Systèmes à un degré de liberté et oscillateurs

1. Évolution temporelle et portrait de phase* None available

2. Lire un portrait de phase* None available

3. Molécule d'ammoniac* None available

4. Oscillateur amorti et portrait de phase**

1. Les forces s'exerçant sur la masse sont
   - La tension du ressort $\overrightarrow{\mathrm{T}} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x} = -kx\,\overrightarrow{e_x}$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vers la droite.
   - Le poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{e_z}$ avec $\overrightarrow{e_z}$ vers le haut
   - La réaction normale $\overrightarrow{\mathrm{N}} = \|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|\overrightarrow{e_z}$.
   - La force de frottement $\overrightarrow{f} = f\,\overrightarrow{e_x}$ avec $f \times \dot{x} < 0$, ce qui peut aussi s'écrire $\varepsilon\|\overrightarrow{f}\|\,\overrightarrow{e_x}$, ce qui donne bien $\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v} = \varepsilon\|\overrightarrow{f}\|\,\overrightarrow{e_x}\cdot\dot{x}\,\overrightarrow{e_x} = \varepsilon\dot{x}\|\overrightarrow{f}\| < 0$ par définition de ε.

   Plaçons-nous à l'équilibre (tel que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$), la RFD projetée suivant $\overrightarrow{e_x}$ s'écrit

   $$0 = -kx + \varepsilon\|\overrightarrow{f}\| \qquad \text{soit} \qquad |x| = \frac{\|\overrightarrow{f}\|}{k}$$

   Comme on se trouve dans le cas statique, on a $\|\overrightarrow{f}\| \leqslant \mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\| = \mu mg$ puisque la réaction normale et le poids doivent se compenser suivant la verticale. Ainsi,

   $$\boxed{|x| \leqslant \frac{\mu mg}{k} = b \qquad \text{soit} \qquad x \in \left[-\frac{\mu mg}{k}\,;\frac{\mu mg}{k}\right]}$$

2. Comme il n'y a toujours pas de mouvement suivant la verticale, on a toujours $\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{P}}\| = mg$, d'où $\|\overrightarrow{f}\| = \mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\| = \mu\,mg$ La projection suivant l'axe horizontal donne cette fois

   $$m\ddot{x} = -kx + \varepsilon\|\overrightarrow{f}\| \qquad \text{soit} \qquad \boxed{m\ddot{x} + kx = \varepsilon\,\mu\,mg}$$

3. (a) Quand $\varepsilon = 1$, on a $\dot{x} < 0$ (pour que $\varepsilon\dot{x} < 0$), soit un mouvement vers la gauche. L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique

   $$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = \mu g$$

   de solution particulièrement $\mu mg/k = b$ et donc de solution générale

   $$x_1(t) = \mathrm{A}\cos\omega_0 t + \mathrm{B}\sin\omega_0 t + b \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

   L'application des deux conditions initiales se fait sans peine pour trouver

   $$\boxed{x_1(t) = b + (\mathrm{X}_1 - b)\cos\omega_0 t}$$

(b) Quand $\varepsilon = -1$, on a $\dot{x} > 0$ (pour que $\varepsilon\dot{x} < 0$), soit un mouvement vers la droite. L'équation différentielle est toujours celle d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = -\mu g$$

de solution particulièrement $-\mu mg/k = -b$ et donc de solution générale

$$x_2(t) = \mathrm{A}\cos\omega_0 t + \mathrm{B}\sin\omega_0 t - b \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

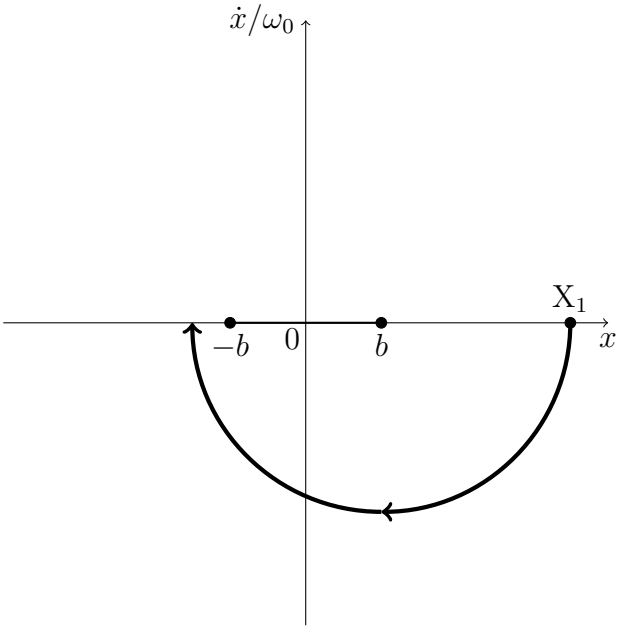
L'application des deux conditions initiales se fait à nouveau sans peine pour trouver

$$\boxed{x_2(t) = -b + (\mathrm{X}_2 + b)\cos\omega_0 t}$$

4. (a) On remarque que

$$x_1(t) - b = (\mathrm{X}_1 - b)\cos\omega_0 t \qquad \text{et} \qquad \frac{\dot{x_1}}{\omega_0} = -\,(\mathrm{X}_1 - b)\sin\omega_0 t$$

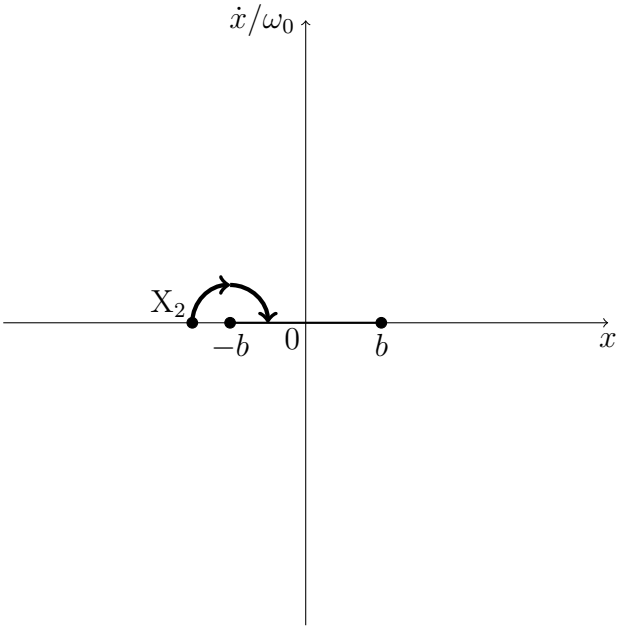
Il s'agit de l'équation paramétrique d'un cercle (pensez à la manière de parcourir le cercle trigonométrique) de rayon $\mathrm{X}_1 - b$, de centre $(b, 0)$ et parcouru dans le sens horaire (à cause du moins) tant que la vitesse est bien négative (soit jusqu'à ce que $\omega_0 t$ vaille π)



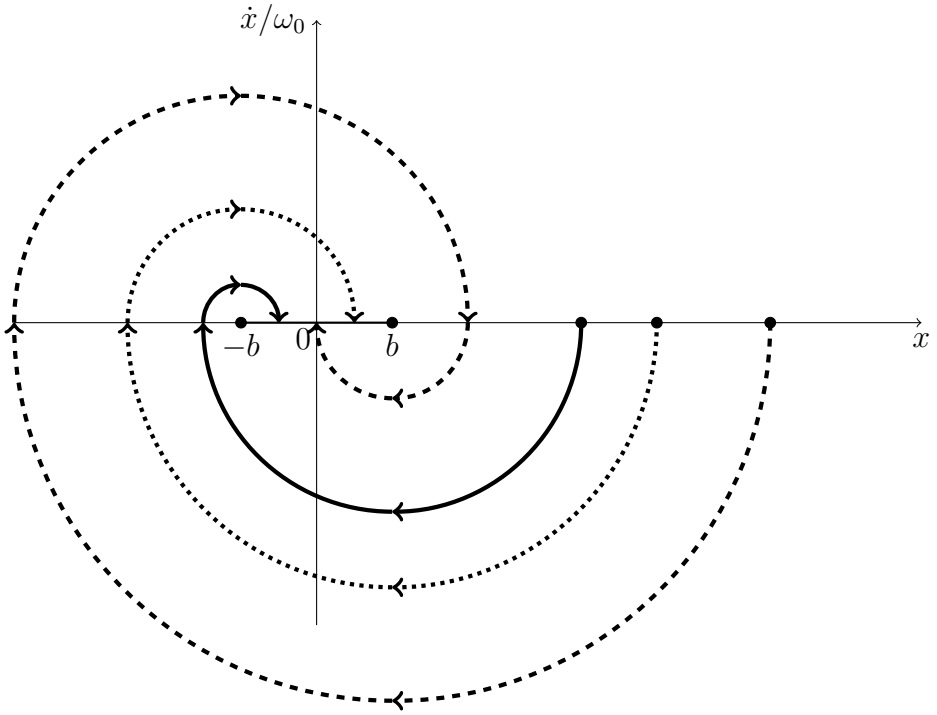
(b) On remarque de même que

$$x_2(t) + b = (\mathrm{X}_2 + b)\cos\omega_0 t \qquad \text{et} \qquad \frac{\dot{x_2}}{\omega_0} = -\,(\mathrm{X}_2 + b)\sin\omega_0 t$$

Il s'agit encore de l'équation paramétrique d'un cercle (pensez à la manière de parcourir le cercle trigonométrique) de rayon $|\mathrm{X}_2 + b|$, de centre $(-b, 0)$ et toujours parcouru dans le sens horaire (toujours à cause du moins) tant que la vitesse est bien positive (soit jusqu'à ce que $\omega_0 t$ vaille π puisque $\mathrm{X}_2 + b$ est négatif)



(c) On peut donc faire les constructions graphiques dans le plan de phase pour diverses conditions initiales :



Tant que l'on traverse l'axe des abscisses en dehors de l'intervalle $[\,-b\,;b\,]$, on fait des demi-cercles tantôt centrés sur $(b,0)$ (demi-cercle vers le bas), tantôt centrés sur $(-b,0)$ (demi-cercle « retour » vers le haut). À partir du moment où le mobile s'arrête dans la zone où il peut y avoir équilibre, il y reste « collé » puisqu'il y arrive avec une vitesse nulle et du coup la force de frottement résiduelle peut tout juste compenser la tension du ressort : plus rien ne bouge à partir de là.

5. Mouvement à partir d'un profil énergétique** None available

6. Profils énergétiques** None available

7. Force élastique et stabilité d'équilibre** None available

8. Couplage d'oscillateurs** None available

9. Pendule et ressort** None available

10. Trajectoire de phase et conservation de l'énergie** None available

11. Pendule simple et oscillations d'amplitude finie** None available

12. Les aventures de Marsu et ses petits***

1. **Capacités bondissantes de Marsu**

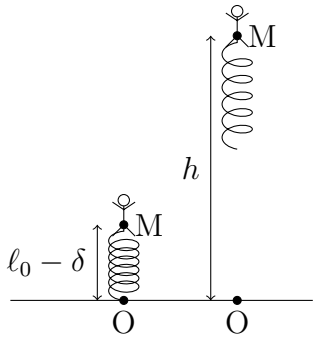
(a) Lors du déplacement sur l'hélice du ressort, tous les petits déplacements peuvent s'exprimer en fonction de $\mathrm{d}\theta$, soit $\mathrm{d}x = -\mathrm{R}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y = \mathrm{R}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi, la longueur totale de la queue s'écrit, comme l'angle tourne en n tours de $\theta = 0$ à $\theta_{\max} = 2n\pi$,

$$\mathrm{L} = \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{dL} = \int_0^{\theta_{\max}} \sqrt{\mathrm{R}^2\sin^2\theta + \mathrm{R}^2\cos^2\theta + p^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_{\max}} \sqrt{\mathrm{R}^2 + p^2}\,\mathrm{d}\theta = \theta_{\max}\sqrt{\mathrm{R}^2 + p^2}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que l'altitude z varie entre 0 et ℓ_0 lorsque θ varie de 0 à $\theta_{\max}$, d'où $\ell_0 = p\,2n\pi$, soit

$$\boxed{\mathrm{L} = 2n\pi\sqrt{\left(\frac{\ell_0}{2n\pi}\right)^2 + \mathrm{R}^2} = 6,3\ \mathrm{m}}$$

(b) La figure est donnée ci-contre. Considérons le système {Marsu + queue/ressort} lors de la première phase de propulsion, avant que le ressort ne quitte la terre ferme. Seuls s'exercent sur ce système, dans le référentiel terrestre galiléen, le poids de Marsu (associé à l'énergie potentielle mgz en prenant l'axe Oz vers le haut) et la réaction du sol (associée à l'énergie potentielle du ressort puisqu'elle est, par la loi des actions réciproques, exactement opposée à la force de tension du ressort tant que celui-ci est comprimé). Les deux forces étant conservatives, l'énergie mécanique totale est conservée :



$$\mathrm{E_m} = \mathrm{C^{te}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + mgz$$

On applique donc le TEM entre la position initiale comprimée et le moment où le ressort récupère sa longueur à vide. Ainsi,

$$\mathrm{E_m}(0) = \mathrm{E_m}(\text{décollage})$$
$$0 + \frac{1}{2}k\,\delta^2 + mg\,(\ell_0 - \delta) = \frac{1}{2}m\,v_{\text{déc}}^2 + 0 + mg\,\ell_0 \qquad (\mathbf{1})$$

Lors de la deuxième phase, le même système n'est plus soumis qu'à son poids. On a toujours affaire à un système conservatif. Ainsi,

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{C^{te\prime}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

Entre le décollage et l'apogée de la trajectoire, il vient

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\text{déc}}^2 + mg\,\ell_0 = 0 + mg\,h \qquad (\mathbf{2})$$

En combinant les équations (**1**) et (**2**) pour se débarrasser de la vitesse, on en déduit

$$\boxed{k = \frac{2mg\,(h - \ell_0 + \delta)}{\delta^2} = 2,6.10^4 \text{ N.m}^{-1}}$$

Toute l'énergie stockée dans le ressort s'est transformée en énergie potentielle de pesanteur.

(c) Rebonds à répétition

i. Le même raisonnement que précédemment permet d'écrire l'égalité

$$\frac{1}{2}\,kd^2 + mg\,(\ell_0 - d) = mg\,z_1$$

soit $$\boxed{z_1 = \ell_0 - d + \frac{kd^2}{2\,mg} = 84 \text{ cm}}$$

ii. Si Marsu ne fait pas d'effort supplémentaire (et en l'absence de tout frottement), il récupère lors de la chute l'énergie cinétique qu'il avait au décollage. Après le contact, le ressort se comprime jusqu'à la distance d avant de repartir vers le haut pour un nouveau cycle.

iii. Si la queue est déjà comprimée lors du contact, Marsu a injecté de l'énergie (par actions des forces internes au système, comme sur votre bicyclette...) et le ressort va se comprimer un peu plus qu'il ne l'est déjà, permettant à Marsu de monter plus haut lors du rebond.

iv. L'énergie cinétique acquise lors du contact est produite par le travail du poids :

$$\frac{1}{2}\,mv_{\text{contact}}^2 = mg(z_1 - \ell_0 + d)$$

Par la suite, le système est, comme précédemment, conservatif. En appliquant le TEM entre le contact et le redécollage, il vient

$$\frac{1}{2}\,mv_{\text{contact}}^2 + \frac{1}{2}\,kd^2 + mg\,(\ell_0 - d) = \frac{1}{2}\,mv_{\text{redéc}}^2 + 0 + mg\,\ell_0$$

Sur la phase de remontée, on trouve comme précédemment

$$\frac{1}{2}\,mv_{\text{redéc}}^2 + mg\,\ell_0 = mg\,z_2$$

En se débarrassant des différentes vitesses, il vient l'équation

$$mg(z_1 - \ell_0 + d) + \frac{1}{2}\,kd^2 + mg\,(\ell_0 - d) = mg\,z_2$$

soit $$\boxed{z_2 = z_1 + \frac{kd^2}{2\,mg} = 1,3 \text{ m}}$$

v. En appliquant le raisonnement précédent entre le $(n-1)^{\text{e}}$ et le n^{e} bond, on voit qu'il suffit de remplacer z_1 par z_{n-1} et z_2 par z_n pour obtenir par récurrence immédiate (suite arithmétique...)

$$\boxed{z_n = z_{n-1} + \frac{kd^2}{2\,mg} = z_1 + \frac{(n-1)\,kd^2}{2\,mg} = \ell_0 - d + \frac{n\,kd^2}{2\,mg}}$$

vi. On veut trouver n tel que $z_n \geqslant h$, soit

$$\boxed{n \geqslant \frac{2\,mg}{kd^2}\,(h - \ell_0 + d) = 5,9}$$

Il faut au moins 6 bonds pour dépasser la hauteur h.

2. **Montagnes russes et petits Marsus**

(a) Un petit Marsu n'est soumis qu'à deux forces dans le référentiel terrestre galiléen : le poids qui est conservatif ainsi que la réaction du support qui ne travaille pas puisqu'il n'y a pas de frottement. Le petit Marsu est donc un système conservatif.

(b) Le poids (seule force qui travaille) a pour énergie potentielle associée $\mathrm{E_p} = mgz$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{E_p}(x) = mg\,f(x)}$$

(c) Les positions d'équilibres sont données par les extrema de l'énergie potentielle qui correspondent aux extrema de la fonction f. Les minima ($x_1 = 0$ cm, $x_3 = 40$ cm et $x_5 \approx 75$ cm) sont les équilibres stables et les maxima ($x_2 \approx 20$ cm et $x_4 = 60$ cm) sont les équilibres instables.

(d) L'énergie doit être suffisante pour atteindre $z(x_2) = 40$ cm avec une vitesse nulle, soit

$$\boxed{\mathrm{E_{m0}} = mg\,f(x_2)}$$

La vitesse minimale v_0 à avoir en partant de $x_1 = 0$ cm est telle que l'énergie mécanique soit égale à $\mathrm{E_{m0}}$, soit

$$\frac{1}{2}\,m{v_0}^2 + mg\,f(x_1) = mg\,f(x_2)$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2g\,(f(x_2) - f(x_1))}}$$

(e) On lit sur le schéma $f(x_2) \approx 40$ cm et $f(x_2) - f(x_1) \approx 20$ cm, soit

$$\boxed{\mathrm{E_{m0}} = 3,9 \text{ J} \qquad \text{et} \qquad v_0 = 2,0 \text{ m.s}^{-1}}$$

(f) Le déplacement n'ayant lieu que dans le plan Oxz, on a $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$, soit

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$$

Par dérivée d'une composée, on a $\dot{z} = f'(x)\,\dot{x}$, c'est-à-dire

$$\boxed{v^2 = (1 + f'^2)\,\dot{x}^2}$$

(g) L'énergie mécanique totale du système s'écrit

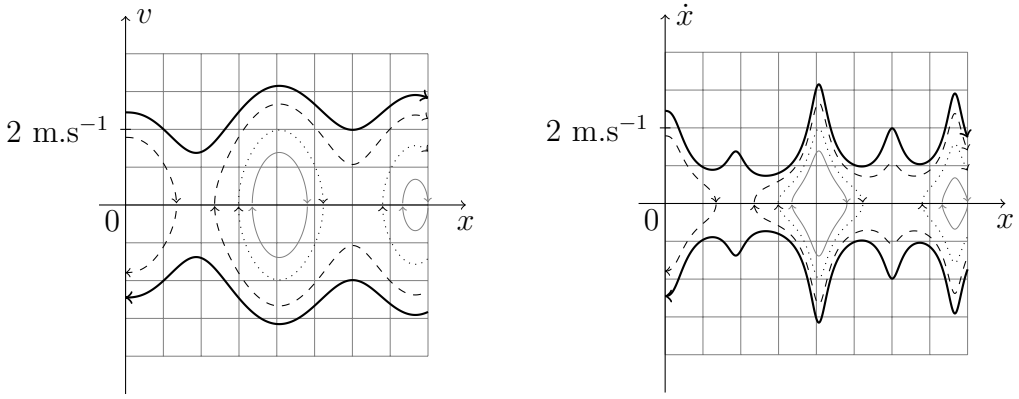
$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,mv^2 + mg\,f(x) = \frac{1}{2}\,m\,(1 + f'^2)\,\dot{x}^2 + mg\,f(x)$$

soit $$\boxed{v = \pm\sqrt{\frac{2\,\mathrm{E_m} - 2\,mg\,f(x)}{m}} \qquad \text{et} \qquad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2\,\mathrm{E_m} - 2\,mg\,f(x)}{m\,(1 + f'(x)^2)}}}$$

Connaissant les fonctions f et f', on peut donc tracer les portraits de phase v en fonction de x et $\dot{x}$ en fonction de x pour différentes valeurs de l'énergie mécanique.

(h) Les trajectoires tournent toutes dans le sens horaire (x augmente quand $\dot{x} > 0$). Au passage en x_2 et x_4, l'énergie cinétique est minimale, ce qui se traduit par une vitesse dont la norme $|v|$ est minimale. Néanmoins, la projection $\dot{x}$ de la vitesse selon x passe par un maximum car $\dot{z}$ s'annule en ces points : en norme, la vitesse diminue, mais en projection (comme $\dot{z}$ disparaît), elle peut tout de même augmenter.

(i) Dans les graphiques suivants, les courbes en traits gras correspondent à l'énergie mécanique la plus élevée. Celle-ci est plus grande que $\mathrm{E_{m0}}$ puisque le mouvement peut parcourir tout le système sans s'arrêter. L'énergie la plus élevée suivante est représentée en tirets. Comme il existe des points d'arrêts au niveau de la première bosse, l'énergie totale est nécessairement inférieure à $\mathrm{E_{m0}}$. La position des points d'arrêts ($x \approx 14$ cm et 23 cm) permet de reconnaître des trajectoires dont l'altitude maximales vaut environ 35 cm sur la courbe $z = f(x)$. Les courbes en pointillés correspondent à une énergie encore moindre d'altitude maximale inférieure à 20 cm puisque le premier puits n'admet pas de trajectoire possible. La mesure des points extrêmes ($x \approx 30$ cm, 53 cm et 68 cm) confirme en fait 20 cm comme altitude maximale effective. Enfin, les dernières courbes en traits fins, de points extrêmes $x \approx 34$ cm, 48 cm, 74 cm et 80 cm correspondent à une altitude maximale de 10 cm.



(j) Comme $v^2 = (1 + f'^2)\,\dot{x}^2$, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\,(1 + f'^2)\,\dot{x}^2 + \mathrm{E_p}(x) = \mathrm{C^{te}}$$

En dérivant par rapport au temps,

$$m\,(1 + f'^2)\,\dot{x}\ddot{x} + m\,(f'\,f''\,\dot{x})\,\dot{x}^2 + \frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} = 0$$

Soit, en simplifiant par $\dot{x}$, l'équation du mouvement s'écrit bien

$$\boxed{m\ddot{x} = \frac{-\dfrac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}x} - m\,f'\,f''\,\dot{x}^2}{1 + f'^2} = -\frac{mg + mf''\,\dot{x}^2}{1 + f'^2}\,f'}$$

On reconnaît au terme de gauche la projection selon l'axe horizontal de la relation fondamentale de la dynamique. Ainsi, le terme de droite représente la projection horizontale de la résultante des forces qui s'exercent sur petit Marsu. En d'autre termes, il s'agit de la projection horizontale de la réaction du support puisque le poids (seule autre force en présence) est purement vertical.

13. Système masse-ressort sur un cercle***

1. Les forces s'exerçant sur la perle sont respectivement
   - son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g} = m\,g\,\overrightarrow{e_x}$;
   - la réaction du cercle $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\,\overrightarrow{e_r}$;
   - la tension du ressort $\overrightarrow{\mathrm{T}} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\dfrac{\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}}{\Omega\mathrm{P}}$.
2. Équation du mouvement avec le PFD.

(a) Dans $\mathscr{R}$, les points P et Ω ont respectivement pour coordonnées $\mathrm{P} = (b\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ et $\Omega = (-b, 0, 0)$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}$ s'écrit

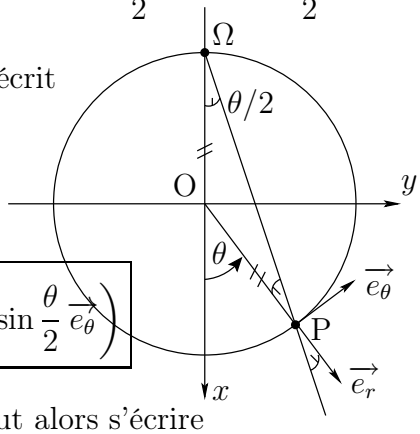
$$\boxed{\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{O\Omega}} = b\,(\cos\theta + 1)\,\overrightarrow{e_x} + b\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}}$$

Le calcul de la norme mène à

$$\begin{aligned}\Omega\mathrm{P} &= \sqrt{b^2\,(1+\cos\theta)^2 + b^2\,\sin^2\theta} \\ &= b\,\sqrt{2+2\,\cos\theta} \qquad \text{car } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega\mathrm{P} = 2b\,\cos\frac{\theta}{2}} \qquad \text{car } \cos\theta = 2\,\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \text{ et } \cos\frac{\theta}{2} > 0$$

(b) D'après le schéma ci-contre, dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, le vecteur $\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}$ s'écrit



$$\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}} = \Omega\mathrm{P}\,\cos\frac{\theta}{2}\,\overrightarrow{e_r} - \Omega\mathrm{P}\,\sin\frac{\theta}{2}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

de sorte que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = -k\,(\Omega\mathrm{P} - \ell_0)\,\frac{\overrightarrow{\Omega\mathrm{P}}}{\Omega\mathrm{P}} = -k\left(2b\,\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\overrightarrow{e_r} - \sin\frac{\theta}{2}\,\overrightarrow{e_\theta}\right)}$$

(c) La résultante des forces exercées sur la perle $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{R}} + \overrightarrow{\mathrm{T}}$ peut alors s'écrire

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = \left[mg\,\cos\theta + \mathrm{R} - k\left(2b\,\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[-mg\,\sin\theta + k\left(2b\,\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\sin\frac{\theta}{2}\right]\overrightarrow{e_\theta}}$$

(d) Comme $r = b = \mathrm{C^{te}}$, l'accélération en coordonnées polaires s'écrit

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta} = -b\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + b\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

La projection selon $\overrightarrow{e_\theta}$ de la relation fondamentale de la dynamique $\overrightarrow{\mathrm{F}} = m\,\overrightarrow{a}$ donne, en se souvenant que $\sin\theta = 2\,\cos\theta/2 \times \sin\theta/2$,

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left[2\left(\frac{g}{b} - \frac{k}{m}\right)\cos\frac{\theta}{2} + \frac{k\,\ell_0}{m\,b}\right]\sin\frac{\theta}{2} = 0} \qquad (\mathbf{1})$$

3. Équation du mouvement avec l'énergie.

(a) Le petit déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ sur le cercle $\mathscr{C}$ se fait uniquement selon la formule $\mathrm{d}\overrightarrow{r} = b\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$. D'après l'expression de la résultante obtenue précédemment, le produit scalaire vaut donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} = -mg\,\sin\theta\,b\,\mathrm{d}\theta + k\,b^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - k\,b\,\ell_0\,\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta}$$

(b) Intégrer entre les points A et B revient à intégrer entre les deux valeurs θ_A et θ_B. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{W} = \int_{\theta_\mathrm{A}}^{\theta_\mathrm{B}}\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{e_\theta}\,b\,\mathrm{d}\theta = \Big[(mg\,b - k\,b^2)\,\cos\theta\Big]_{\theta_\mathrm{A}}^{\theta_\mathrm{B}} + \Big[2k\,b\,\ell_0\,\cos\frac{\theta}{2}\Big]_{\theta_\mathrm{A}}^{\theta_\mathrm{B}}}$$

On a bien $\mathrm{W} = -\Delta\mathscr{E}_\mathrm{p} = -\left(\mathscr{E}_\mathrm{p}(\theta_\mathrm{B}) - \mathscr{E}_\mathrm{p}(\theta_\mathrm{A})\right)$ avec

$$\boxed{\mathscr{E}_\mathrm{p}(\theta) = (k\,b^2 - mg\,b)\,\cos\theta - 2k\,b\,\ell_0\,\cos\frac{\theta}{2}}$$

(c) Étant perpendiculaire au déplacement, la force de réaction du support ne travaille pas et peut donc être associée à une énergie potentielle constante que l'on peut choisir nulle. Le poids est naturellement associée à l'énergie potentielle de pesanteur $\mathrm{E_{pp}}$, qui s'exprime, la verticale Ox étant orientée vers le bas,

$$\mathrm{E_{pp}}(\theta) = -mg\,x = -mg\,b\,\cos\theta$$

L'énergie potentielle élastique $\mathrm{E_{pe}}$, elle, est proportionnelle au carré de l'allongement $2b\,\cos\dfrac{\theta}{2} - \ell_0$ et l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E_{pe}}(\theta) &= \frac{1}{2}\,k\left(2b\,\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)^2 \\ &= 2k\,b^2\,\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{k\,{\ell_0}^2}{2} - 2k\,b\,\ell_0\,\cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{E_{pe}}(\theta) &= k\,b^2\,\cos\theta + \frac{2k\,b^2 + k\,{\ell_0}^2}{2} - 2k\,b\,\ell_0\,\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que l'on a, avec $\mathrm{E_0} = \dfrac{2k\,b^2 + k\,{\ell_0}^2}{2} = \mathrm{C^{te}}$,

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{p}}(\theta) = \mathrm{E_{pp}} + \mathrm{E_{pe}} - \mathrm{E_0}}$$

Comme seules les variations d'énergie nous intéresse physiquement, la constante disparaît à chaque calcul de travail. On a bien retrouvé l'énergie potentielle globale à partir des énergies potentielles des forces en présence.

(d) Pour retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement, il suffit d'écrire la conservation de l'énergie mécanique globale au cours du temps sous la forme $\mathrm{dE_m}/\mathrm{d}t = 0$. Comme

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \mathscr{E}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,m\,(b\,\dot\theta)^2 + (k\,b^2 - mg\,b)\,\cos\theta - 2k\,b\,\ell_0\,\cos\frac{\theta}{2}$$

alors $$\frac{\mathrm{dE_m}}{\mathrm{d}t} = m\,b^2\,\dot\theta\,\ddot\theta - (k\,b^2 - mg\,b)\,\sin\theta\,\dot\theta + k\,b\,\ell_0\,\sin\frac{\theta}{2}\,\dot\theta = 0$$

Ainsi, en simplifiant par $\dot\theta$ non nul presque partout [1], on retrouve bien

$$\boxed{\ddot\theta + \left[2\left(\frac{g}{b} - \frac{k}{m}\right)\cos\frac{\theta}{2} + \frac{k\,\ell_0}{m\,b}\right]\sin\frac{\theta}{2} = 0}$$

4. On recherche à présent les positions d'équilibre du système.

(a) Une position d'équilibre est telle que lorsqu'on s'y place sans vitesse initiale, on n'en bouge pas, c'est-à-dire que l'accélération y est nulle. Pour notre équation d'évolution, cela revient à poser $\ddot\theta = 0$. Ainsi, les position d'équilibre doivent vérifier l'équation

$$\boxed{\left[2\left(\frac{g}{b} - \frac{k}{m}\right)\cos\frac{\theta}{2} + \frac{k\,\ell_0}{m\,b}\right]\sin\frac{\theta}{2} = 0}$$

(b) Énergétiquement, les positions d'équilibre sont des extrema de l'énergie potentielle c'est-à-dire telles que $\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{p}}/\mathrm{d}\theta = 0$. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\theta} = -(k\,b^2 - mg\,b)\,\sin\theta + k\,b\,\ell_0\,\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

ce qui revient bien à l'équation précédente.

1. On s'intéresse à des mouvements…

(c) Dans le cas d'une position d'équilibre $\theta_1 \neq 0$, on peut simplifier par $\sin\theta_1/2$ et l'on a

$$\boxed{2\left(\frac{g}{b}-\frac{k}{m}\right)\cos\frac{\theta_1}{2}+\frac{k\,\ell_0}{m\,b}=0} \qquad (\mathbf{2})$$

Il faut donc, pour qu'une telle position existe, que les constantes du problèmes vérifient

$$\boxed{\left|\frac{k\,\ell_0}{2\,(mg-k\,b)}\right|\leqslant 1} \qquad (\mathbf{3})$$

5. Penchons-nous à présent sur l'évolution autour des positions d'équilibre stable.

(a) Posons $\theta=\theta_1+\varepsilon(t)$ avec $|\varepsilon(t)|\ll\theta_1$ pour s'intéresser aux petites oscillations autour de θ_1.

i. On a les relations trigonométriques

$$\begin{aligned}\cos\frac{\theta}{2}&=\cos\frac{(\theta_1+\varepsilon)}{2}\\&=\cos\frac{\theta_1}{2}\,\cos\frac{\varepsilon}{2}-\sin\frac{\varepsilon}{2}\,\sin\frac{\theta_1}{2}\\\cos\frac{\theta}{2}&\approx\cos\frac{\theta_1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\,\sin\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}$$

de même $$\sin\frac{\theta}{2}\approx\sin\frac{\theta_1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\,\cos\frac{\theta_1}{2}$$

En remplaçant dans l'équation d'évolution (**1**), il vient

$$\ddot{\varepsilon}+\left[2\left(\frac{g}{b}-\frac{k}{m}\right)\left(\cos\frac{\theta_1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\,\sin\frac{\theta_1}{2}\right)+\frac{k\,\ell_0}{m\,b}\right]\left(\sin\frac{\theta_1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\,\cos\frac{\theta_1}{2}\right)=0$$

D'où, en rassemblant les termes au premier ordre en ε et en négligeant le terme en ε^2,

$$\underbrace{\left[2\left(\frac{g}{b}-\frac{k}{m}\right)\cos\frac{\theta_1}{2}+\frac{k\,\ell_0}{m\,b}\right]\sin\frac{\theta_1}{2}}_{\text{Par définition de }\theta_1,\,=0,\text{ voir équation }(\mathbf{2})}+\ddot{\varepsilon}+\Bigg[\underbrace{\left(\frac{g}{b}-\frac{k}{m}\right)\cos^2\frac{\theta_1}{2}}_{=-\frac{k\,\ell_0}{2m\,b}\,\cos\frac{\theta_1}{2},\text{ d'après }(\mathbf{2})}-\left(\frac{g}{b}-\frac{k}{m}\right)\sin^2\frac{\theta_1}{2}+\frac{k\,\ell_0}{2\,m\,b}\cos\frac{\theta_1}{2}\Bigg]\varepsilon=0$$

Au final, $$\boxed{\ddot{\varepsilon}+\left(\frac{k}{m}-\frac{g}{b}\right)\sin^2\frac{\theta_1}{2}\,\varepsilon=0}$$

ii. Cette équation admet pour solution (avec certaines conditions initiales)

$$\boxed{\varepsilon(t)=\alpha\,\cos\omega_0 t \qquad \text{avec} \qquad {\omega_0}^2=\left(\frac{k}{m}-\frac{g}{b}\right)\sin^2\frac{\theta_1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha\ll\theta_1}$$

La condition $\alpha\ll\theta_1$ découle de l'approximation initiale de petites oscillations autour de θ_1.

(b) i. Un développement à l'ordre 2 de $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et $\sin\dfrac{\theta}{2}$ conduit à

$$\begin{aligned}\cos\frac{\theta}{2}&\approx\cos\frac{\theta_1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right]-\frac{\varepsilon}{2}\,\sin\frac{\theta_1}{2}\\\text{et}\qquad\sin\frac{\theta}{2}&\approx\sin\frac{\theta_1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right]+\frac{\varepsilon}{2}\,\cos\frac{\theta_1}{2}\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (**1**), le terme d'ordre 0 s'annule comme précédemment, le terme d'ordre 1 reste inchangé et il se rajoute un terme proportionnel à ε^2

$$\boxed{\ddot{\varepsilon}+\frac{2\,(mg-kb)^2-(k\ell_0)^2}{4\,(mg-kb)}\,\varepsilon+\frac{3\,k\ell_0}{8\,mg}\,\sin\frac{\theta_1}{2}\,\varepsilon^2=0}$$

ii. Réécrivons cette équation sous la forme simplifiée

$$\ddot{\varepsilon} + {\omega_0}^2\,\varepsilon + \rho\,\varepsilon^2 = 0$$

On cherche une solution sous la forme $\varepsilon(t) = \alpha\,\cos\omega_0 t + \beta\,\cos 2\omega_0 t + \gamma$ avec $\beta \ll \alpha$ et $\gamma \ll \alpha$. On remplace, néglige les termes d'ordre 3 en α (*ie* $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$) et utilise le fait que $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ pour obtenir en rassemblant les termes

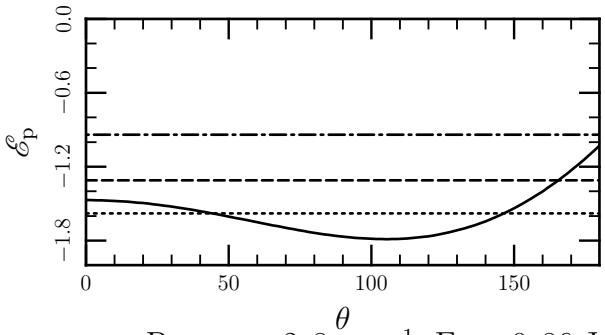
$$(-{\omega_0}^2 + {\omega_0}^2)\;\alpha\;\cos\omega_0 t + \left[(-4{\omega_0}^2 + {\omega_0}^2)\;\beta + \rho\,\frac{\alpha^2}{2}\right]\cos 2\omega_0 t + \left({\omega_0}^2\,\gamma + \rho\,\frac{\alpha^2}{2}\right) = 0$$

Le terme en $\cos\omega_0 t$ s'annule de lui-même, mais pour que cette équation soit vérifiée à tout instant, il faut que l'on ait

$$\boxed{\beta = \frac{\rho\,\alpha^2}{6\,{\omega_0}^2} \qquad \text{et} \qquad \gamma = -\frac{\rho\,\alpha^2}{2\,{\omega_0}^2}}$$

On vérifie bien que β et γ sont d'ordre 2 en α (donc $\ll \alpha$) et que négliger les produits $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ revenait à négliger l'ordre 3 en α.

(c) Le tracé de l'énergie potentielle pour les valeurs numériques fournies donne



Pour $v_0 = 1,2$ m.s^{-1}, on a $\mathrm{E_c} = 0,22$ J. On peut placer sur le graphique la droite représentant l'énergie mécanique totale $\mathrm{E_m}$ de la perle. On constate alors que le mouvement est compris entre 43° et 147°

Pour $v_0 = 1,8$ m.s^{-1}, on a $\mathrm{E_c} = 0,49$ J. On constate que le mouvement est limité en 166° mais passe la position d'équilibre instable centrale. Par parité de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(\theta)$, on en déduit que la perle peut aller jusqu'en −166°.

Pour $v = 2,8$ m.s^{-1}, $\mathrm{E_c} = 0,86$ J. L'énergie est suffisante pour atteindre le point Ω. On ne peut dès lors pas prévoir ce qu'il va se passer car cela implique *de facto*, que la longueur du ressort est nulle, ce qui est physiquement impossible. La perle va donc buter en haut du cerceau.

14. Pendule asymétrique***

1. On a $z = 0$ quand $\theta = 0$ et quand le cylindre tourne de θ, le fil se déroule de $\mathrm{R}\theta$, donc

$$\boxed{z = \mathrm{R}\theta}$$

2. Bilan énergétique

(a) L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des masses m et M.

Or, $\qquad \mathrm{E}_{cm} = \dfrac{1}{2}\,m\,(\ell\dot\theta)^2 \qquad$ et $\qquad \mathrm{E_{cM}} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{M}\,\dot z^2 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(\mathrm{R}\dot\theta)^2$

d'où $\qquad \boxed{\mathrm{E_c} = \dfrac{1}{2}\,(m\ell^2 + \mathrm{MR}^2)\,\dot\theta^2}$

(b) L'énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de chacune des masses. Attention, l'axe des z est orienté vers le bas, donc on a un signe négatif dans l'énergie potentielle

$$\mathrm{E_p} = -mg\,z_m - \mathrm{M}g\,z_\mathrm{M} \qquad \text{avec} \qquad z_m = -(\ell - \ell\cos\theta) \quad \text{et} \quad z_\mathrm{M} = \mathrm{R}\theta$$

d'où $\qquad \boxed{\mathrm{E_p} = mg\,\ell\,(1-\cos\theta) - \mathrm{M}g\,\mathrm{R}\theta}$

> Lorsqu'une convention est indiquée dans un énoncé, il faut la respecter et toujours vérifier que la tendance est bonne, c'est-à-dire ici que l'énergie potentielle de pesanteur diminue quand on « descend » vers le sol.

3. Il n'y a pas de position d'équilibre si la dérivée de $\mathrm{E_p}$ *par rapport à* θ ne s'annule jamais :

$$\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}\theta} = mg\,\ell\,\sin\theta - \mathrm{M}g\,\mathrm{R} = mg\,\ell\left(\sin\theta - \frac{\mathrm{MR}}{m\ell}\right)$$

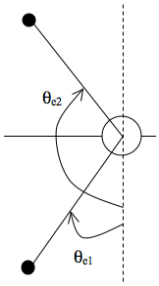
La fonction sinus étant bornée par -1 et 1, cette dernière expression ne s'annule pas si

$$\boxed{\mathrm{M} > \mathrm{M_0} = \frac{m\ell}{\mathrm{R}} = 1,00\ \mathrm{kg}}$$

4. Positions d'équilibre
   (a) Si $\mathrm{M} < \mathrm{M_0}$, il existe des positions d'équilibre vérifiant

$$\sin(\theta_e) = \frac{\mathrm{MR}}{m\ell}$$

ie $$\boxed{\theta_{\mathrm{e1}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\mathrm{MR}}{m\ell}\right) \quad \text{et} \quad \theta_{\mathrm{e2}} = \pi - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\mathrm{MR}}{m\ell}\right) = \pi - \theta_1}$$

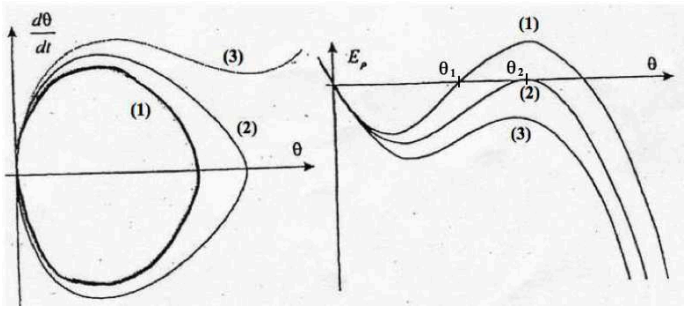


   (b) Le schéma représentatif est représenté ci-contre.
   (c) L'équilibre est stable si la dérivée seconde de $\mathrm{E_p}$ est positive au point étudié. Ici,

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E_p}}{\mathrm{d}\theta^2} = mg\,\ell\,\cos\theta$$

Or $\cos\theta_{e1} > 0$ car Arcsin envoie sur $[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$ et $\cos\theta_{e2} < 0$. La première position est donc une position d'équilibre stable et la seconde une position d'équilibre instable.

5. Trajectoire de phase



(a) À $t = 0$, l'énergie mécanique est nulle car on lâche le mobile sans vitesse initiale à une position où $E_p = 0$. Le système étant conservatif, l'énergie mécanique sera nulle à tout instant. L'énergie cinétique étant forcément positive cela impose $E_p < 0$.

Pour la courbe (1), le mobile est d'abord en $\theta = 0$ puis E_p diminue donc E_c augmente et atteint un maximum lorsque E_p est minimum. À partir de là E_p augmente de nouveau jusqu'à atteindre zéro en θ_1 donc l'énergie cinétique s'annule. La particule oscille alors dans une cuvette de potentiel autour de sa position d'équilibre stable.

Le commentaire est identique pour la courbe (2), sauf que l'amplitude des oscillations est plus grande (la particule va jusqu'à θ_2). Dans les deux cas on doit donc avoir une trajectoire de phase fermée, entourant une position d'équilibre stable.

Comme l'écart entre les deux positions d'équilibre θ_{e1} et θ_{e2} est d'autant plus petit que la masse est grande, les courbes (1) correspondent à 650 g et les courbes (2) à 720 g.

Le dernier cas correspond à la masse de 800 g. Elle part de $\theta = 0$, passe par sa position d'équilibre stable, mais comme E_p ne s'annule jamais, son énergie cinétique est toujours positive. Elle franchit donc la barrière de potentiel et tourne autour de l'axe (état de diffusion). La trajectoire de phase est alors ouverte (courbe (3)).

(b) On remarque que la courbe d'énergie potentielle (2) correspondant à M = 720 g est tangente à l'axe des abscisses. Pour toute masse supérieure à 720 g, l'énergie cinétique ne s'annulera plus et la trajectoire de phase sera ouverte. Il faut donc prendre M < 720 g.
Remarque : on a 800 g $< M_0 = 1,00$ kg car on a bien 2 extrema sur E_p dans les 3 cas.

15. Mouvement d'une bille dans une rigole***

1. Étude géométrique du système.

(a) Le triangle OBM est isocèle en O. On a donc $\theta + 2\alpha = \pi$, d'où

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}}$$

(b) En prenant la hauteur en O dans le triangle OBM isocèle en O, on a

$$\boxed{X = BM = 2 \times R \cos\alpha = 2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2R \sin\frac{\theta}{2}}$$

2. Application de la relation fondamentale de la dynamique.

(a) Les forces s'exerçant **sur la bille** en M dans le référentiel du laboratoire supposé **galiléen** sont

— son poids $\overrightarrow{P} = mg\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$;

— la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -kX\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_r} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$;

— la réaction normale du support $\overrightarrow{N} = -N\,\overrightarrow{e_r}$.

(b) Étant dans un référentiel galiléen, on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique

$$\boxed{m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}}$$

(c) Comme $\mathrm{R} = \mathrm{C^{te}}$, on a $\overrightarrow{a} = -\mathrm{R}\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + \mathrm{R}\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$. La projection de la RFD sur $\overrightarrow{e_\theta}$ donne alors

$$m\,\mathrm{R}\,\ddot{\theta} = mg\,\cos\theta - k\mathrm{X}\,\sin\alpha + 0$$

$$0 = m\,\mathrm{R}\,\ddot{\theta} - mg\,\cos\theta + k\mathrm{R}\,2\sin\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$\boxed{0 = \ddot{\theta} + \frac{k}{m}\,\sin\theta - \frac{g}{\mathrm{R}}\,\cos\theta}$$

(d) La projection sur $\overrightarrow{e_r}$ permet d'extraire la réaction normale N

$$-m\,\mathrm{R}\,\dot{\theta}^2 = mg\,\sin\theta - k\mathrm{X}\,\cos\alpha - \mathrm{N}$$

$$\boxed{\mathrm{N} = m\,\mathrm{R}\,\dot{\theta}^2 - 2k\mathrm{R}\,\sin^2\frac{\theta}{2} + mg\,\sin\theta}$$

(e) On a $\boxed{\lim_{\theta\to 0}\mathrm{N} = m\,\mathrm{R}\,\dot{\theta}^2}$

Si $\dot{\theta} = 0$, par exemple si on lâche le mobile en B sans vitesse initiale, le ressort n'étant pas tendu, seule la force de pesanteur entre en jeu et elle est verticale. La bille ne prend donc pas appui sur le support et la réaction est donc nulle.

Si la bille arrive en B avec une vitesse angulaire non nulle, il existe une « pression cinétique » due à la rotation de la direction de la bille : sans support pour la guider, la bille continuerait tout droit. Il faut donc que le support incurve la trajectoire en exerçant une force de réaction non nulle.

3. Analyse énergétique.

(a) L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit mgz avec z orientée vers le haut. Donc, en prenant l'origine en O, on a

$$\boxed{\mathrm{E_{pp}} = -mg\,\mathrm{R}\,\sin\theta}$$

> Ne pas oublier de préciser l'orientation de z et s'y tenir.

L'énergie potentielle élastique s'exprime $\frac{1}{2}\,k\,\mathrm{X}^2$ donc

$$\boxed{\mathrm{E_{pe}} = \frac{1}{2}\,k\,4\mathrm{R}^2\,\sin^2\frac{\theta}{2} = k\,\mathrm{R}^2\,(1-\cos\theta)} \qquad \text{car } 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$$

La réaction normale $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ ne travaille pas car elle est constamment orthogonale au mouvement. On peut donc lui associer une énergie potentielle constante que l'on peut choisir nulle

$$\boxed{\mathrm{E_{pN}} = 0}$$

(b) Les positions d'équilibre sont les extrema de la fonction $\theta \mapsto \mathrm{E_{ptot}}(\theta) = \mathrm{E_{pp}}(\theta) + \mathrm{E_{pe}}(\theta)$, d'où

$$\frac{\mathrm{dE_{ptot}}}{\mathrm{d}\theta} = 0 = -mg\,\mathrm{R}\,\cos\theta_0 + k\mathrm{R}^2\,\sin\theta_0$$

$$\boxed{\tan\theta_0 = \frac{mg}{k\mathrm{R}}}$$

C'est bien une position d'équilibre stable car la dérivée est négative pour $\theta < \theta_0$ et positive pour $\theta > \theta_0$.

> **Point extrêmement important** : pour déterminer une position d'équilibre par un argument énergétique, il faut prendre garde de bien dériver par rapport à la variable **spatiale** qui entre en jeu et non par rapport au temps.

(c) Le poids et la tension du ressort sont deux forces conservatives auxquelles on peut à chacune associer une énergie potentielle. De plus, la réaction normale est à tout instant orthogonale au mouvement et ne travaille donc pas. Ainsi, le système dans son ensemble est conservatif et l'énergie mécanique totale est conservée. Comme

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_{ptot}} = \frac{1}{2}\, m\,(\mathrm{R}\,\dot\theta)^2 + k\mathrm{R}^2\ (1-\cos\theta) - mg\,\mathrm{R}\,\sin\theta$$

Sa conservation s'écrit

$$\frac{\mathrm{dE_m}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathrm{R}^2\,\dot\theta\,\ddot\theta + k\mathrm{R}^2\,\sin\theta\,\dot\theta - mg\,\mathrm{R}\,\cos\theta\,\dot\theta = 0$$

d'où
$$\boxed{\ddot\theta + \frac{k}{m}\,\sin\theta - \frac{g}{\mathrm{R}}\,\cos\theta = 0}$$

> Lorsqu'on regarde l'énergie mécanique, c'est effectivement sa conservation **au cours du temps** qui nous intéresse, le système faisant constamment des échanges entre énergies potentielle et cinétique tout en gardant la somme des deux constante.

4. Mouvement autour de la position d'équilibre.

(a) i. Développons $\cos\theta$ et $\sin\theta$ au premier ordre en ε.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\theta_0+\varepsilon)\\ &= \cos\theta_0\,\cos\varepsilon - \sin\theta_0\,\sin\varepsilon\\ \cos\theta &\approx \cos\theta_0 - \varepsilon\,\sin\theta_0\end{aligned}$$

De même
$$\sin\theta \approx \varepsilon\,\cos\theta_0 + \sin\theta_0$$

> Attention, ici seul ε est petit. θ n'est *a priori* pas petit et vaut aux alentours de θ_0.

En remplaçant dans l'équation d'évolution, on obtient

$$\underbrace{\frac{k}{m}\,\sin\theta_0 - \frac{g}{\mathrm{R}}\,\cos\theta_0}_{=0,\text{ par définition de }\theta_0} + \ddot\varepsilon + \left(\frac{k}{m}\,\cos\theta_0 + \frac{g}{\mathrm{R}}\sin\theta_0\right)\varepsilon = 0$$

d'où
$$\boxed{\ddot\varepsilon + \left(\frac{k}{m}\,\cos\theta_0 + \frac{g}{\mathrm{R}}\sin\theta_0\right)\varepsilon = 0}$$

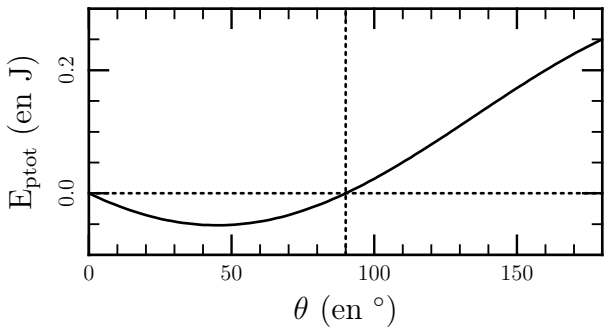
> Le terme constant se devait d'être nul (ou négligeable) puisqu'il représente la solution particulière constante de la fonction $\varepsilon(t)$ recherchée. Ainsi, si vous arrivez à une équation où le terme constant ne se simplifie pas ou n'est pas négligeable alors que ε l'est par hypothèse, cela signifie soit que vous avez fait une erreur dans vos calculs, soit que l'hypothèse de départ (ε petit) n'est pas valide.

ii. L'équation différentielle vérifiée par ε est du type $\ddot{\varepsilon}+{\omega_0}^2\,\varepsilon=0$, d'où une solution sinusoïdale de période

$$\boxed{\mathrm{T}_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}\cos\theta_0+\dfrac{g}{\mathrm{R}}\sin\theta_0}}}$$

(b) i. Le tracé est donné ci-contre.
Avec les valeurs numériques fournies, l'énergie potentielle s'écrit

$$\mathrm{E_p}=0,125\,(1-\sin\theta-\cos\theta)$$



ii. On détermine sur le tracé que l'énergie mécanique globale du point B est retrouvée en $\theta=90°$. Partant sans vitesse initiale de B, le mobile va osciller entre $\theta=0°$ et $\theta=90°$.

16. Pendule de Holweck-Lejay***

1. Pour prouver que le poids dérive d'une énergie potentielle, il suffit de montrer que son travail s'écrit comme l'opposée de la variation d'une certaine fonction entre la position initiale et la position finale de calcul. Ici, le petit déplacement lors du mouvement s'écrit $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\ell\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$. Ainsi,

$$\mathrm{W}_{\overrightarrow{\mathrm{P}}}=\int_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}}m\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{e_\theta}\,\ell\,\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}}mg\ell\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\left[mg\ell\cos\theta\right]_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}}=-\Delta\mathrm{E_{pp}}$$

d'où $\boxed{\mathrm{E_{pp}}=mg\ell\cos\theta}$ en choisissant la constante nulle

Le même raissonnement appliqué à la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ donne

$$\mathrm{W}_{\overrightarrow{\mathrm{F}}}=\int_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}}-f\theta\,\ell\,\mathrm{d}\theta=-\left[\frac{1}{2}\,f\ell\theta^2\right]_{\theta_\mathrm{i}}^{\theta_\mathrm{f}}=-\Delta\mathrm{E_{pe}}$$

d'où $\boxed{\mathrm{E_{pe}}=\dfrac{1}{2}\,f\ell\theta^2}$ en choisissant aussi la constante nulle

2. Les positions d'équilibre s'obtiennent en regardant quand la dérivée de l'énergie potentielle totale $\mathrm{E_{pp}}+\mathrm{E_{pe}}$ s'annule (la réaction du support ne travaillant pas), soit

$$\frac{\mathrm{dE_{ptot}}}{\mathrm{d}\theta}=-mg\ell\sin\theta+f\ell\,\theta=0$$

$\theta=0$ est solution de cette équation. Et si on cherche une solution $\theta\neq0$, il faut que

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{f}{mg}$$

ce qui n'est possible, d'après le graphique proposé, que si $f/mg<1$. On a alors deux intersections de la courbe représentative de $\sin\theta/\theta$ avec la droite horizontale f/mg, donc deux positions d'équilibre supplémentaires possibles.

L'énergie potentielle tends vers l'infini lorsque θ tends vers $\pm\infty$. Par conséquent, s'il n'existe qu'un seul extremum, c'est nécessairement un minimum. Dans ce cas, la position d'équilibre $\theta=0$ est une position stable. Au contraire, s'il existe trois extrema, il s'agit forcément d'un maximum entouré de deux minima. $\theta=0$ est donc une position instable dans ce cas et les deux autres équilibres (symétriques par rapport à 0) sont des équilibres stables.

3. Le système considéré est conservatif : l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. Or,

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m(\ell\dot{\theta})^2 + \mathrm{E_{ptot}}(\theta)$$

Ainsi, $$0 = \frac{\mathrm{dE_m}}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} - mg\ell\sin\theta\,\dot{\theta} + f\ell\,\theta\,\dot{\theta}$$

soit, en simplifiant par $m\ell^2\dot{\theta}$, $$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta + \frac{f}{m\ell}\,\theta = 0}$$

4. Lors de petites oscillations, on $\sin\theta \approx \theta$. On reconnaît alors l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + \omega^2\,\theta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = \frac{f}{m\ell} - \frac{g}{\ell}$$

La période s'écrit bien $$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\dfrac{f}{m} - g}}}$$

Calculons la différentielle logarithmique

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{T}} = \mathrm{d}\ln(\mathrm{T}) = -\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln\left(\frac{f}{m} - g\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}g}{\dfrac{f}{m} - g} = \frac{1}{2}\,\frac{mg}{f - mg}\,\frac{\mathrm{d}g}{g}$$

et de ce fait $$\boxed{\frac{\Delta\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left|\frac{mg}{f - mg}\right|\,\frac{\Delta g}{g}}$$

Pour un pendule simple, on a $\mathrm{T_0} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, soit

$$\boxed{\frac{\Delta\mathrm{T_0}}{\mathrm{T_0}} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta g}{g}}$$

Le pendule de Holweck-Lejay peut donc être bien plus précis qu'un pendule normal à condition de prendre f proche de mg (par valeurs supérieures pour que la position $\theta = 0$ soit un équilibre stable).

5. Portrait de phase
   (a) Cas conservatif
      i. Les trajectoires de phases tournent dans le sens horaire car lorsque $\dot{\theta}$ est positif, θ doit augmenter.
      ii. Toutes les forces en présences sont conservatives (ou ne travaillent pas) : on a bien un système conservatif. Le portrait de phase en rend compte par ses trajectoires fermées, caractéristiques de mouvement périodiques donc à énergie constante.
      iii. Les trajectoires fermées étant périodiques, elles correspondent aussi à des états liées : elles ne partent pas à l'infini.
      iv. On observe trois positions d'équilibres sur le portraits : deux stables en $\theta = \pm\,\pi/4$ (les trajectoires tournent autour) et une instable en $\theta = 0$ (point de croisement des séparatrices).
      v. Tous les états dessinés sont des états liés : il n'existe pas d'état de diffusion car l'énergie potentielle totale tend vers l'infini pour $\theta = \pm\,\infty$.
   (b) Cas non conservatif
      i. Une force de frottement fluide ne modifie pas la position d'équilibre puisque la force disparaît quand on regarde à l'équilibre ($\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$).

ii. Comme la position d'équilibre vers laquelle tend le système est $\theta_{\text{éq}} = \pi/4$ d'après le diagramme, on déduit de la représentation de la fonction $\theta \mapsto \sin\theta/\theta$ que

$$\boxed{\frac{f}{mg} = \frac{\sin\theta_{\text{eq}}}{\theta_{\text{eq}}} = 0,9}$$

iii. Le régime est pseudo-périodique donc on est dans le cas des frottements faibles. On remarque que, même si on part de la position d'équilibre (instable) $\theta = 0$, on va tendre vers une position d'équilibre stable en $\theta_{\text{éq}} = \pi/4$.

17. Équilibre d'une sphère chargée***

On se placera dans le référentiel terrestre galiléen, le système est soumis uniquement $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \mathrm{F}(z)\,\overrightarrow{u_z}$ et à son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$.

1. Voir annexes pour le graphique. $\mathrm{F}(z)$ est une fonction impaire, $\mathrm{F}(z) > 0$ pour $z \geqslant 0$ elle s'annule en 0 et tend vers 0 à l'infini. Il ne reste plus qu'à déterminer les extrema pour pouvoir la tracer

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z} &= \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{3/2}} + z\times\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2\,z}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{5/2}}\right]\\ &= \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{\mathrm{R}^2-2\,z^2}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{5/2}}\right)\end{aligned}$$

La dérivée s'annule en $\boxed{z = \pm\,\mathrm{R}/\sqrt{2}}$

2. La force de répulsion passe par un maximum $\mathrm{F}_{\max}$ en $z = \mathrm{R}/\sqrt{2}$. Si $mg > \mathrm{F}_{\max}$, le poids ne peut être compensé nulle part. g étant constant, il existe donc une masse maximale $m_{\max}$ permettant un équilibre.
3. Recherche de la masse maximale d'équilibre.
   (a) Pour que l'équilibre soit possible, il faut que $-mg + \mathrm{F}(z) = 0$, donc l'équilibre n'est possible que pour $z > 0$ et comme $\mathrm{F}(z) < \mathrm{F}\left(\mathrm{R}/\sqrt{2}\right)$, on a

$$\boxed{m_{\max} = \frac{q\mathrm{Q}}{6\pi\sqrt{3}\,\varepsilon_0\,g\,\mathrm{R}^2}}$$

   (b) *Application numérique* : $\boxed{m_{\max} = 35\ \mathrm{g}}$

4. Par définition
$$\begin{aligned}\mathrm{dE_{pe}} &= -\delta\mathrm{W} = -\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{F}(z)\,\mathrm{d}z\\ &= -\frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{z\,\mathrm{d}z}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{3/2}}\\ &= -\frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(z^2)}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{3/2}}\\ \mathrm{dE_{pe}} &= \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{E_{pe}} = \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}} + \mathrm{C^{te}}}$

5. Étude de l'énergie potentielle.

(a) À l'énergie potentielle associée à la force électrique, il faut ajouter l'énergie potentielle de pesanteur, l'expression de $\mathrm{E_p}$ est donc :

$$\mathrm{E_p} = \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}} + mg\,z + \mathrm{C^{te}}$$

La constante se détermine en imposant $\mathrm{E_p}(0) = 0$, soit

$$\boxed{\mathrm{E_p} = \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}^2+z^2}} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right) + mg\,z = 9.10^{-3}\left(\frac{1}{\sqrt{0,01+z^2}} - 10\right) + 0,196\,z} \qquad \text{en J}$$

6. Étude graphique de l'énergie potentielle.

(a) Cf annexe.

(b) On obtient graphiquement deux positions d'équilibre : z_2, équilibre **instable**, correspond au **maximum** local de $\mathrm{E_p}$, z_1, équilibre **stable** correspond au **minimum** local de $\mathrm{E_p}$.

(c) *Application numérique* : $\boxed{z_1 = 17 \text{ cm} \quad \text{et} \quad z_2 = 2,3 \text{ cm}}$

(d) Cf annexe. Le système est conservatif, on utilise donc la conservation de l'énergie mécanique. Pour une valeur d'énergie mécanique fixée on a $\mathrm{E_c} = \mathrm{E_m} - \mathrm{E_p}$, à partir du graphique de $\mathrm{E_p}$ on peut donc obtenir la variation de $\mathrm{E_c}$ donc de $\dot{z}$. Pour chaque valeur de z, on peut donc obtenir les valeurs de $\dot{z}$. Le graphe n'étant pas à l'échelle, l'allure est qualitative.

(e) On peut développer la force autour de $z = z_1$ assimilant $\mathrm{F}(z)$ à sa tangente. En effet,

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z_1 + x) \approx \mathrm{F}(z_1) + x\,\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z}(z_1)$$

La relation fondamentale s'applique pour donner

$$m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(z_1 + x) = m\,\ddot{x} = -mg + \mathrm{F}(z) \approx \mathrm{F}(z_1) - mg + x\,\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z}(z_1)$$

z_1 étant position d'équilibre, $\mathrm{F}(z_1) = mg$ et on a déjà calculé $\dfrac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z}$, d'où

$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_0}^2\,x = 0 \qquad \text{avec} \qquad {\omega_0}^2 = -\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}z}(z_1) = \frac{q\mathrm{Q}}{m\,4\pi\,\varepsilon_\mathrm{O}}\,\frac{1}{(\mathrm{R}^2 + {z_1}^2)^{3/2}}\left(\frac{2\,{z_1}^2 - \mathrm{R}^2}{\mathrm{R}^2 + {z_1}^2}\right)}$$

18. Oscillateur isochrone***

1. Partie cours, facile

(a) Les positions d'équilibres sont les endroits où la dérivée *spatiale* de l'énergie potentielle s'annule. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}x} = m\omega^2\left(x - \frac{a^4}{x^3}\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x = a}$$

seule solution positive à l'équation $x^4 = a^4$.

(b) Calculer la période des petites oscillations revient à approximer l'énergie potentielle par une parabole. Il faut donc calculer la dérivée seconde de l'énergie potentielle au niveau de la position d'équilibre $x = a$. On a ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E_p}}{\mathrm{d}x^2} = m\omega^2\left(1 + 3\frac{a^4}{x^4}\right) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E_p}}{\mathrm{d}x^2}(x = a) = 4m\omega^2$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} \mathrm{E_p}(x) &\approx \mathrm{E_p}(a) + \frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}x}(a)\,(x-a) + \frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{d}x^2}(a)\frac{(x-a)^2}{2} \\ &= m\omega^2\,a^2 + 0 + 4m\omega^2\,\frac{(x-a)^2}{2} \\ \mathrm{E_p}(a+\varepsilon) &\approx m\omega^2\,a^2 + 4m\omega^2\,\frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

En fonction de l'écart $\varepsilon = x - a$ à la position d'équilibre, l'énergie mécanique s'écrit, puisque $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}(\varepsilon + a)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \dot{\varepsilon}$,

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\dot{\varepsilon}^2 + m\omega^2\,a^2 + 4m\omega^2\,\frac{\varepsilon^2}{2}$$

Le système étant conservatif (puisque soumis à seulement une force associée à une énergie potentielle), l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement donc sa dérivée *temporelle* est nulle. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{dE_m}}{\mathrm{d}t} = m\,\dot{\varepsilon}\,\frac{\mathrm{d}\dot{\varepsilon}}{\mathrm{d}t} + 4m\omega^2\,\varepsilon\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = 0$$

En simplifiant par $\dot{\varepsilon}$ puisque l'on cherche des solutions « qui bougent » donc ne restent pas à vitesse nulle, il vient

$$\ddot{\varepsilon} + 4\omega^2\,\varepsilon = 0$$

où l'on reconnaît un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = 2\omega$ et donc de période

$$\boxed{\mathrm{T_0} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}}$$

2. Partie un peu [2] plus ardue

   (a) La courbe en énergie potentielle diverge à la fois en 0 et en l'infini, de sorte que tout mouvement d'énergie mécanique donnée est nécessairement lié, onc périodique.

   (b) Posons x_1 et x_2 les deux bornes (gauche et droite, soit $x_1 < x_2$) du mouvement, c'est-à-dire telles que $\mathrm{E_m} = \mathrm{E_p}(x_1) = \mathrm{E_p}(x_2)$. En écrivant l'énergie mécanique à un instant t quelconque, on a

$$\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 + \mathrm{E_p}(x) = \mathrm{E_m} = \mathrm{E_p}(x_1) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\,(\mathrm{E_p}(x_1) - \mathrm{E_p}(x))}}$$

   (c) Comme $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, on a bien $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\dot{x}$. Or, aller de x_1 à x_2 correspond exactement à une demi-période (puisque l'on va passer dans les mêmes états de vitesse en sens inverse pour les mêmes positions au retour en parcourant toute la courbe en énergie potentielle). Ainsi, on doit avoir

$$\boxed{\frac{\mathrm{T}}{2} = \int_0^{\mathrm{T}/2} \mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\,(\mathrm{E_p}(x_1) - \mathrm{E_p}(x))}}}$$

   (d) C'est là que les choses astucieuses commencent... Il va falloir faire intervenir une intégrale de 0 à 1. Voyons voir ce qui découle de l'expression des énergies potentielles et si l'on peut se débrouiller pour introduire une variable v qui soit nulle lorsque $x = x_1$ (on bidouillera pour qu'elle vaille 1 en $x = x_2$ plus tard).

2. C'est un œphémisme...

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\omega^2\left({x_1}^2 - x^2 + a^4\left(\dfrac{1}{{x_1}^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)}}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\omega^2\left(x^2-{x_1}^2\right)\left(-1+\dfrac{a^4}{{x_1}^2x^2}\right)}}$$

On voit déjà apparaître une tendance. Posons $v = x^2 - {x_1}^2$ qui a le bon goût de s'annuler en $x = x_1$. On a alors $\mathrm{d}v = 2\,x\,\mathrm{d}x$ et donc

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = \int_0^{{x_2}^2-{x_1}^2}\frac{\mathrm{d}v}{2x}\times\frac{1}{\sqrt{\omega^2 v\left(-1+\dfrac{a^4}{{x_1}^2x^2}\right)}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{{x_2}^2-{x_1}^2}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\omega^2 v\left(-x^2+\dfrac{a^4}{{x_1}^2}\right)}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{{x_2}^2-{x_1}^2}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\omega^2 v\left(\dfrac{a^4}{{x_1}^2}-{x_1}^2-v\right)}}$$

Ça commence à ressembler à quelque chose... Visiblement, pour que cela fonctionne, il faudrait poser

$$u = \frac{v}{{x_2}^2-{x_1}^2} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}v = \left({x_2}^2-{x_1}^2\right)\,\mathrm{d}u$$

histoire que l'intégrale aille bien de 0 à 1. Il faudrait en outre réussir à introduire x_2 de force en se débarrassant de a, ce que l'on peut faire en remarquant que l'égalité $\mathrm{E_p}(x_1) = \mathrm{E_p}(x_2)$ (seul lien connu entre x_1 et x_2) induit

$${x_1}^2 + \frac{a^4}{{x_1}^2} = {x_2}^2 + \frac{a^4}{{x_2}^2} \qquad \text{soit} \qquad {x_2}^2-{x_1}^2 = \frac{a^4}{{x_1}^2\,{x_2}^2}\left({x_2}^2-{x_1}^2\right)$$

ou encore

$$a^4 = {x_1}^2\,{x_2}^2$$

Ça tombe bien ! On a alors

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}} = \frac{1}{2}\int_0^{{x_2}^2-{x_1}^2}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\omega^2 v\left({x_2}^2-{x_1}^2-v\right)}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left({x_2}^2-{x_1}^2\right)\mathrm{d}u}{\sqrt{\omega^2\left({x_2}^2-{x_1}^2\right)u\left({x_2}^2-{x_1}^2-\left({x_2}^2-{x_1}^2\right)u\right)}}$$
$$\frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{1}{2\omega}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u\,(1-u)}}$$

Il vient donc que, pour toute énergie mécanique de départ, donc pour n'importe quelle trajectoire de phase, la période des oscillations est la même et vaut

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{1}{\omega}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u\,(1-u)}} = \frac{\pi}{\omega}}$$

c'est-à-dire bien ce que l'on a trouvé dans l'hypothèse des petites oscillations, ce qui est plutôt rassurant !

19. Oscillateur de Landau*** None available

♫