}_\mathrm{m}$ et ω.
4. On pourra montrer que $\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{b}\right)^2 = 1$ et reconnaître une courbe paramétrée particulière.
5. Penser « translation » et « homothétie ». Dites-le avec des mots simples.

2. Lire un portrait de phase Déterminer d'abord l'amplitude des oscillations, puis faire le lien entre x_m, $\dot{x}_\mathrm{m}$ et ω_0 pour pouvoir en déduire ω_0.

Écrire $x(t)$ sous la forme $x_0 + x_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \phi)$ pour appliquer les conditions initiales demandées.

3. Molécule d'ammoniac

1. Cela revient à prouver qu'il existe une fonction $\mathcal{E}_\mathrm{p}(z)$ telle que $\vec{f}\cdot\vec{e_z} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}z}$ donc une primitive de $-\vec{f}\cdot\vec{e_z}$. Attention, toutes les primitives disponibles ne différant que d'une constante, il s'agit de choisir la bonne constante afin de satisfaire la condition imposée par l'énoncé.
2. Les positions d'équilibres sont celles où s'annule la dérivée de $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ (donc de $\vec{f}\cdot\vec{e_z}$, mais c'est toujours bien de vérifier que la dérivée de l'expression trouvée à la question précédente vous redonne bien ce de quoi vous êtes parti au signe près). La stabilité est donnée par le signe de la dérivée seconde *prise au niveau des positions d'équilibre trouvées*.
3. Se faire une bonne représentation graphique de la fonction $\mathcal{E}_\mathrm{p}$. Regarder en particulier les valeurs en $\pm a$, en 0, en $\pm\infty$ et conclure à partir du tableau de variations. Discuter selon la valeur de $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ et des barrières d'énergie en présence reconnues depuis la représentation graphique.

4. Oscillateur amorti et portrait de phase

1. Faire une RFD en supposant une état d'équilibre et montrer que seules certaines valeurs de x permettent de vérifier la condition statique des lois de Coulomb, à savoir $\|\vec{f}\| \leqslant \mu\|\vec{\mathrm{N}}\|$.
2. L'introduction du ε permet de décrire les deux phases du mouvement (vers la droite et vers la gauche) en une seule équation mais il faut bien réfléchir à l'orientation de la force de frottement. Supposer par exemple $\dot{x} > 0$ et voir le signe de la projection pour introduire ε au bon endroit et avec le bon signe devant lui. Vérifier pour le déplacement vers la gauche ($\dot{x} < 0$) que l'expression obtenue est cohérente.
3. (a) La détermination du sens du mouvement peut se faire en analysant la condition initiale : si on part à droite de la zone d'équilibre avec une vitesse nulle, c'est forcément qu'on va commencer par se déplacer vers la ...

   (b) Même principe de l'autre côté. Se souvenir que l'équation différentielle n'est valide pour un ε donné que tant que la vitesse ne change pas de signe : dès qu'elle s'annule, il faut passer à l'autre expression.
4. (a) Penser au cercle trigonométrique : l'abscisse correspond à un cosinus et l'ordonnée à un sinus. Inversement, si on a une courbe paramétrée où l'abscisse est un cosinus et l'ordonnée un sinus, on a forcément un ... qui se dessine. Pour se ramener à cette situation, il suffit de soustraire des constantes, cela donne le centre du cercle.

(b) Bien regarder le point de départ, mais la démonstration est identique à la précédente.

(c) Utiliser les deux constatations précédentes et bien penser que si on s'arrête sur la zone d'équilibre, on ne peut guère en repartir.

5. Mouvement à partir d'un profil énergétique

1. Penser au gradient.
2. Regarder la position et le type des extremas.
3. Voir la première question : il s'agit de calculer une pente.
4. (a) Faire une visualisation graphique : dans quelle vallée reste-t-on coincé ? Et qu'implique le fait que la vitesse initiale est nulle sur la valeur de l'énergie cinétique, et donc de l'énergie mécanique en ce point ?

   (b) Réfléchir à la valeur de l'énergie cinétique quand l'énergie mécanique égale l'énergie potentielle. À quoi est relié $\mathcal{E}_\mathrm{m} - \mathcal{E}_\mathrm{p}$ et quand cette quantité est-elle maximale ?

   (c) Comment peut-on tracer $\mathrm{C}^\mathrm{te} - f(x)$ quand on connaît $f(x)$?

6. Profils énergétiques

1. Penser au fait que F *dérive* littéralement (et pas seulement métaphoriquement) de l'énergie potentielle (au signe près).
2. Attention, les valeurs négatives de r n'existent pas : quand on passe par l'origine, tout se passe comme si on repartait instantanément vers la droite.
3. Comment peut-on tracer $\mathrm{C}^\mathrm{te} - f(r)$ quand on connaît $f(r)$?
4. Penser aux états de diffusion.

7. Force élastique et stabilité d'équilibre

1. Bien penser à toutes les forces, y compris l'action du support.
2. Vous savez écrire la vitesse en coordonnées polaires. Il ne reste qu'à appliquer la contrainte sur la trajectoire que l'on sait circulaire centrée sur le centre du repère.
3. On peut soit bidouiller un peu Al Kashi et utiliser une identité trigonométrique du style $\cos\theta = \frac{1+\cos^2(\theta/2)}{2}$, soit utiliser le théorème de l'angle au centre (dans sa version simple à démontrer, pensez à ce que vous savez sur les angles à la base du triangle OO′P isocèle en O) qui dit que $\widehat{\mathrm{OO'P}} = \theta/2$ et coupler cette observation avec le fait que le triangle O′AP est rectangle en P (car d'hypothénuse le diamètre du cercle) avec A le point le plus bas.
4. D'abord exprimer $\mathcal{E}_\mathrm{pp}$ en fonction de x (attention à son orientation) puis trouver le lien entre x et θ.
5. Calculer le produit scalaire avec la vitesse déterminée plus haut.
6. Rassembler l'énergie potentielle élastique (en utilisant l'expression de ℓ) et celle de pesanteur (trouvée plus haut)
7. Étudier les annulations de la dérivée première pour les positions d'équilibre et le signe de la dérivée seconde en ces point pour la stabilité.

8. Couplage d'oscillateurs

1. Faire un bon dessin avec x_1 et x_2 positifs pour exprimer les longueurs respectifs des trois ressorts. Celui de gauche ne dépend que de x_1, celui de droite que de x_2, celui du milieu dépend des deux à la fois.
2. Les équations finales doivent être séparées : un oscillateur harmonique en X et un en x.
3. Transcrire les conditions initiales pour trouver X(0) et $x(0)$ ainsi que les dérivées en 0. Résoudre sur X et x puis revenir à x_1 et x_2 en inversant les relations donnant X et x en fonction de x_1 et x_2.

9. Pendule et ressort Écrire les énergies potentielles associées aux forces conservatives en présence. Utiliser une approximation harmonique pour en déduire l'équation d'oscillateur harmonique et donc la période associée.

10. Trajectoire de phase et conservation de l'énergie

1. Attention à ne pas dépasser les barrières de potentiel. Il y a un côté qui impose sa loi.
2. Au vu du graphe, c'est relié à la réponse à la question précédente (et ce n'est pas surprenant car avoir un mouvement non périodique dans le cadre conservatif impose qu'il y ait état de diffusion).
3. L'orientation est toujours dans le même sens : souvenez-vous que si $\dot{x}$ est positif alors x augmente.
4. Qu'indique le fait qu'on soit passé par x_3 pour l'énergie mécanique ? Est-ce cohérent avec le demi-tour observé du côté gauche ?

11. Pendule simple et oscillations d'amplitude finie

1. S'en remettre au cours.
2. Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour écrire une expression de $\dot{\theta}$ sur le chemin de $-\theta_0$ à θ_0 (avec θ_0 supposé positif, bien sûr). Puis isoler $\mathrm{d}t$ sous la forme $\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}}$ et reconnaître le fait qu'une demi-période revient à sommer les $\mathrm{d}t$ lorsque θ varie de $-\theta_0$ à $+\theta_0$. Il ne reste qu'à faire apparaître T_0 et laisser θ_0 comme dépendance de l'intégrale à calculer (qui ne s'exprime malheureusement pas avec des fonctions usuelles).

12. Les aventures de Marsu et ses petits

1. **Capacités bondissantes de Marsu**

   (a) Exprimez un petit élément de longueur de l'hélice en fonction de $d\theta$, puis intégrez sur n tours. Utilisez la relation entre z et θ pour exprimer p en fonction de ℓ_0 et n.

   (b) Faites un schéma clair montrant les positions initiale et finale, avec les hauteurs et compressions. Appliquez le théorème de l'énergie mécanique entre la compression maximale et le décollage, puis entre le décollage et l'apogée.

   (c) i. Appliquez le même raisonnement énergétique que précédemment, mais avec une compression d au lieu de δ.

   ii. Si Marsu ne fait aucun effort, l'énergie mécanique se conserve, que se passe-t-il alors à chaque rebond ?

   iii. Si la queue est déjà comprimée au contact, Marsu ajoute de l'énergie. Que peut-on en déduire sur la hauteur du prochain bond ?

   iv. Appliquez le TEM entre le contact (avec vitesse acquise) et le redécollage, puis entre le redécollage et l'apogée.

   v. Montrez que chaque bond ajoute la même quantité d'énergie, cela forme une suite arithmétique.

   vi. Résolvez l'inéquation $z_n \geqslant h$ pour trouver le nombre minimal de bonds.

2. **Montagnes russes et petits Marsus**

   (a) Le système n'est soumis qu'au poids (conservatif) et à la réaction du support (qui ne travaille pas). Que peut-on en conclure sur l'énergie mécanique ?

   (b) L'énergie potentielle est liée à la hauteur. Exprimez-la en fonction de $f(x)$.

   (c) Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de $\mathrm{E_p}(x)$. Quelle est la stabilité d'un minimum ou d'un maximum d'énergie potentielle ?

(d) Pour atteindre $x = 80$ cm, il faut au minimum franchir le premier sommet. Quelle doit être l'énergie mécanique minimale ? En déduire la vitesse initiale minimale.

(e) Lisez les valeurs de f sur le graphique pour calculer numériquement E_{m0} et v_0.

(f) La vitesse a deux composantes : horizontale ($\dot{x}$) et verticale ($\dot{z}$). Exprimez $\dot{z}$ en fonction de $\dot{x}$ et f'.

(g) Exprimez l'énergie mécanique en fonction de $\dot{x}$ et $f(x)$. En déduire $v(x)$ et $\dot{x}(x)$ pour une énergie donnée.

(h) Le mouvement est unidirectionnel dans le temps – orientez les trajectoires en conséquence. Pourquoi $\dot{x}$ peut-il augmenter alors que v diminue aux sommets ?

(i) Les courbes de même énergie se reconnaissent à leurs points d'arrêt. Identifiez-les sur les graphiques en comparant avec le profil $f(x)$.

(j) Dérivez l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps pour obtenir l'équation différentielle. Interprétez le membre de droite comme une force horizontale.

13. Système masse-ressort sur un cercle

14. Pendule asymétrique

15. Mouvement d'une bille dans une rigole

16. Pendule de Holweck-Lejay

1. (a) Le poids est une force conservative. Exprimez son travail élémentaire en fonction de $d\theta$, puis identifiez l'énergie potentielle dont il dérive.
   (b) La force du ressort spiral dépend de θ. Calculez son travail élémentaire et identifiez l'énergie potentielle associée.
2. (a) L'énergie potentielle totale est la somme des deux énergies potentielles. Les positions d'équilibre correspondent aux points où sa dérivée s'annule. Montrez que $\theta = 0$ est toujours solution, puis déterminez la condition pour qu'il existe d'autres solutions en utilisant le graphe de $\sin\theta/\theta$.
   (b) La stabilité dépend du signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle. Analysez le cas à un seul extremum, puis à trois extrema.
3. Le système est conservatif. Écrivez l'énergie mécanique totale, puis dérivez-la par rapport au temps. Simplifiez en supposant $\dot{\theta} \neq 0$ pour obtenir l'équation du mouvement.
4. (a) Pour de petites oscillations, approximez $\sin\theta \approx \theta$. Vous obtenez une équation d'oscillateur harmonique. Identifiez ω^2 et en déduire la période T.
   (b) Calculez la différentielle logarithmique de T par rapport à g. Comparez avec la variation relative pour un pendule simple. Quelle condition sur f permet d'améliorer la sensibilité ?
5. (a) i. Le mouvement dans le portrait de phase suit la direction du temps : si $\dot{\theta} > 0$, θ augmente – orientez les trajectoires en conséquence.
      ii. Toutes les forces sont conservatives – le portrait de phase doit refléter cela par des trajectoires fermées.
      iii. Une trajectoire fermée correspond à un mouvement périodique – donc à un état lié.
      iv. Les positions d'équilibre sont les points où $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$. Ce sont soit des positions autour desquelles tournent les trajectoires de phase (équilibres stables), soit des points (apparents) de croisement desdites trajectoires (équilibres instables).
      v. L'énergie potentielle tend vers l'infini quand $\theta \to \pm\infty$ – que peut-on en déduire sur les trajectoires ?

(b) i. Une force de frottement ne travaille pas à l'équilibre – que peut-on en déduire sur les positions d'équilibre ?

ii. La trajectoire converge vers $\theta = \pi/4$. Utilisez le graphe de $\sin\theta/\theta$ pour en déduire $f/(mg)$.

iii. Observe-t-on des oscillations ? Si oui, dans quel régime se trouve-t-on ?

17. Équilibre d'une sphère chargée

18. Oscillateur isochrone

19. Oscillateur de Landau