Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

1. Application directe du cours None available

2. Mister Clean None available

3. Curling None available

4. Voiture montant une pente None available

5. Trampoline* None available

6. Frottement fluide et mouvement circulaire* None available

7. Flipper* Le lancé de la balle de masse m dans le référentiel du flipper (galiléen en supposant que personne ne tape dedans) se fait en deux phases :

— Une phase en contact avec le ressort où trois forces s'exercent (poids $\overrightarrow{P}$, réaction normale $\overrightarrow{N}$ et tension $\overrightarrow{T}$ du ressort) dont seulement deux travaillent, chacune étant associée à une énergie potentielle.

— Une phase de « vol » où le contact avec le ressort n'existe plus et où seulement deux forces s'exercent (poids et réaction normale), seul le poids travaillant.

Les forces s'exerçant dans ces deux phases étant conservatives, l'énergie mécanique y est à chaque fois conservée. En outre, le passage d'une phase à l'autre se fait quand la tension du ressort voudrait changer de sens (la bille n'étant pas scotchée au ressort, elle se contente de continuer son chemin sans plus s'occuper du ressort), c'est-à-dire quand l'énergie potentielle élastique qu'il contenait s'est entièrement transformé en énergie cinétique. On peut donc affirmer que l'énergie mécanique est identique sur les deux phases et écrire le bilan d'énergie entre le moment initial (compression maximale du ressort X_{max}, $z = 0$ et $v = 0$) et l'apogée de l'altitude (le ressort n'intervient plus, $z = z_{max}$ et on supposera $v = 0$, c'est-à-dire que le lancé est bien rectiligne et ne se déporte pas sur le côté comme les vrais flippers). Ainsi,

$$\frac{1}{2}\,kX_{max}^2 = mgz_{max} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z_{max} = \frac{kX_{max}^2}{2mg} = 17\ \text{cm}}$$

Le calcul de la vitesse maximale est un peu plus « sioux », d'autant que l'énoncé est incomplet, ne donnant pas la valeur de α... La question à se poser est : quand donc la vitesse est maximale. Réponse : puisque le mouvement est rectiligne, le maximum de vitesse est obtenu quand l'accélération s'annule (sur une ligne, l'aspect vectoriel n'a plus d'importance), c'est-à-dire quand l'allongement X du ressort est tel que $-kX_{v_{max}} = mg\sin\alpha$ (il est normal qu'il soit négatif, puisque le ressort est comprimé avant éjection de la balle). Redéfinissons le zéro des altitudes au poins où le ressort est à vide et l'axe des X selon le plan incliné. Ainsi, $z = X\sin\alpha$. Du coup, la conservation de l'énergie mécanique de $t = 0$ jusqu'au maximum de vitesse s'écrit (où l'on note $X_{max} = +5{,}0$ cm)

$$\frac{1}{2}\,kX_{max}^2 - mgX_{max}\sin\alpha = \frac{1}{2}\,mv_{max}^2 + \frac{1}{2}\,kX_{v_{max}}^2 + mgX_{v_{max}}\sin\alpha$$

En remplaçant $X_{v_{max}}$ par $-(mg\sin\alpha)/k$, il vient

$$\frac{1}{2}\,kX_{max}^2 - mgX_{max}\sin\alpha = \frac{1}{2}\,mv_{max}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{(mg\sin\alpha)^2}{k} - \frac{(mg\sin\alpha)^2}{k} = \frac{1}{2}\,mv_{max}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{(mg\sin\alpha)^2}{k}$$

Il vient donc $$\boxed{v = \sqrt{\frac{k}{m}\mathrm{X}_{\max}^2 + g\sin\alpha\left(\frac{mg\sin\alpha}{k} - \mathrm{X}_{\max}\right)}}$$

Vérifions sur quelques cas particuliers la cohérence de ce résultat :

— Quand $\alpha = 0$, le plan est horizontal et le poids ne travaille pas. Toute l'énergie stockée dans le ressort se retrouve donc sous forme d'énergie cinétique (qui ne diminue d'ailleurs pas, ce qui empêche d'atteindre $z_{\max}$ en pratique).

— Quand $\alpha = \pi/2$, le lancer est vertical et une partie de l'énergie élastique doit se muer en énergie potentielle de pesanteur (qui est donc d'autant en moins pour mettre dans l'énergie cinétique).

En faisant les application numériques pour différents angles (0°, 15° [1] et 90°), on obtient

$$\boxed{v_{\max} = \begin{cases} 1{,}803\ \mathrm{m.s^{-1}} & \text{si } \alpha = 0° \\ 1{,}769\ \mathrm{m.s^{-1}} & \text{si } \alpha = 15° \\ 1{,}683\ \mathrm{m.s^{-1}} & \text{si } \alpha = 90° \end{cases}}$$

Notons néanmoins que les trois valeurs sont presques identiques aux 2 chiffres significatifs fournis par l'énoncé... Vu que l'inclinaison du flipper n'est pas très importante, on aurait pu approximé que toute l'énergie élastique se retrouvait sous forme d'énergie cinétique et donc que $v_{\max} \approx \mathrm{X}_{\max}\sqrt{k/m}$

8. Étude d'un satellite* None available

9. Oscillations longitudinales avec deux ressorts* None available

10. Tir parabolique** None available

11. Trampoline** None available

12. Un pendule qui s'enroule** None available

13. Looping** None available

14. Perle sur helice**

1. Dans le référentiel du labo (galiléen), la perle n'est soumise qu'au poids (tel que $\mathrm{E_p} = mgz$) et à la réaction normale (qui ne travaille pas car perpendiculaire au fil donc au mouvement). Ainsi, l'application du théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initiale ($v(0) = 0$ et $z(0) = p\theta_0$) et un instant t ($v(t)$, $z(t) = p\theta(t)$) donne

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 - 0 = \Delta\mathrm{E_c} = -\Delta\mathrm{E_p} = -mgp\,(\theta(t) - \theta_0)$$

Reste à exprimer $v(t)$ en fonction de $\dot\theta$. On a que $\dot x = -\mathrm{R}\dot\theta\sin\theta$, $\dot y = \mathrm{R}\dot\theta\cos\theta$ et $\dot z = p\dot\theta$. D'où

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = \mathrm{R}^2\dot\theta^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + p^2\dot\theta^2 = \left(\mathrm{R}^2 + p^2\right)\dot\theta^2$$

(On aurait aussi pu directement se placer en coordonnées cylindriques pour obtenir le même résultat.)

Finalement, $$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\mathrm{R}^2 + p^2\right)\dot\theta^2 = -mgp\,(\theta - \theta_0)}$$

1. Valeur vraisemblable pour un flipper

2. Faisons une résolution par séparation des variable. Comme la bille descend, on a qu'à tout instant $\theta(t) \leqslant \theta_0$ et $\dot{\theta} < 0$, soit

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2gp\,(\theta_0 - \theta)}{R^2 + p^2}}$$

Ainsi,
$$\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0 - \theta}} = -\sqrt{\frac{2gp}{R^2 + p^2}} \times dt$$

Or, $1/\sqrt{\theta_0 - \theta}$ n'est rien d'autre que $(\theta_0 - \theta)^{-1/2}$ dont une primitive est tout simplement $-2\,(\theta_0 - \theta)^{1/2}$. En intégrant l'équation précédente à gauche de $\theta(0) = \theta_0$ jusqu'à $\theta(t)$ et à droite de $t = 0$ à t, il vient

$$-2\sqrt{\theta_0 - \theta} = \left[-2\sqrt{\theta_0 - \theta}\right]_{\theta_0}^{\theta} = \left[-\sqrt{\frac{2gp}{R^2 + p^2}} \times t\right]_0^t = -\sqrt{\frac{2gp}{R^2 + p^2}} \times t$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 - \frac{gp}{R^2 + p^2}\,\frac{t^2}{2}}$$

Il eût en fait été plus simple de dériver la relation trouvée dans la question précédente (qui n'est rien d'autre que l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique) pour obtenir

$$m\left(R^2 + p^2\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgp\dot{\theta} \qquad \text{soit} \qquad \ddot{\theta} = -\frac{gp}{R^2 + p^2}$$

dont la double intégration avec les conditions initiales $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$ mène au même résultat.

15. Modèle d'élasticité d'une fibre de verre**

1. La formule de l'énoncé nous permet de dire que le module d'Young est homogène à

$$[E] = \left[\frac{7\ell^3 F}{Y d^4}\right] = \frac{L^3}{L \times L^4}\,M.L.T^{-2} = M.L^{-1}.T^{-2}$$

$\boxed{\text{En unités du système internationnal, le module d'Young E s'exprime en kg.m}^{-1}\text{.s}^{-2}.}$

2. La tige est à l'équilibre par application de la force $\overrightarrow{F}$ constante. Elle oppose donc une tension $\overrightarrow{T}$ telle que $\overrightarrow{T} = -\overrightarrow{F}$, d'où, en orientant $\overrightarrow{u_y}$ vers le bas,

$$\boxed{\overrightarrow{T} = -\frac{E\,d^4}{7\ell^3}\,Y\overrightarrow{u_y} = -kY\overrightarrow{u_y} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{E\,d^4}{7\ell^3}}$$

On peut bien modéliser la tension de la tige comme l'action d'un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k.

3. *Application numérique* : $\boxed{k = 2{,}9.10^{-4}\ \text{N.m}^{-1}}$

C'est bien la **réponse de la tige** à la force extérieure qu'il faut modéliser par un ressort et non la force elle-même. Il faut donc faire le bilan des forces s'exerçant à l'extrémité de la fibre (ici $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{T}$) et traduire l'équilibre par la relation vectorielle $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ où l'on connaît la norme de la force qu'il faut appliquer pour obtenir l'équilibre pour une flèche Y donnée.

4. Par définition, le travail d'une force $\overrightarrow{T}$ s'écrit $\delta W = \overrightarrow{T} \cdot d\overrightarrow{OM}$, où, en polaire,

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Ici, $\overrightarrow{T} = -k\ell\,\overrightarrow{e_r}$ et $r = \ell$, d'où

$$\delta W = -kr\,dr = -d\left(\frac{kr^2}{2}\right) = -d(E_{pe}) \qquad \text{ainsi} \qquad \boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}\,k\ell^2}$$

Avec l'expression de k trouvée précédemment pour la tige, on obtient

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}\,\frac{E\,d^4\,Y^2}{7\,\ell^3}}$$

5. On a $$\boxed{E_m = E_c + E_{pe} = \rho\,\ell\,d^2\,\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{E\,d^4\,Y^2}{7\,\ell^3}}$$

6. La seule force en présence (la tension $\overrightarrow{T}$ de la fibre) étant une force conservative, la conservation de l'énergie mécanique perme d'obtenir, après dérivation par rapport au temps et simplification par $\rho\,\ell\,d^2\,\dot{Y}$ que

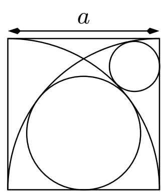
$$\boxed{\ddot{Y} + \frac{E\,d^2}{14\,\rho\,\ell^4}\,Y = 0}$$

> Ici la fibre est livrée à elle-même : l'opérateur extérieur ne fait que la mettre hors-équilibre puis lâche le système sans y exercer d'autre force.

7. La fréquence propre f_0 s'obtient à partir de la pulsation propre ω_0 via

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E\,d^2}{14\,\rho\,\ell^4}}}$$

8. *Application numérique*: $\boxed{f_0 = 46\ \text{Hz}}$



R/a et r/a ?