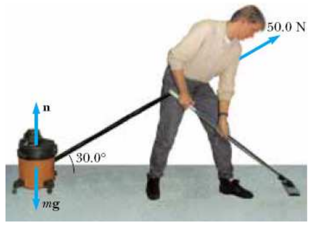
Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

1. Application directe du cours On considère un point M de masse m astreint à se déplacer selon l'axe (Ox). Il est soumis à une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$. Dire dans chaque cas si $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est conservative ou non, établir le cas échéant l'expression de son énergie potentielle. Donner le travail de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ entre les points A (x_A = 1,00 m) et B (x_B = 3,00 m) en passant par le point C (x_C = 4,00 m).

1. $\overrightarrow{\mathrm{F}} = -k\,x^3\,\overrightarrow{e_x}$ avec $k = 10{,}0$ N.m^{-3} ;
2. $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \varepsilon\,\mathrm{F}_0\,\overrightarrow{e_x}$ avec $\mathrm{F}_0 = 10{,}0$ N et $\varepsilon = +1$ (respectivement $\varepsilon = -1$) si M se déplace selon le sens des x croissants (respectivement décroissants).



2. Mister Clean Quelle est la puissance développée par cette personne qui passe l'aspirateur lors d'un mouvement à une vitesse de 30 cm.s^{-1} ? Les forces indiquées vous semblent-elles correctes ? Calculez le travail de toutes les forces pour un déplacement horizontal de 4 m.

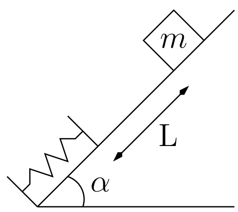
3. Curling Le curling, sport de glace, consiste à lancer un palet de masse m = 10,0 kg sur une piste verglacée pour qu'il s'arrête au plus près du centre d'une cible située à L = 20,0 m du point de départ. Le palet subit une force de frottement proportionnelle à son poids. Le coefficient de frottement est $\mu = 1{,}02.10^{-2}$.

1. Calculer le travail de la force de frottement pour une distance x parcourue.
2. Déterminer la vitesse initiale à donner pour qu'il s'arrête au centre de la cible.

4. Voiture montant une pente La pente fait un angle α avec l'horizontale. La force de résistance qui s'exerce sur la voiture colinéairement à sa vitesse est égale à $\mathrm{F} = 2800 + 0{,}70\,v^2$ (vitesse exprimée en mètre par seconde). Quelle est la puissance développée par le moteur lorsque la voiture monte à la vitesse v ?

5. Trampoline* On abandonne sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan matériel lisse incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le cube glisse (sans frottement) sur la ligne de plus grande pente sur une distance L avant de rencontrer un butoir solidaire d'un long ressort (idéal) de raideur k, disposé comme l'indique le schéma ci-contre.

Les masses du ressort et du butoir sont négligeables. On admettra que cela implique la continuité de la vitesse du cube lors du choc. On modélisera le cube par un point matériel.



1. Déterminer la longueur maximale dont le ressort est comprimé.
2. En quel point la vitesse du cube est-elle maximale ?

6. Frottement fluide et mouvement circulaire* Un véhicule, assimilé à un point matériel M, est en mouvement circulaire de rayon r et de vitesse v (maintenue constante) à partir d'un point A. La force de frottement fluide, agissant sur le véhicule, est du type $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Déterminer le travail W de la force f lorsque le point matériel passe en B (point diamétralement opposé à A) après n tours complets (W sera exprimé en fonction de α, r, v et n). Commenter le résultat obtenu.

7. Flipper* Une balle de flipper de masse 100 g est lancée sur un plan incliné d'un angle α au moyen d'un ressort de constante de raideur k = 1,3 N.cm^{-1}. La compression du ressort est de 5,0 cm. Calculez la vitesse maximale de la balle et l'altitude maximale atteinte.

8. Étude d'un satellite* Un satellite, assimilé à un point matériel M de masse $m = 1{,}0.10^3$ kg, est en orbite circulaire de rayon r_1 autour de la Terre. On rappelle qu'à une distance r du centre de la Terre, un satellite subit une force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \dfrac{-\mathscr{G}\mathrm{M_T}m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$. On suppose que le référentiel géocentrique $(\mathrm{O};\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ est galiléen.

1. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, calculer la vitesse v_1 (respectivement v_2) que doit posséder le satellite pour être sur l'orbite circulaire de rayon r_1 (respectivement r_2).
2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ (on prendra la référence d'énergie potentielle à l'infini).
3. Calculer la valeur de l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite de rayon r_1, puis sur celle de rayon r_2.
4. Calculer la variation d'énergie mécanique entre les deux orbites de rayon r_1 et r_2. Que devra-t-on faire si l'on veut transférer le satellite sur l'orbite la plus haute ?

Données : $\mathscr{G} = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}, $r_1 = 6500$ km, $r_2 = 42\,000$ km, $\mathrm{M_T} = 5{,}97.10^{24}$ kg.

9. Oscillations longitudinales avec deux ressorts* Un mobile autoporteur peut effectuer un mouvement de translation suivant un axe Ox horizontal sous l'action de deux ressorts identiques (k,ℓ_0) placés le long de l'axe Ox.

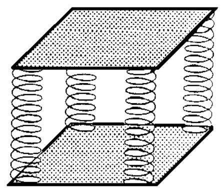
1. Exprimer à un instant quelconque, la résultante des forces qui s'exercent sur le mobile.
2. Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait le mobile ?
3. Trouver la période des oscillations longitudinales.
4. Retrouver l'équation différentielle en écrivant la conservation de l'énergie de l'oscillateur.

10. Tir parabolique** Un point matériel M de masse m est lancé depuis O, origine d'un référentiel galiléen, à l'instant initial avec une vitesse v_0 appartenant au plan vertical xOz et faisant l'angle α avec Ox (droite horizontale). Dans la région d'espace considérée, le champ de pesanteur peut être considéré comme uniforme : $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$. On néglige tout frottement.

1. Exprimer v^2 en fonction de ${v_0}^2$ et de z.
2. En déduire l'altitude maximale que peut atteindre le projectile en fonction de la valeur de α choisie.

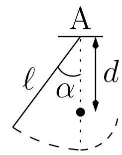
11. Trampoline** On modélise dans cette partie «idéale» le trampoline par un ressort simple de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On néglige la masse du ressort et tout frottement.

1. Si l'on modélisait le trampoline par une plaque portée par quatre ressorts identiques de raideur k_1 et de longueur à vide ℓ_0 (cf. figure), déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent à l'ensemble des quatre ressorts. Quelles sont les limites de ce modèle par rapport à la réalité ?



2. Saut « rigide » classique.
   À $t = 0$ le gymnaste (de masse $m = 60$ kg) est à une hauteur de $h = 1{,}5$ m au-dessus du trampoline avec une vitesse nulle.
   (a) Quelle est sa vitesse lorsqu'il retouche le trampoline ? A.N.
   (b) Il s'enfonce (de manière raide) de $\delta = 75$ cm dans le trampoline. Déterminer la constante de raideur équivalente k du trampoline. Préciser le système étudié.
   (c) Une astuce pour augmenter la hauteur du saut est de demander à un camarade de descendre le milieu du trampoline d'une profondeur p (en tirant par exemple à l'aide d'une corde du dessous du trampoline avec une force constante F) avant l'arrivée du gymnaste. Puis le camarade garde la force F constante et lâche la corde au moment où le gymnaste est au point le plus bas. Déterminer numériquement la hauteur qu'il gagne en plus si $p = 20$ cm.

12. Un pendule qui s'enroule** Un point M de masse m est suspendu à un point fixe A par un fil de longueur ℓ constituant ainsi un pendule. On abandonne ce pendule sans vitesse initiale, le fil faisant avec la verticale un angle α. Une tige fixe est placée à l'aplomb du point A à la distance $d < \ell$, de sorte que le fil heurte cette tige lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre.



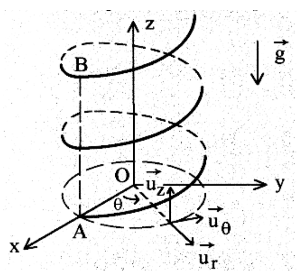
1. Montrer que la vitesse de M se conserve au cours du choc.
2. En prenant $\alpha = \pi/2$, déterminer la condition pour que le fil s'enroule autour de la tige en restant tendu.

13. Looping** Certaines voitures miniatures à friction ou bien électriques, peuvent réaliser de magnifiques loopings ou au contraire, manquant de vitesse, tomber lourdement sur le sol. Le but de cet exercice est d'étudier les conditions portant sur la vitesse initiale de la voiture avant d'amorcer le looping pour que celui-ci réussisse. On modélise la voiture par un point matériel M de masse m qui peut se déplacer sans frottement dans la rainure d'un cerceau vertical et immobile, de centre C et de rayon R. La voiture arrive à l'entrée du cerceau, au point O, avec une vitesse v_0 horizontale. On repère la voiture à l'intérieur du cerceau par l'angle $\theta = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CM})$ et on note $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur terrestre ($g = 10$ m.s^{-2}).

1. Exprimer la réaction $\overrightarrow{N}$ du cerceau (telle que $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e_r}$) en fonction de θ et des conditions initiales (mais pas en fonction de $\dot{\theta}$).
2. Étude des différents mouvements possibles de la voiture.
   (a) Pour quel angle θ_1, la voiture s'arrête-t-elle le long du cerceau (on se contentera d'expliciter $\cos\theta_1$) ? À quelle condition sur v_0 cet angle existe-t-il ?
   (b) Pour quel angle θ_2, la voiture quitte-t-elle le cerceau (on se contentera d'expliciter $\cos\theta_2$) ? À quelle condition sur v_0 cet angle existe-t-il ?
   (c) En déduire quantitativement les différents mouvements possibles de la voiture (on distinguera plusieurs cas suivant la valeur de v_0).
3. Application numérique : Si R = 10 cm et $g = 10$ m.s^{-2}, quelle vitesse minimale faut- il fournir à la voiture pour qu'elle fasse un looping ?
4. Retrouve-t-on les valeurs utilisées dans la vidéo YouTube « Fifth Gear Loop the Loop » pour une vraie voiture et un diamètre de 40 pieds ?

14. Perle sur helice** On enfile une perle de masse m sur un fil métallique matérialisant une hélice circulaire d'axe (Oz) vertical ascendant et d'équation

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = p\theta \qquad \text{avec} \qquad p > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

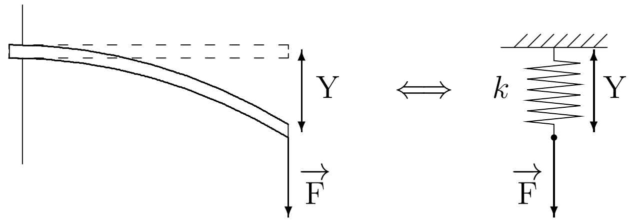


On suppose que les frottements sont négligeables. On abandonne la perle sans vitesse initiale du point de cote $z = p\theta_0$.

1. En appliquant un théorème énergétique, trouver une équation différentielle liant θ et $\dot{\theta}^2$
2. Résoudre cette équation et exprimer $\theta(t)$.

15. Modèle d'élasticité d'une fibre de verre** Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500$ kg.m^{-3}.

La fibre de verre de longueur ℓ et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale $\vec{F}$ (on supposera que la force $\vec{F}$ reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche.



La flèche Y est donnée en valeur absolue par la relation suivante (on notera la présence du facteur 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité)

$$|\mathrm{Y}| = \left|\frac{7\,\ell^3\,\mathrm{F}}{\mathrm{E}\,d^4}\right|$$

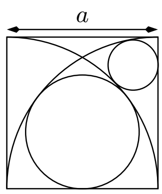
où E est le module d'Young du verre : $\mathrm{E} = 7.10^{10}$ SI.

1. Quelle est l'unité SI du module d'Young E ?
2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et ℓ.
3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $\ell = 7$ mm et de diamètre $d = 10$ µm.
4. Démontrer l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur k, lorsque sa longueur est ℓ. En reprenant l'analogie du ressort, quelle est alors l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre lorsque la flèche vaut Y ? On donnera la relation en fonction de E, d et ℓ.

Qui n'a pas fait l'expérience suivante ? Faire vibrer une règle ou une tige lorsque une des ses extrémités est bloquée. On cherche ici à déterminer les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. La flèche de la tige vaut $\mathrm{Y}(t)$ à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la tige, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression

$$\mathrm{E_c} = \rho\,\ell\,d^2\left(\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

5. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant la pesanteur.
6. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la tige
7. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E, de longueur ℓ et de diamètre d ?
8. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et de diamètre 10 µm.



R/a et r/a ?