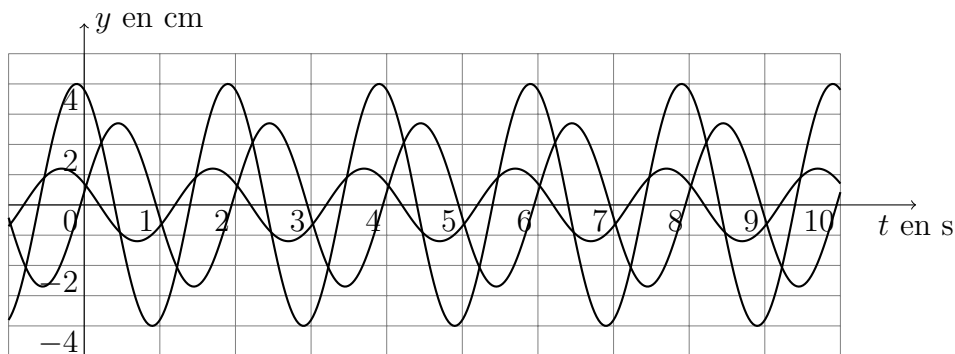


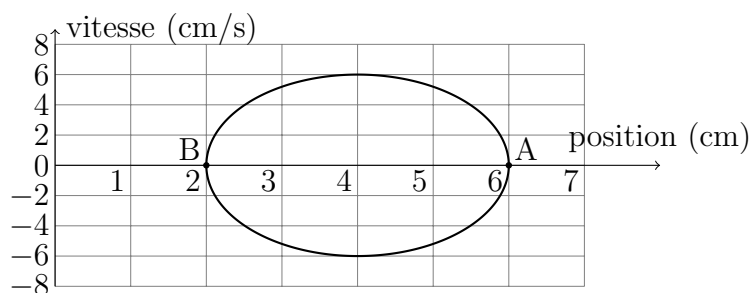
Systèmes à un degré de liberté et oscillateurs

1. Évolution temporelle et portrait de phase* La figure ci-dessous indique les graphes $y(t)$ correspondant à diverses conditions initiales d'un oscillateur. On note $y_1(t)$ la fonction de plus faible amplitude, $y_2(t)$ celle d'amplitude moyenne et enfin $y_3(t)$ celle d'amplitude la plus élevée.



1. Précisez dans un tableau pour $k = 1, 2, 3$ les valeurs des amplitudes y_{km} , des positions initiales $y_k(t = 0)$, des périodes T_k ainsi que le signe de la composante suivant $\vec{e}_y$ de la vitesse initiale $\dot{y}_k(t = 0)$.
2. En quoi les courbes expérimentales fournies en figure 2 sont-elles en accord avec l'équation différentielle $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$?
3. Déterminer pour chacune des trois courbes les valeurs maximales de $\dot{y}(t)$. On établira au préalable une relation générale liant l'amplitude de la fonction $y(t)$ et l'amplitude de la vitesse $v_y(t)$.
4. Quelle est la forme générale des courbes dans l'espace des phases $(y, \dot{y})$?
5. Quelle propriété géométrique relie ces courbes?

2. Lire un portrait de phase* La figure ci-dessous représente une trajectoire de phase d'un oscillateur harmonique non amorti. Déterminez sa période propre et déterminer les expressions de $x(t)$ si les conditions initiales correspondent au point A puis au point B.



3. Molécule d'ammoniac* La molécule d'ammoniac NH_3 est de forme pyramidale. On supposera les atomes d'hydrogène disposés selon un triangle équilatéral centré sur l'origine et fixes¹ par rapport à un référentiel galiléen. L'atome d'azote N, de masse m , repéré par z , peut se déplacer selon l'axe vertical Oz. L'ensemble des forces s'exerçant sur N est $\vec{f} = Kz(a^2 - z^2)\vec{e}_z$ où a et K sont des constantes positives.

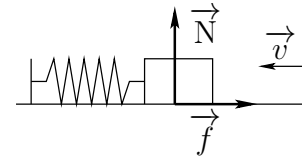
1. Montrer que f dérive d'une énergie potentielle $E_p(z)$ (on la choisira telle que $E_p(a) = 0$).
2. Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité.
3. Quel est le mouvement de N si $E_m > Ka^4/4$? Même question si $E_m \leq Ka^4/4$

1. En fait, ce sont les hydrogènes qui se déplacent autour de l'azote, mais le traitement est similaire.

4. Oscillateur amorti et portrait de phase** On considère une masse au bout d'un ressort horizontal soumise à une force de frottement solide.

On rappelle les lois de Coulomb relatives au frottement solide :

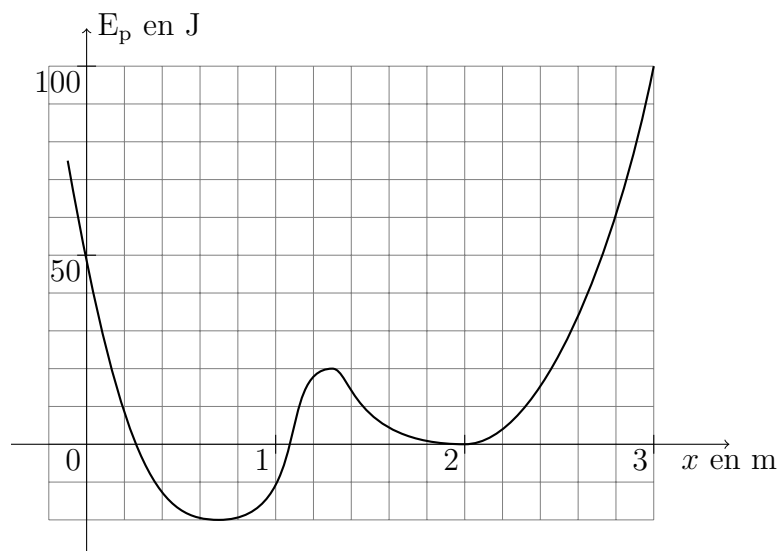
- lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \mu_s N$;
- lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ et $\|\vec{f}\| = \mu_d N$.



Les coefficients de frottement statique et dynamique μ_s et μ_d seront pris égaux à μ et N est la norme de la réaction normale au support. On choisit l'origine du repère de telle sorte que lorsque la masse m est en O , le ressort a sa longueur naturelle. On note $\omega_0^2 = k/m$.

1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre, c'est-à-dire que l'on peut avoir $x(t) = C^{te}$ pour $x \in [-b; b]$ avec b à déterminer.
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement. On introduira $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon \dot{x} < 0$
3. (a) Déterminer la solution $x_1(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = 1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_1(0) = X_1 > b$ et $\dot{x}_1(0) = 0$.
(b) Déterminer la solution $x_2(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = -1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_2(0) = X_2 < -b$ et $\dot{x}_2(0) = 0$.
4. (a) Montrer que, dans le plan de phase $(x, \dot{x}/\omega_0)$, $x_1(t)$ correspond à un demi-cercle (dont on déterminera le rayon) situé dans le demi-plan inférieur et centré sur $(b, 0)$
(b) Montrer que, dans le plan de phase $(x, \dot{x}/\omega_0)$, $x_2(t)$ correspond à un demi-cercle (dont on déterminera le rayon) situé dans le demi-plan supérieur et centré sur $(-b, 0)$
(c) En déduire la construction graphique de la trajectoire du mouvement dans le plan de phase à partir de la condition initiale $x(0) = X_0 > b$ et $\dot{x}(0) = 0$.

5. Mouvement à partir d'un profil énergétique** Une particule matérielle de masse $m = 0,2 \text{ kg}$ est assujettie à se déplacer sur un axe $(O, \vec{e}_x)$. Elle est soumise à une force dérivant d'une énergie potentielle dont les variations sont représentées ci-dessous.

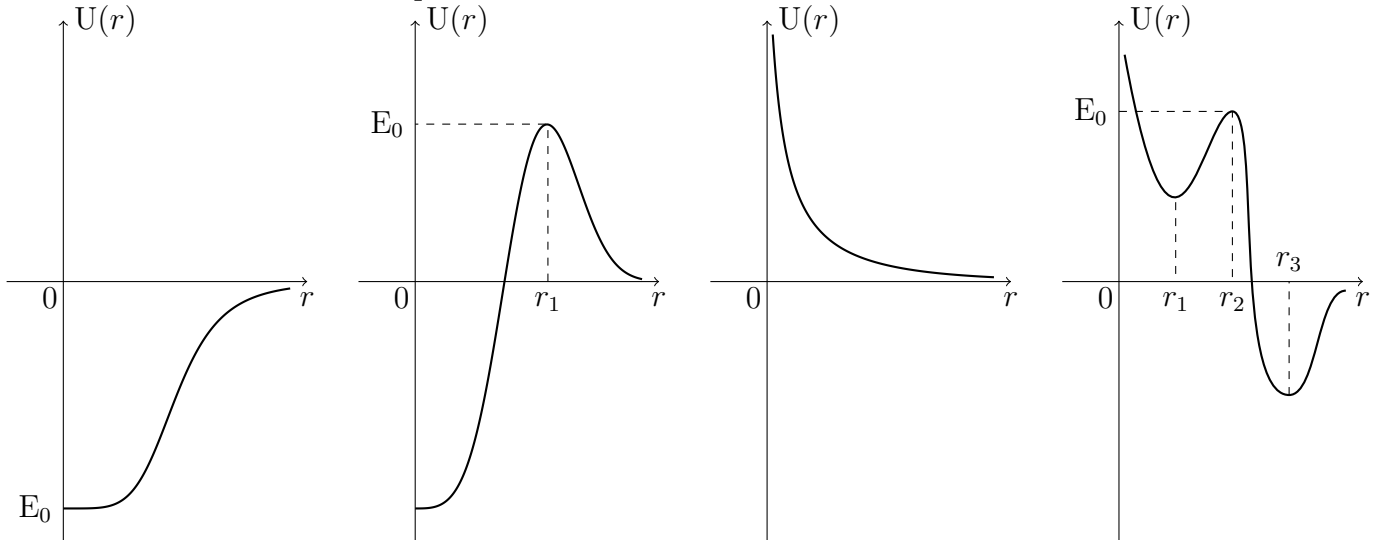


1. Écrire la relation entre $\vec{F}$ et $E_p(x)$, puis entre $F_x(x)$ et $E_p(x)$.
2. (a) Quelles sont les positions d'équilibre de la masse m ?
(b) Lesquelles sont stables? Instables? Justifier.
3. Déterminer à partir du graphe la valeur numérique de la composante suivant x de la force aux points $x = 0$, $x = 2 \text{ m}$ et $x = 3 \text{ m}$. Donnez l'allure de la fonction.

4. Le mobile est abandonné en $x = 0$ à la date $t = 0$ sans vitesse initiale.

- Déterminer la portion de l'axe susceptible d'être atteinte par la particule.
- En quels points la vitesse de la particule est-elle nulle? maximale?
- Calculer numériquement la vitesse lors du passage par les positions d'équilibre. Tracer qualitativement l'allure du graphe de la fonction.

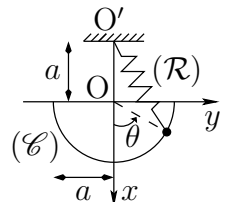
6. Profils énergétiques** L'énergie potentielle $U(r)$ d'un objet ponctuel M en fonction de sa distance r à un point O pris comme origine est donnée par le graphe de $U(r)$. On ne s'intéresse qu'à la partie radiale du mouvement de M : on considère que le mouvement de M est à une dimension.



- Dessiner pour chacun des cas représentés le graphe de $F_r(r)$ tel que $\vec{F}(M) = F_r(r)\vec{e}_r$ est la force qui dérive de l'énergie potentielle $U(r)$. Quelles sont les positions d'équilibre, stable ou instable, de M?
- Pour un objet ponctuel d'énergie mécanique E comprise entre 0 et E_0 , préciser les régions accessibles de l'espace et décrire, à l'aide des résultats de la question précédente, son mouvement pour diverses conditions initiales possibles.
- Représenter graphiquement l'énergie cinétique $E_c(r)$ de cet objet.
- Quelles régions de l'espace seraient accessibles à l'objet si l'on avait $E > 0$ pour le premier graphe et $E > E_0$ pour le deuxième?

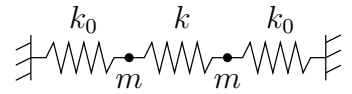
7. Force élastique et stabilité d'équilibre** Une perle quasi-ponctuelle P de masse m est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle ($\mathcal{C}$) de rayon a . Le point P est attaché à un ressort ($\mathcal{R}$) dont l'autre extrémité est fixée en O' avec $OO' = a$. Le ressort ($\mathcal{R}$) a une constante de raideur k et une longueur au repos ℓ_0 .

- Faire le bilan des forces s'appliquant au point matériel P.
- Exprimer la vitesse $\vec{v}(P)$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
- Montrer que la longueur du ressort s'écrit $\ell = 2a \cos(\theta/2)$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel élastique.
- Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de m , g , a et θ .
- La réaction du support travaille-t-elle?
- Montrer que l'expression de l'énergie potentielle E_p dont dérive la résultante de force peut s'écrire $E_p(\theta) = (ka^2 - mga) \cos \theta - 2ka\ell_0 \cos(\theta/2) + C^e$.
- On suppose que $a = 2mg/k$ et $\ell_0 = \sqrt{3}(a - mg/k)$
 - Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 , avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0; \pi/2]$?
 - Étudier la stabilité de ces deux positions d'équilibre.



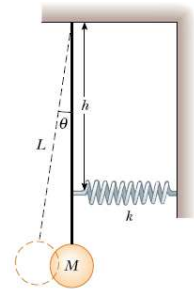
8. Couplage d'oscillateurs**

On considère le système représenté sur le schéma ci-contre. Les positions des deux masses sont représentées par leurs abscisses x_1 et x_2 comptées à partir de leur position d'équilibre. On suppose que lorsque $x_1 = x_2 = 0$, les ressorts ont leur longueur naturelle. Les deux masses glissent sans frottement sur l'axe (Ox) qui est horizontal.

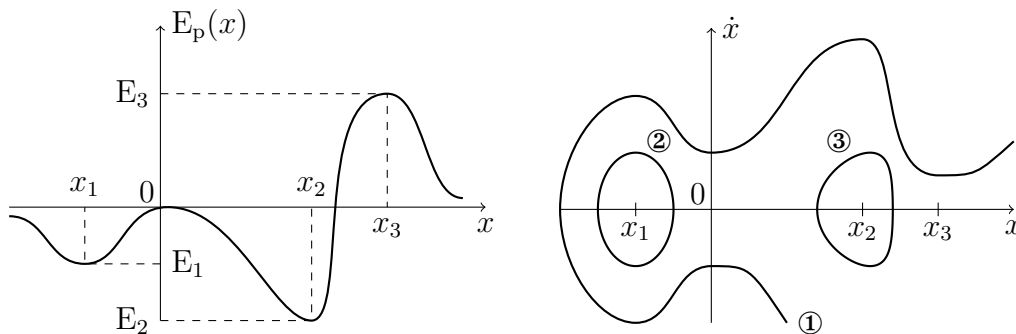


1. Écrire les équations du mouvement des deux masses.
2. On pose $X = x_1 + x_2$ et $x = x_1 - x_2$. À quelles équations satisfont X et x ?
3. À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont les suivantes : $x_1 = x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = v_0$, $\dot{x}_2 = 0$. Donner les expressions complètes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

9. Pendule et ressort** Trouver la période des petites oscillations du système ci-contre.



10. Trajectoire de phase et conservation de l'énergie** On considère un point matériel M assujéti à se déplacer sur l'axe (Ox) dans un référentiel galiléen. Il est soumis uniquement à un champ de forces conservatives dérivant de l'énergie potentielle $E_p(x)$. L'allure du graphe $x \mapsto E_p(x)$ est la suivante :



1. On souhaite que le mouvement de M soit périodique autour de x_2 . À quel intervalle, l'énergie mécanique E_m doit-elle appartenir ? On exprimera cet intervalle en fonction des E_i représentés sur le précédent graphe.
2. On souhaite obtenir un état de diffusion. Quelle condition cela impose-t-il sur E_m ?
3. On a dessiné ci-dessus quelques trajectoires de phase. Les orienter. Commenter.
4. La trajectoire ① est incomplète. Vous semble-t-elle correcte ?

11. Pendule simple et oscillations d'amplitude finie** On considère un pendule simple de longueur ℓ à l'extrémité duquel est accroché une masse ponctuelle m .

1. Établir l'équation du mouvement. Étudier la solution des petites oscillations en déterminant notamment sa période T_0 .
2. On considère maintenant que les oscillations ne sont plus «très petites» sachant que l'on lâche le pendule sans vitesse initiale à partir du point repéré par θ_0 . Déterminer alors la période T du pendule en fonction de T_0 et θ_0 .

12. Les aventures de Marsu et ses petits*** Perdu au cœur de la forêt Palombienne, le Marsupilami, petit bipède à la robe jaune tachetée de noir d'une grande force et d'une intelligence peu commune dans le règne animal, est d'étude difficile. Néanmoins, certaines de ses caractéristiques peuvent se prêter à une étude physique.



Dans un premier temps, nous nous intéresserons à son mode de déplacement préféré (la queue à ressort) puis nous étudierons l'utilisation de ladite queue pour occuper ses petits dans leurs moments de détente.

1. Capacités bondissantes de Marsu

La caractéristique anatomique la plus intéressante du Marsupilami est son long appendice caudal qui peut lui servir à toutes sortes de choses, de la canne à pêche à la catapulte en passant par la propulsion sur ressort. C'est cette dernière utilisation que nous allons étudier ici. Nous commencerons par calculer la longueur du fameux appendice avant de disserter sur ses capacités énergétiques.

- (a) La queue du Marsupilami s'enroule en hélice pour former le ressort de propulsion étudié par la suite. Cet enroulement peut se traduire par les équations suivantes où θ est l'angle correspondant aux coordonnées cylindriques,

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad \text{et} \quad z = p \theta$$

Sachant que la queue s'enroule n fois sur elle-même et que le ressort résultant est de longueur à vide ℓ_0 , montrer, en raisonnant sur un petit élément de longueur $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, que la longueur totale de la queue du Marsupilami s'écrit

$$L = 2n\pi \sqrt{\left(\frac{\ell_0}{2n\pi}\right)^2 + R^2}$$

Application numérique : déterminer L en supposant que $\ell_0 = 50$ cm, $R = 20$ cm et que la queue s'enroule sur $n = 5$ tours.

Marsu utilise à présent sa queue comme propulsion en restant à tout instant selon un axe vertical. Sa queue est équivalente à un ressort de constante de raideur k (que l'on va déterminer), de longueur à vide $\ell_0 = 50$ cm et de masse négligeable. Marsu, quant-à-lui, sera assimilé à un point matériel M de masse $m = 30$ kg confondu avec son centre de gravité et posé sur le ressort. On négligera tout phénomène dissipatif. On rappelle que $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

- (b) En comprimant sa queue d'une longueur $\delta = 25$ cm par rapport à sa longueur à vide, le centre de gravité de Marsu arrive à s'élever jusqu'à $h = 3,0$ m au-dessus du sol.
- Faire un schéma de Marsu lors de la compression puis au plus haut de la trajectoire pour faire clairement apparaître les diverses longueurs en jeu.
 - Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à la queue de Marsu par un raisonnement énergétique simple en deux temps. Application numérique.
- (c) La compression précédente étant un peu rude pour les muscles caudaux, Marsu préfère généralement atteindre son altitude de croisière après plusieurs bonds successifs. Entre chaque bond, il comprime sa queue d'une longueur « seulement » égale à $d = 10$ cm.
- Calculer l'altitude maximale z_1 atteinte après le premier bond (départ arrêté au sol avec une compression d par rapport à la longueur à vide). Application numérique.
 - Que se passerait-il si Marsu ne faisait plus le moindre effort, laissant sa queue se comporter comme un ressort « normal » ?

Au lieu de cela, il profite du saut pour comprimer sa queue (sans modifier sa dynamique externe), si bien que lorsque le ressort touche le sol, il est déjà comprimé d'une distance d .

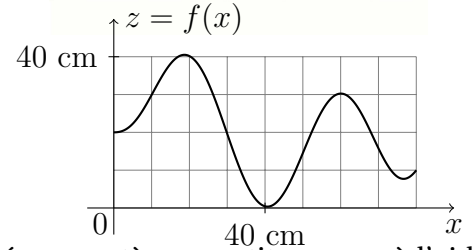
- Que se passe-t-il après contact avec le sol ?
- En déduire l'altitude maximale z_2 atteinte après le deuxième bond. Application numérique.
- Montrer (par récurrence par exemple) que l'altitude atteinte au n^{e} bond est donnée par

$$z_n = \ell_0 - d + \frac{n k d^2}{2 m g}$$

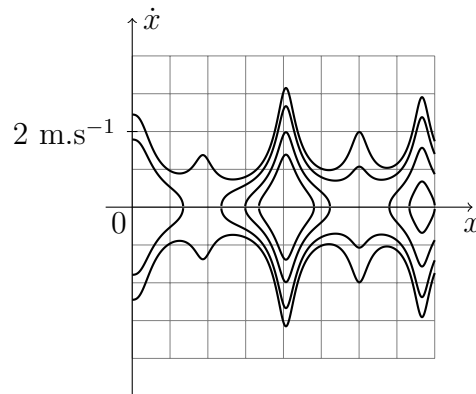
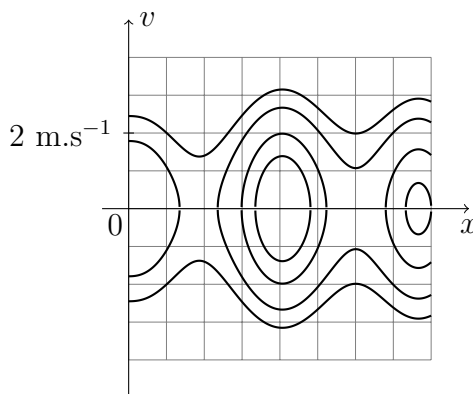
- Combien de bonds de la sorte sont-ils nécessaires pour atteindre l'altitude h donnée par la compression $\delta = 25$ cm ?

2. Montagnes russes et petits Marsus

Une des occupations préférées des bébés Marsus (présentée sur la figure ci-contre) est de se laisser glisser le long de l'appendice caudal parental avant de finir leur course dans la rivière pour y chasser les pyrañhas. Nous allons supposer que le mouvement d'un bébé marsu (de masse $m = 1,0 \text{ kg}$) est contraint le long de la queue de profil $z = f(x)$ où x est le déplacement horizontal et qu'il s'effectue sans frottement. La modélisation du profil est donnée ci-contre. C'est elle (et non l'illustration) qu'il faudra considérer pour la suite du problème. On donne $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$



- Justifier que le système « petit marsu » est conservatif.
- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ associée au système « petit marsu » à l'aide de la fonction f .
- Identifier (graphiquement) les positions d'équilibre avec cette énergie potentielle et discuter de leur stabilité (justifier brièvement).
- Quelle est l'expression de l'énergie mécanique minimale E_{m0} nécessaire pour arriver en $x = 80 \text{ cm}$ en partant de $x = 0 \text{ cm}$? Déterminer la vitesse minimale v_0 correspondante. Cela va-t-il vraiment marcher si on choisit *exactement* cette valeur de l'énergie?
- Applications numériques pour E_{m0} et v_0 .
- Établir l'expression du carré de la norme de la vitesse (noté v^2) en fonction de $\dot{x}$ et $f' = \frac{df}{dx}$.
- Pour une énergie mécanique E_m donnée, montrer que si on connaît l'expression explicite de f et de f' , on peut connaître l'évolution de v et de $\dot{x}$ en fonction de x . La donner. Expliquer en quoi cette connaissance permet de tracer les diagrammes de phase en $\dot{x}$ et en v suivants. Pour les tracer, on a pris v du même signe que $\dot{x}$ et la même échelle horizontale que pour le tracé de $f(x)$.

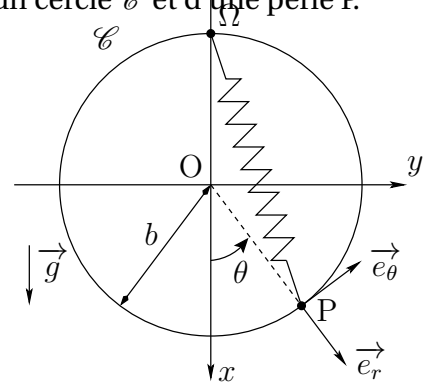


- Orienter les différentes trajectoires de phase. Donner une explication qualitative au comportement « bizarre » du diagramme en $\dot{x}$ comparé au diagramme en v aux alentours de $x = 20 \text{ cm}$ et $x = 60 \text{ cm}$.
- Les deux diagrammes contiennent quatre niveaux d'énergie distincts. Identifiez (en couleurs) les courbes correspondant aux différentes énergies mécaniques. Précisez comment vous identifiez les trajectoires de même énergie.
- En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ peut s'écrire comme suit. On donnera une interprétation du membre de droite en terme de force.

$$m\ddot{x} = -\frac{mg + mf''\dot{x}^2}{1 + f'^2} f'$$

13. Système masse-ressort sur un cercle**** On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen et noté $\mathcal{R}$ ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Le dispositif étudié est constitué d'un ressort R, d'un cercle $\mathcal{C}$ et d'une perle P.

Le ressort R est idéal; on note k sa constante de raideur et ℓ_0 sa longueur naturelle. Le cercle $\mathcal{C}$ (fixe dans $\mathcal{R}$) de rayon b , de centre O, est contenu dans le plan ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y$), $\vec{e}_x$ définissant la verticale descendante. La perle P est un objet quasi-ponctuel de masse m , astreint à se déplacer sans frottement sur $\mathcal{C}$. Le ressort R a une extrémité liée à P et l'autre à un point Ω situé aux coordonnées $(x, y, z) = (-b, 0, 0)$. La position de P dans $\mathcal{R}$ est repérée par l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{OP})$ avec $\theta \in [-\pi; \pi]$. On note $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire de $\vec{OP}$, $\vec{e}_\theta$ le vecteur unitaire déduit de $\vec{e}_r$ par rotation de $+\pi/2$ autour de $\vec{e}_z$.



L'ensemble du dispositif est placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = g \vec{e}_x$ d'intensité constante $g > 0$.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la perle P.
2. Équation du mouvement avec le PFD,
 - (a) Donner l'expression de $\vec{\Omega P}$ en fonction de b et θ et en déduire l'expression de son module ΩP en fonction de b et θ puis en fonction de b et $\theta/2$
 - (b) Déterminer l'expression de la tension $\vec{T}$ exercée par le ressort dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction des constantes du problème et de $\theta/2$.
 - (c) Déterminer l'expression de $\vec{F}$, résultante des forces exercées sur la perle, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction des constantes du problème et de θ .
 - (d) À l'aide du principe fondamental de la dynamique (PFD), déterminer l'équation d'évolution de θ .
3. Équation du mouvement avec l'énergie
 - (a) Déterminer l'expression du produit scalaire $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ où $d\vec{r} = b d\theta \vec{e}_\theta$ est le déplacement élémentaire de P sur $\mathcal{C}$.
 - (b) Montrer que le travail de la résultante $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta \mathcal{E}_p$ et en déduire l'expression de l'énergie potentielle.
 - (c) Retrouver l'expression de l'énergie potentielle à l'aide d'énergies potentielles connues de forces usuelles.
 - (d) Retrouver l'équation d'évolution de θ .
4. Les positions d'équilibre
 - (a) Déterminer, à partir de l'équation d'évolution, l'équation que doit (doivent) satisfaire la (ou les) position(s) d'équilibre.
 - (b) Retrouver cette (ou ces) position(s) à partir d'une méthode énergétique.
 - (c) Quelle(s) condition(s) doivent satisfaire les constantes du problèmes pour qu'il existe au moins une position d'équilibre θ_{eq} telle que $\theta_{eq} \neq 0$.
5. Évolution autour de l'équilibre stable. On considère une position d'équilibre stable $\theta_1 > 0$; les conditions trouvées en question 4c sont donc vérifiées.
 - (a) Petite amplitude. On envisage un mouvement de très faible amplitude autour de θ_1 .
 - i. Déterminer l'équation d'évolution de $\varepsilon(t)$ défini par $\theta(t) = \theta_1 + \varepsilon(t)$.
 - ii. Montrer que l'on a $\varepsilon(t) = \alpha \cos(\omega_0 t)$ avec $\alpha \ll \theta_1$
 - (b) Moins petite amplitude. Les mouvements envisagés sont toujours de faibles amplitudes.

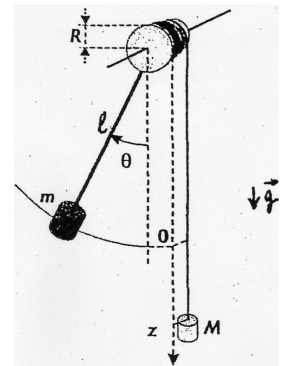
- i. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 de l'équation d'évolution de θ , déterminer la nouvelle équation de $\varepsilon(t)$.
- ii. Montrer que $\varepsilon(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \cos(2\omega_0 t) + \gamma$ est solution. Déterminer l'expression de β et γ et vérifier que $\beta \ll \alpha$ et $\gamma \ll \alpha$.

(c) Amplitude quelconque

- i. Tracer, sur papier millimétré, $\mathcal{E}_p(\theta)$ pour $\theta \in [0; \pi]$. On prendra 12 cm pour 1 J en ordonnée et 4 cm pour 30° en abscisse ainsi que les valeurs numériques suivantes : $b = 50$ cm, $g = 9,81$ m.s⁻², $m = 0,30$ kg, $k = 10$ N.m⁻¹ et $\ell = 25$ cm.
- ii. La perle est lancée avec une vitesse v_0 de sa position d'équilibre stable. Déterminer graphiquement les valeurs extrémales $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ atteintes par la perle lorsque $v_0 = 1,2$ m.s⁻¹, $v_0 = 1,8$ m.s⁻¹ et $v_0 = 2,4$ m.s⁻¹.

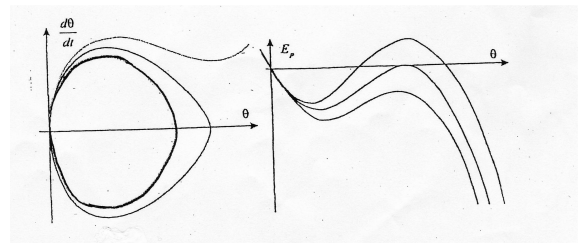
14. Pendule asymétrique***

Un objet de masse m est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon R peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal. La distance de cet axe au mobile est notée ℓ . Un fil sans masse est enroulé autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas. On fixe à l'extrémité libre du fil un objet de masse M . Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ , M se déplace verticalement de z . Les variables θ et z sont des grandeurs algébriques définies sur la figure.



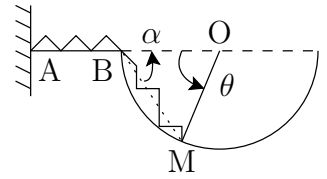
On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif, que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses et que son énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques de chacune des deux masses.

1. Le fil étant inextensible, établir une relation entre θ , R et z si les deux masses sont à la même altitude lorsque $\theta = 0$.
2. (a) En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c du système constitué des deux masses en fonction de m , M , R , ℓ et de $\frac{d\theta}{dt}$.
(b) Montrer que l'énergie potentielle E_p peut s'exprimer en fonction de la seule variable de position angulaire θ . L'origine de chacune des énergies potentielles de pesanteur sera prise en $\theta = 0$.
3. Si la masse M dépasse une valeur minimale M_0 , on constate qu'il n'existe plus de position d'équilibre. Montrer que M_0 s'écrit $M_0 = m\ell/R$. L'application numérique sera à réaliser avec les données de la question 5).
4. Dans la suite, la masse M est inférieure à M_0 .
(a) Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre θ_{e1} et θ_{e2} telles que $\theta_{e2} = \pi - \theta_{e1}$.
(b) Placer ces deux positions d'équilibre par rapport au plan horizontal passant par l'axe du cylindre.
(c) Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre en notant θ_{e1} la position d'équilibre stable.
5. Le système est placé dans la position $\theta = 0$. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale à la date $t = 0$. La figure ci-après représente des trajectoires de phase pour $\ell = 50,0$ cm, $R = 5,00$ cm, $m = 100$ g et pour trois valeurs de M , à savoir $M = 650$ g, 720 g et 800 g.
(a) Associer, à chaque valeur de M , la trajectoire de phase correspondante et précisez son sens de parcours. Justifier votre choix en vous appuyant sur le graphe de $E_p(\theta)$.
(b) Comment choisir la masse M pour obtenir une trajectoire de phase fermée en partant de ces conditions initiales?



15. Mouvement d'une bille dans une rigole***

Un point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire est solidaire d'une rigole circulaire (de centre O et de rayon R) sur laquelle il peut glisser sans frottement. Il est fixé en un point A du plan horizontal par l'intermédiaire d'un élastique modélisé par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le bord de la rigole est à la distance ℓ_0 du point A.

**1. Étude géométrique du système**

- Montrer que l'angle α que fait le ressort plié avec l'horizontale vaut $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$.
- Donner une expression de l'allongement $X = \ell - \ell_0$ du ressort en fonction de R et de $\theta/2$.

2. Application de la relation fondamentale de la dynamique

- Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point matériel.
- Appliquer la relation fondamentale de la dynamique.
- Montrer que θ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m} \sin \theta - \frac{g}{R} \cos \theta = 0$$

- Exprimer la réaction normale N en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées temporelles.
- Donner la limite au point B et interpréter physiquement le résultat.

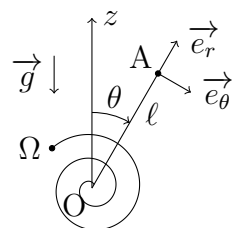
3. Analyse énergétique

- Donner l'expression des différentes énergies potentielles intervenant dans le problème.
- Déterminer à partir des énergies potentielles la position d'équilibre θ_0 .
- Retrouver l'équation différentielle donnant l'évolution de θ au cours du temps à l'aide d'un argument énergétique.

4. Mouvement autour de la position d'équilibre.

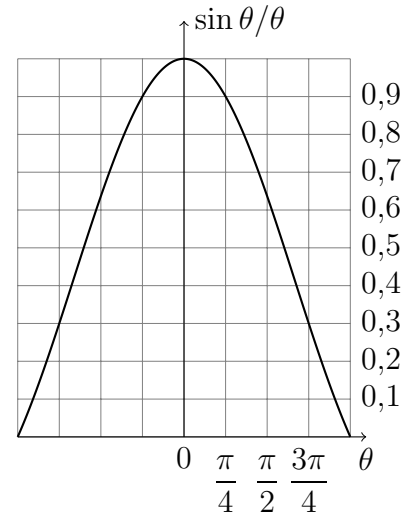
- Dans le cadre des petites oscillations², on pose $\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \ll \theta_0$.
 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$.
 - Quelle est la période de ces petites oscillations?
- On ne suppose plus les oscillations petites.
 - Tracer $E_{\text{ptot}}(\theta)$ en prenant pour échelle 5 cm pour 0, 125 J en ordonnée et 4 cm pour 30° en abscisse pour les valeurs numériques suivantes : $m = 50 \text{ g}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $k = 2 \text{ N.m}^{-1}$ et $R = 25 \text{ cm}$.
 - En lâchant la bille sans vitesse initiale depuis le point B, déterminer graphiquement les positions extrêmes atteintes lors du mouvement.

16. Pendule de Holweck-Lejay*** Une masse m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse supposée négligeable, de longueur $\ell = OA$, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical. Un ressort spiral est attaché en deux points (un point fixe Ω du laboratoire, un point lié à la tige). Le point matériel A subit la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ de la barre, le poids $m\vec{g}$ ainsi que la force de rappel exercée par le ressort spiral $\vec{F} = -f\theta\vec{e}_\theta$.

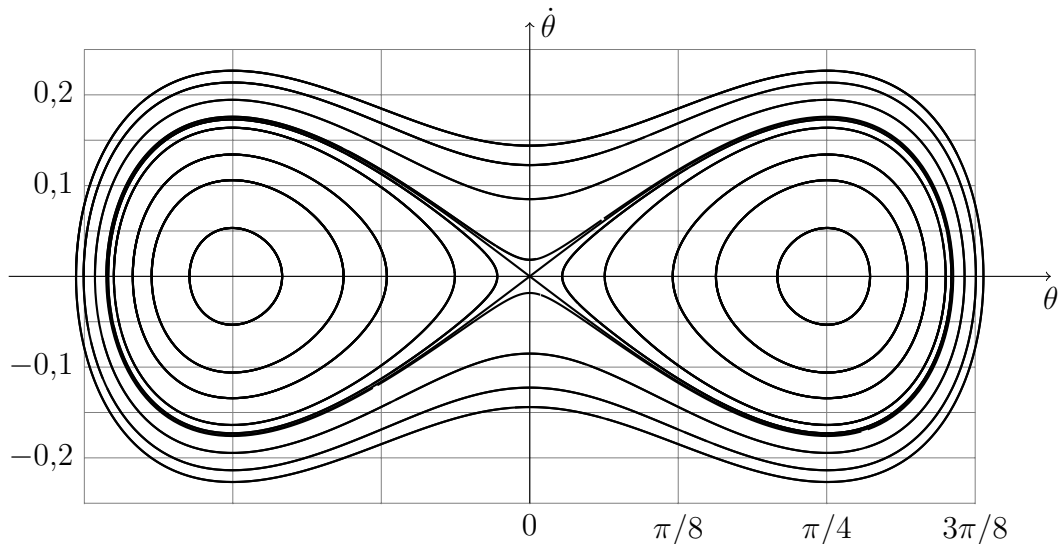


2. On rappelle que pour ε petit, on a $\cos \varepsilon \approx 1$ et $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$.

1. (a) Montrer que le poids dérive d'une énergie potentielle que l'on exprimera en fonction de θ .
- (b) Montrer que la force de rappel $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle à exprimer en fonction de θ .
2. (a) Montrer que $\theta = 0$ est toujours position d'équilibre et qu'il peut en exister éventuellement deux autres suivant une condition que l'on établira (on ne demande pas d'exhiber la valeur de ces positions d'équilibre). Pour vous aider à répondre à cette question, on a représenté ci-contre le graphe de la fonction $\theta \mapsto \sin \theta / \theta$ pour θ variant dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

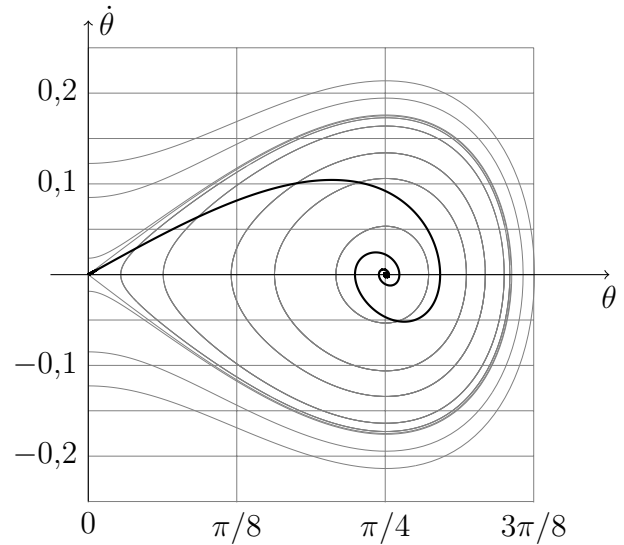


- (b) Déterminer la stabilité des positions d'équilibre.
3. Établir que l'équation du mouvement de A est $\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{f}{m\ell} \theta = 0$.
4. (a) On se place dans cette question, dans les conditions où $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Montrer que si θ est petit (approximation des petits angles), la période T des petites oscillations s'écrit sous la forme $T = 2\pi\sqrt{\ell/(A - g)}$ où vous donnerez l'expression de A .
- (b) Calculer la variation relative de la période $\Delta T/T$ correspondant à une petite variation Δg de l'intensité du champ de pesanteur. Montrer que, si cet appareil est dédié à une mesure de g , il peut être rendu plus sensible qu'un pendule simple, dont on appellera $\Delta T_0/T_0$ la précision sur la mesure de la période T_0 des petites oscillations.
5. Utilisation de portraits de phase



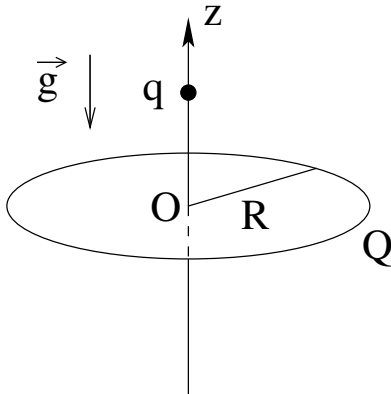
- (a) La figure ci-dessus représente le portrait de phase d'un pendule de Holweck-Lejay caractérisé par la donnée des paramètres m , g , ℓ et f .
 - i. Indiquer, en la justifiant, l'orientation des trajectoires de phase.
 - ii. Le système est-il conservatif? Le portrait de phase en rend-il compte?
 - iii. Qu'indique le caractère fermé d'une trajectoire de phase?
 - iv. Combien y a-t-il de positions d'équilibre? Quelles sont-elles?
 - v. Autres commentaires?

(b) La figure ci-contre représente une trajectoire de phase (en trait gras) du pendule de Holweck-Lejay ayant les mêmes caractéristiques que celui de la question précédente mais on a pris en compte une force de frottement fluide $-h\vec{v}$. On a superposé (en traits fins) des trajectoires de phase du même pendule sans force de frottement fluide.



- La présence d'une force de frottement fluide modifie-t-elle les positions d'équilibre?
- Déduire de cette figure, la valeur du rapport $\frac{f}{mg}$.
- Autres commentaires?

17. Équilibre d'une sphère chargée***



L'axe vertical Oz est matérialisé par un fil fin sur lequel peut coulisser sans frottements une sphère quasi ponctuelle pesante, de masse m , portant la charge électrique q positive. Un cerceau uniformément chargé de rayon R , de centre O, d'axe Oz, portant la charge Q positive, uniformément répartie, crée en un point de l'axe Oz un champ électrostatique : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$. La force électrostatique subie par la sphère est alors $^3\vec{F} = q\vec{E}$.

- Tracer soigneusement l'allure de la courbe $F(z)$. On déterminera notamment les maxima.
- En déduire que la masse de la sphère doit être inférieure à une valeur m_{max} pour qu'elle ait au moins une position d'équilibre.
- Exprimer m_{max} en fonction de Q , R , q et g .
 - Effectuer l'application numérique.

Dans la suite on suppose $m = 20$ g.
- Déterminer l'énergie potentielle électrostatique, E_{pe} de la sphère.
- Déterminer l'énergie potentielle totale, E_p telle que $E_p(0) = 0$. Donner son expression numérique.
- Tracer la courbe représentative de $E_p(z)$. Échelle : en abscisse, 1 cm représente 1 cm et en ordonnée, 1 cm représente 2 mJ.
 - En déduire graphiquement l'existence d'une position d'équilibre stable z_1 et d'une position d'équilibre instable z_2 .
 - Déterminer à l'aide du graphique les valeurs numériques de z_1 et de z_2 .
- À l'aide du profil d'énergie potentielle établi précédemment, dessiner le portrait de phase du système pour $z \geq 0$. On expliquera brièvement la méthode utilisée (on n'impose pas de schéma à l'échelle ici).
- Montrer qu'autour de la position d'équilibre stable, le système obéit à l'équation différentielle suivante (la variable x sera à définir) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{qQ}{4m\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + z_1^2)^{3/2}} \left(\frac{2z_1^2 - R^2}{R^2 + z_1^2} \right)$$

3. Analogie à $\vec{F} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur

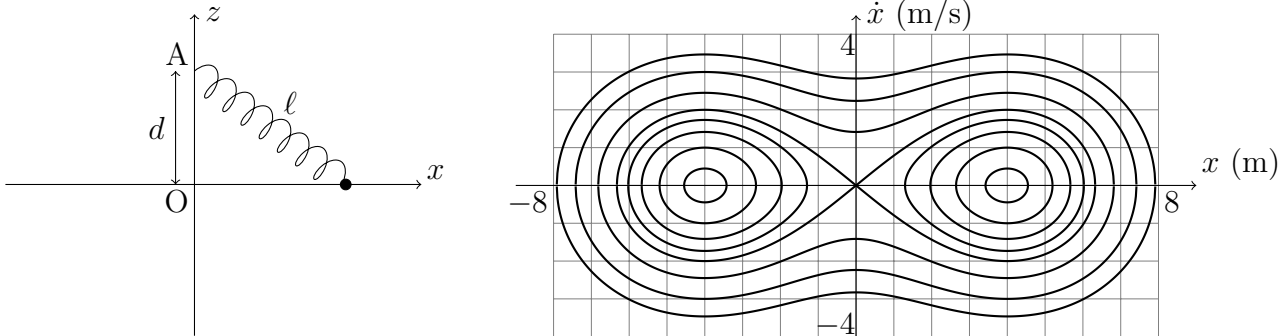
Données : $R = 0,10 \text{ m}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $Q = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ et $q = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$

18. Oscillateur isochrone*** Une particule de masse m se déplace sans frottement sur un axe Ox dans le champ de force $F(x)$ dérivant de l'énergie potentielle $E_p = (x^2 + a^4/x^2) m \omega^2 / 2$ où ω et a sont des constantes positives.

1. (a) Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable dans le domaine $x > 0$.
 (b) Calculer la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.
2. (a) La particule occupant la position d'équilibre avec une vitesse initiale de valeur v_0 quelconque, montrer qu'elle décrit ultérieurement un mouvement périodique.
 (b) Exprimer la vitesse $\dot{x}$ en fonction de la position et des autres constantes de l'énoncé.
 (c) En remarquant que $dt = dx/\dot{x}$, écrire l'intégrale permettant de calculer la période T des (possiblement grandes) oscillations.
 (d) Montrer que l'intégrale précédente s'exprime en fonction de $A = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi$.
 (e) Commenter le résultat obtenu.

19. Oscillateur de Landau*** Un point matériel de masse m situé en M se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal Ox . Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k , à un point A situé à la verticale de O tel que $OA = d$.

1. Discuter, suivant la valeur de d , l'existence de position(s) d'équilibre et de leur stabilité. Donner une interprétation physique pour chacune de ces positions d'équilibre.



2. La figure ci-dessus représente le portrait de phase de ce système. On a choisi les valeurs numériques suivantes : $m = 1 \text{ kg}$, $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$, $d = 3 \text{ m}$.
 - (a) En déduire ℓ_0 .
 - (b) Indiquer, en la justifiant, l'orientation des trajectoires.
 - (c) Laquelle des trajectoires de phase représentées ci-dessus est la séparatrice?
 - (d) Quelle particularité du portrait de phase permet d'affirmer que le système est conservatif?
 - (e) Les trajectoires envisagées représentent-elles des mouvements périodiques? Justifier.
 - (f) La position d'équilibre $x_{eq} = 0$ est-elle une position d'équilibre stable ou instable? Justifier.

