Relation fondamentale de la dynamique

1. Hamac Vous voulez vous reposer dans un hamac dont les cordelettes d'attache sont usées. Si vous ne voulez pas risquer qu'elles cassent durant votre sieste, vaut-il mieux attacher le hamac de façon à ce qu'il soit presque horizontal ou le laisser pendre ?

2. Distance de freinage Une voiture, lancée avec une vitesse initiale v_0, freine soudainement en bloquant ses roues [1] sur une route horizontale de coefficient de frottement f.

1. Vous imaginez bien ce qui est en train de se passer, n'est-il pas ?
2. Faire le bilan des forces appliquées à la voiture.
3. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la voiture, dans le référentiel lié à la route. En déduire la distance D de freinage.
4. Calculer la distance de freinage lorsque $v_0 = 40$ m.s^{-1} ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $f = 0{,}60$ (route sèche) puis $f = 0{,}20$ (route mouillée). Conclusion ?

3. Freinage en pente Une automobile de masse M = 1 tonne descend une pente de 3% à 90 km/h. Quelle force de freinage faut-il exercer pour que la voiture s'arrête sur une distance de 100 m ? Nous supposerons que la force de frottement est constante tout au long du freinage.

4. Un peu plus a l'ouest* Le professeur Tournesol s'amuse à imprimer à son pendule un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe Oz tel que l'angle θ avec la verticale reste constant.

1. Imaginez le système en mouvement : quelle est la trajectoire de la bille de masse m au bout du pendule (de longueur ℓ) ?
2. En déduire l'accélération ressentie par la bille.
3. Quelle doit être la vitesse de rotation ω imprimée au pendule pour conserver cet état d'équilibre ?

5. Panne d'essence* Étant quelque peu tête en l'air, le professeur Tournesol a oublié d'effectuer le plein d'essence alors qu'il roule en ligne droite sur l'autoroute à $v_0 = 120$ km.h^{-1} avec sa voiture de masse totale $m = 10^3$ kg. Le moteur s'arrête donc de fonctionner et la voiture n'est plus soumise qu'à une force de frottement frontal

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\rho \mathrm{S} \mathrm{C_X} v^2$$

avec v la vitesse instantanée de la voiture, S = 3 m^2, $\mathrm{C_X} = 0{,}31$ et $\rho = 1{,}3$ kg.m^{-3}.

1. Qu'advient-il de la force de frottement quand la vitesse de la voiture décroît ? Arrivera-t-elle *a priori* à arrêter la voiture en un temps fini ?
2. Déterminer l'équation du mouvement en fonction du temps t à partir de la panne.
3. Combien de temps met-elle pour passer de 120 km.h^{-1} à 60 km.h^{-1} ?
4. Combien de temps met-elle pour s'arrêter ? Conclusion ?

6. Vol d'avion humanitaire* Un avion humanitaire vole à la vitesse $v_0 = 750$ km/h et sa trajectoire est inclinée vers le bas de $\alpha = 10°$. À une altitude $h = 6000$ m, il laisse tomber un colis de masse m en passant à la verticale d'un point A. $g = 9{,}81$ m.s^{-2}

1. Déterminer le temps nécessaire pour que le colis atteigne le sol.
2. Quelle est la distance parcourue par l'avion pendant ce temps ?
3. À quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il arrive sur le sol ?

1. C'est un ancien modèle, point encore de système ABS.

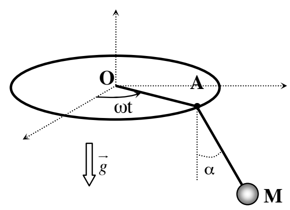
7. Tir dans le vide* Un canon éjecte ses obus avec une vitesse $v = 200$ m.s^{-1}. On suppose la pesanteur uniforme ; on néglige la résistance de l'air et la rotation de la Terre.

1. Calculer la distance horizontale maximale x_{m} entre le canon et l'objectif pour qu'il soit possible d'atteindre un objectif situé au sommet d'une montagne de hauteur $h = 1000$ m (faire un dessin !).
2. On se place à une distance $x_{\mathrm{m}}/2$. Calculer les valeurs que peut prendre l'angle du canon avec l'horizontale pour que l'objectif soit atteint.
3. Calculer la vitesse de l'obus au moment où il touche l'objectif.

8. Question pour un(e) champion(ne)* Vous jetez un objet en l'air, à la verticale. Il atteint le sommet de sa trajectoire à l'altitude h au bout d'un temps t. Vous recommencez la même expérience dans le vide. Cette fois, puisqu'il n'y a plus de frottement, il va plus haut en un temps t'. Lequel est le plus grand de t ou de t' ?

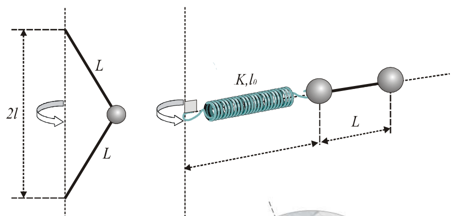
9. Monté sur ressort (horizontalement)* Un oscillateur mécanique est constitué d'un mobile autoporteur de masse $m = 760$ g, maintenu sur un banc à coussin d'air horizontal par deux ressorts identiques, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur $k = 8{,}30$ N.m^{-1}. À l'équilibre, les ressorts ne sont pas tendus. On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au banc à coussin d'air. À $t = 0$, le mobile est écarté de la distance a par rapport à sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale. Il se déplace selon un mouvement rectiligne. Sa position est repérée par son abscisse x mesurée par rapport à sa position d'équilibre.

1. Faire un dessin. Intuitivement, quelle sera l'évolution du mobile s'il est écarté de l'équilibre ?
2. Établir l'expression des forces de rappel élastiques qui s'appliquent au mobile en fonction de x.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au mobile et en déduire l'équation différentielle satisfaite par x.
4. Donner l'expression de x en fonction du temps. Exprimer et calculer la pulsation Ω, et la période T des oscillations du mobile. Applications numériques.

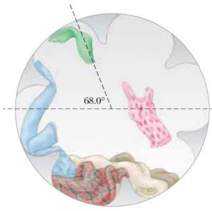


10. Fête foraine* Un manège est constitué de nacelles suspendues par des cables. On modélise une nacelle par un point matériel M de masse m et le dispositif de suspension par un fil inextensible de longueur ℓ. On constate que lorsque le manège tourne depuis longtemps à vitesse angulaire constante ω, le fil de suspension de la nacelle fait un angle α constant par rapport à la verticale (dans le plan vertical contenant l'axe Oz et le point d'accrochage A). On note $a =$ OA.

1. Déterminer la relation liant α, ω, ℓ, a et g.
2. Application numérique : déterminer la vitesse angulaire ω pour laquelle on obtient $\alpha = \pi/4$. On donne $a = 3{,}0$ m, $\ell = 2{,}0$ m et $g = 10$ m.s^{-2}.

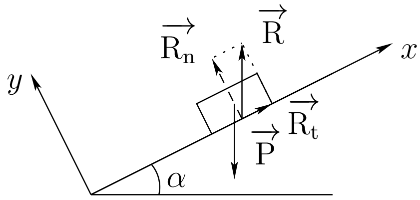


11. Régimes sans sel* Déterminez dans les deux cas ci-contre la ou les tensions des fils dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire et uniforme des mobiles à la vitesse angulaire ω constante.



12. Sèche-linge* Dans un sèche linge, le linge se trouve dans un cylindre en rotation autour d'un axe horizontal. La vitesse de rotation est choisie de telle sorte qu'un petit vêtement va commencer à tomber lorsque l'angle vaut 68°. Quelle est cette vitesse de rotation ?

13. Coefficient de frottement du verre*



On se propose de mesurer le coefficient de frottement du verre sur le verre, noté μ. Pour cela, on dispose d'une grande vitre plane et d'un petit morceau de verre parallélépipédique de masse m. On pose le petit morceau de verre sur la vitre initialement horizontale et on incline doucement la vitre. On notera α l'angle que fait la vitre avec l'horizontale.

Le coefficient de frottement μ est défini comme suit : tant que le morceau de verre ne glisse pas sur la vitre, la norme de la composante tangentielle de la réaction du support est inférieure à μ fois la norme de la composante normale de la réaction

$$\|\overrightarrow{R_t}\| \leqslant \mu \|\overrightarrow{R_n}\|$$

1. En supposant que le petit morceau de verre soit immobile, exprimer les composantes normale et tangentielle de la réaction en fonction de la masse m du petit morceau de verre, de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.
2. En déduire une condition sur l'angle α et sur le coefficient de frottement μ pour que le petit morceau de verre ne glisse pas.
3. Expérimentalement, on remarque que pour $\alpha \geqslant 35°$, le petit morceau de verre se met à glisser. En déduire la valeur de μ.

14. Traction d'un cube sur une table horizontale* Un cube de masse m est placé sur une table plane horizontale. La vitesse initiale du mobile vaut $v(0) = v_0 \overrightarrow{e_x}$ avec $v_0 > 0$. Un opérateur exerce une force sur cet objet via un fil tendu en maintenant constante la tension $\overrightarrow{T}$ du fil de norme $\|\overrightarrow{T}\| = T$. Le mobile subit une force de frottement fluide du type $\overrightarrow{F_{fr}} = -h\overrightarrow{v}$. Considérons d'abord le cas où il n'y a pas de frottements solides au niveau de la surface de contact du mobile avec le sol.

1. Faire un schéma en faisant figurer le diverses forces.
2. Montrer que la composante $v_x(t)$ du vecteur $\overrightarrow{v}$ suivant $\overrightarrow{e_x}$ vérifie l'équation différentielle
$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} = \frac{v_{x\infty}}{\tau}$$
3. Donner l'expression de τ et de $v_{x\infty}$.
4. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation différentielle ? En déduire l'expression de $v_x(t)$.
5. Est-il possible de choisir v_0 de telle sorte que le mobile soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme ? On suppose maintenant qu'il existe des frottements solides en plus des frottements fluides.
6. Énoncer les lois de Coulomb pour le frottement solide lorsqu'il y a glissement. On notera μ le coefficient de frottement entre les deux surfaces.
7. Refaire le schéma en précisant la position de la réaction du sol.
8. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $v_x(t)$.
9. Montrer que la prise en compte des frottements solides se traduit par une modification de $v_{x\infty}$.
10. Que se passerait-il si $v_0 = v_x(t=0)$ était négative ?

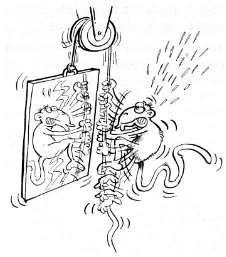
15. En bloc* Deux blocs (masses $2m$ et m), liés entre eux par une corde, sont tirés avec une force horizontale constante F appliquée sur l'un des blocs, sur une surface non rugueuse (pas de frottement). L'accélération des 2 blocs est a. Que vaut la tension T de la corde ? Cela dépend-t-il du bloc que l'on tire ?

16. Chute en v* Une sphère homogéne de rayon a, de masse volumique ρ, est lâchée sans vitesse initiale à partir du point O dans un liquide de masse volumique ρ_L. Le liquide visqueux exerce une force qui se décompose en deux termes :

— la poussée d'Archimède;

— la force de frottement visqueux dite de «Stockes» : $\vec{f} = -6\pi\,\eta\,a\,\vec{v}$ (η se nomme viscosité du fluide).

1. Discuter qualitativement de l'effet sur le mouvement de la poussée d'Archimède seule, puis de la force de frottement seule.
2. Trouver l'équation différentielle permettant de déduire la vitesse de la sphère en fonction du temps.
3. Intégrer cette équation différentielle et montrer que la sphère atteint une vitesse limite verticale (on introduira une constante de temps τ).



17. King-Kong* Une corde inélastique sans masse (« fil idéal») passe par dessus une poulie idéale, pendant symétriquement de chaque côté. À l'une des extrémités est agrippé un singe et à l'autre, en face de lui, est suspendu un miroir de même masse. Effrayé par son image dans le miroir, King-Kong tente d'y échapper. Quel est le mouvement du miroir? Pour trouver la solution, appliquer respectivement la RFD à King-Kong et au miroir.

18. Glissement sur plan incliné** Un solide M supposé ponctuel, de masse m, glisse sur un plan incliné d'un angle α, sans vitesse initiale. On étudie le mouvement du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ $(\mathrm{O};\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ lié au plan incliné.

1. On suppose que le point M glisse sans frottement sur le plan incliné. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Projeter le principe fondamental de la dynamique suivant $\vec{e_x}$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse $\vec{v}$ du solide. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ et de la position $x(t)$ du solide à chaque instant.
2. Mêmes questions en présense d'une force de frottement solide de coefficient de frottement f.
3. Mêmes questions en présence de frottement fluide ($\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}$).

19. Monté sur ressorts (verticalement)** Deux ressorts identiques (k,ℓ_0) sont reliés par l'intermédiaire d'une petite masse m à leur extrémité commune M, leur deuxième extrémité étant fixée respectivement aux points A et B du repère galiléen $\mathscr{R}_0$ de telle sorte que $AB = 4\ell_0$. On écarte la masse d'une distance x_0 de sa position d'équilibre selon la médiatrice de AB. Quel est *a priori* le mouvement de la masse? Déterminer une équation différentielle du mouvement de la masse en négligeant l'action de la pesanteur. Si possible, l'intégrer en supposant la petite masse lachée en $x_0 \ll \ell_0$ sans vitesse initiale.

20. Chute en v^2** On suppose que le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}$ peut être considéré comme un bon référentiel galiléen. On lâche une bille M de masse m à partir du point O à la date $t = 0$. La bille est soumise à son poids et à une force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse : $\vec{F} = -\beta\,v\,\vec{v}$, β étant un coefficient positif et $v = \|\vec{v}\|$. On supposera que le mouvement a lieu selon la droite (Oz) orientée vers le bas.

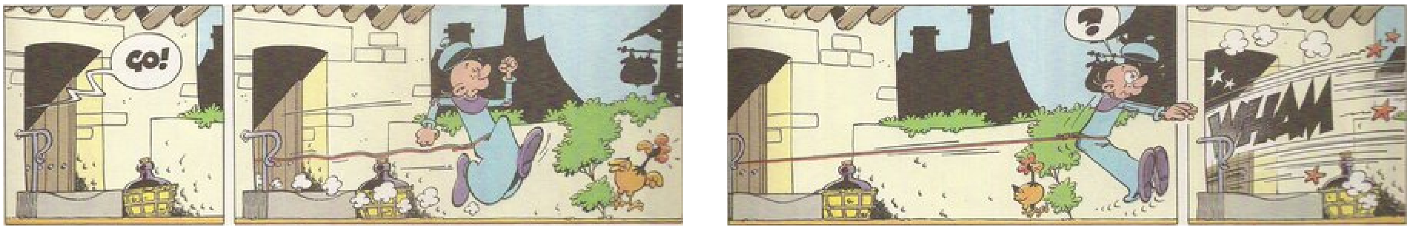
1. Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse de la bille selon l'axe vertical descendant. Quelle est la dimension physique de $(mg/\beta)^{1/2}$?
2. Montrer que $v(t)$ s'écrit $v(t) = v_\ell\,\mathrm{th}\left(gt/v_\ell\right)$, v_ℓ étant une quantité que l'on déterminera. Tracer le graphe correspondant. Quelle est la signification physique de v_ℓ? Donner une expression approchée de $v(t)$ pour $t \ll v_\ell/g$ en admettant que $\mathrm{th}\,(x) \sim x$ pour $x \ll 1$. Commenter. On rappelle que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{Argth}\,(x)\right] = \frac{1}{1-x^2}$$

21. Méditation** Un inuit médite sur le réchauffement climatique du haut de son igloo en forme de demi-sphère. Son équilibre étant pour le moins instable, il glisse sans frottement le long de son igloo. À quel angle quitte-t-il le contact de son igloo ?

22. La physique en BD ou dessin animé**

1. **Léonard et Disciplus Simplex**

   Disciple[2] teste la nouvelle invention de Léonard : le caoutchouc. Pour ce faire, il en attache un bout au mur (pris comme origine du repère) et l'autre bout autour de sa taille. Une fois tendu à une longueur supérieure à ℓ_0, le caoutchouc est équivalent à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Disciple (de masse m) se déplace alors en marchant dans le sens des x croissants, ce que l'on peut modéliser par l'application d'une force horizontale constante de norme $\mathrm{F}_{\mathrm{marche}}$ vers la droite. Dans une première phase, le déplacement s'opère effectivement vers la droite jusqu'à ce que la force exercée par le ressort arrête Disciple (sa vitesse s'annule). Ses pieds n'accrochent plus au sol : il n'est plus soumis qu'à l'action du ressort selon l'axe horizontal et repart vers le mur. Le but de cette partie est de déterminer sa vitesse lors de son impact avec le mur.



   (a) Déterminer l'équation différentielle de l'évolution de la position x de disciple au cours du temps lors de la première phase de déplacement (« marche » vers la droite). Faire un schéma explicatif clair de la situation.

   (b) Sachant que Disciple démarre à $t = 0$ en $x = \ell_0$ avec une vitesse nulle, donner l'expression de $x(t)$.

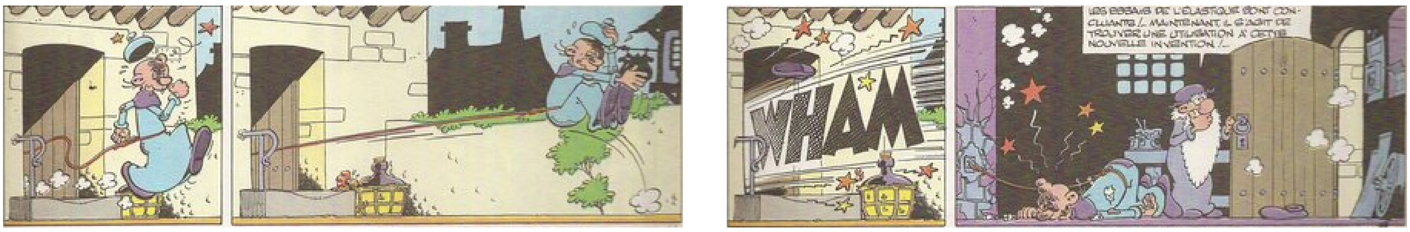
   (c) Exprimer l'instant t_1 au bout duquel il commence à repartir vers le mur. Exprimer la distance maximum $x_{\max}$ dont il a pu s'éloigner du mur.

   (d) De quelle distance aurait-il pu s'éloigner s'il avait « doucement »[3] augmenté la force exercée sur le sol jusqu'à atteindre la même valeur $\mathrm{F}_{\mathrm{marche}}$?

   (e) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x lors de la deuxième phase quand Disciple glisse sans frottement sur le sol vers le mur. Faire un schéma explicatif clair de la situation.

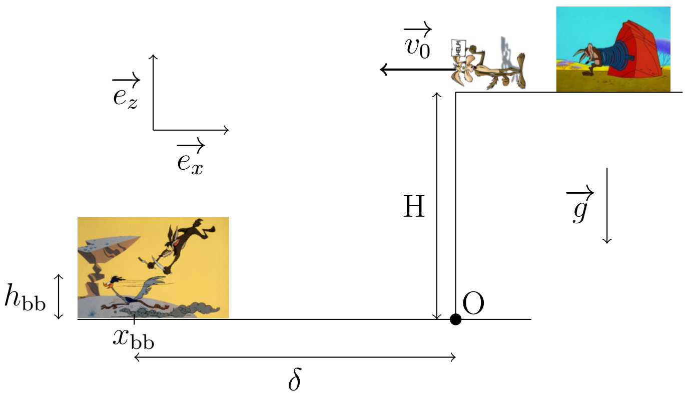
   (f) Jusqu'à quel instant ce modèle est-il correct ?

   (g) En déduire l'expression de la vitesse v_0 lors de l'impact sur le mur. On l'exprimera en fonction de $\mathrm{F}_{\mathrm{marche}}$, m et k.



2. Je sers la Science et c'est ma joie !
3. C'est-à-dire s'il avait constamment conservé une position de quasi-équilibre.

2. **Bip-bip et Coyote**



Comme chacun sait, Coyote cherche constamment à attraper Bip-bip par divers procédés plus ou moins ingénieux. Aujourd'hui, il s'intéresse au principe de la propulsion parabolique. Il utilise un système (que l'on étudiera pas!) dont les effets cinématiques sont les mêmes que ceux de Disciple mais à la place du mur, il se poste en haut d'une falaise afin de pouvoir tomber sur Bip-Bip qui doit passer sur une route en contre-bas. On négligera les frottements de l'air dans un premier temps.

(a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le vecteur position $\overrightarrow{OC}$ de coyote une fois lâché par son système de propulsion (c'est-à-dire du haut de la falaise avec une vitesse $\vec{v}(0) = -v_0\,\vec{e_x}$).

(b) Intégrer les projections selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_z}$ de l'équation précédente pour obtenir l'évolution de $\overrightarrow{OC}(t)$.

(c) Sachant que la falaise a une hauteur H et que Bip-bip attend sagement au niveau du sol en $x_{\text{bb}} = -\delta$, déterminer la vitesse v_0 que dois acquérir Coyote au lancé pour réussir parfaitement son coup.

(d) En fait, il suffit que Coyote rencontre Bip-bip en un point quelconque de sa taille h_{bb} pour réussir sa prise. On rappelle que $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$. Montrer qu'en supposant $h_{\text{bb}} \ll \text{H}$, l'incertitude Δv_0 acceptable sur la vitesse initiale v_0 de Coyote à l'envol[4] s'écrit

$$\Delta v_0 = \frac{1}{2}\frac{h_{\text{bb}}}{\text{H}}\,v_0$$

À présent, on prend en compte les frottements de l'air de type frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$.

(e) Quelle est la nouvelle équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$? Faire un schéma avec les forces.

(f) La résoudre avec les mêmes conditions initiales pour obtenir l'expression explicite de $\vec{v}(t)$.

(g) En déduire l'expression de $\overrightarrow{OC}(t)$.

(h) Donner (sans la résoudre) l'équation que doit vérifier v_0 pour que Coyote réussisse parfaitement son coup

23. Étude du mouvement de satellites** La Terre possède un seul satellite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre, dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense... Cet exercice se propose d'étudier quelques caractéristiques du mouvement des satellites terrestres dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. On donne $\text{R}_\text{T} = 6{,}37.10^3$ km et $\text{M}_\text{T} = 5{,}98.10^{24}$ kg. On rappelle que la force de gravitation exercée par une masse M placée en O et ressentie par une masse m placée en P s'écrit, avec $\mathscr{G} = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.,

$$\vec{F} = -\frac{\mathscr{G}\text{M}m}{\text{OP}^2}\frac{\overrightarrow{\text{OP}}}{\text{OP}} = -\frac{\mathscr{G}\text{M}m}{r^2}\vec{e_r}$$

1. **Vitesse de circularisation**

On s'intéresse à un satellite artificiel, de masse m, en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.

(a) Retrouver *rapidement* l'expression générale de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.

(b) À quoi se réduisent-elles dans le cadre d'une orbite circulaire[5] ?

(c) Faire un schéma clair de la situation du satellite en orbite circulaire autour de la Terre. On précisera notamment l'orientation de la force de gravitation et de la vitesse du satellite et on fera apparaître la base polaire à utiliser par la suite.

4. Coyote peut avoir une vitesse comprise entre v_0 et $v_0 + \Delta v_0$ pour réussir.
5. mais pas forcément uniforme...

(d) Montrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement la vitesse v_0 du satellite sur son orbite. On exprimera d'abord la vitesse v_0 en fonction de $\mathscr{G}$, M_T et R puis en fonction de g_0, R_T et R où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre.

(e) Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite à l'altitude $h = 832$ km au-dessus de la surface de la Terre. Calculer numériquement la valeur de la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

(f) Montrer que la période T de révolution sur l'orbite circulaire s'exprime comme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathscr{G}M_T}}$$

Quelle loi astronomique connue retrouve-t-on ?

(g) Calculer la période T de révolution de SPOT autour de la Terre.

(h) À quelle *altitude* doit-on mettre un satellite pour qu'il reste constamment autour du même point de l'équateur terrestre, *ie* qu'il fasse un tour en 24 h ?

2. **Mouvement de la Lune autour de la Terre**

On précise que cette section ne nécessite aucune connaissance préalable en astronomie.

(a) Le centre L de la Lune décrit, de manière uniforme, autour de la Terre, une orbite circulaire de centre T telle qu'en un jour le segment [TL] balaie un angle $\alpha = 0{,}230$ radian.

i. Déterminer, en jours, la période T_L de ce mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre.

ii. Sachant que le rayon R_{TL} de l'orbite circulaire décrite par la Lune est de $R_{TL} = 3{,}84.10^5$ km, en déduire la valeur de la masse de la Terre (on justifiera la réponse). Le résultat est-il cohérent avec les données ?

(b) On sait que la Lune, dans son mouvement autour de la Terre, nous présente toujours la même face. En déduire les caractéristiques du mouvement propre de la Lune.

(c) i. Le schéma (I) de la **feuille annexe** représente les différentes phases de la Lune. On dit que la Lune est nouvelle lorsque la face qu'elle présente à la Terre n'est pas éclairée. Identifier la nouvelle Lune sur le schéma (I) et préciser comment elle est alors vue depuis la Terre.

NB : la trajectoire de la Lune n'est pas dans le même plan que celle de la Terre autour du Soleil.

ii. Le cycle des phases de la Lune, appelé lunaison, dure $T_N = 29{,}5$ jours. Pour expliquer la différence entre cette durée et la période du mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre, on doit prendre en compte le mouvement de la Terre autour du Soleil.

Sur le schéma (II) de la **feuille annexe**, dessiner les positions de la Lune lors des nouvelles lunes successives à t et $t + T_N$. Dessiner aussi (en $t + T_N$) la direction qu'avait l'axe Terre–Lune à la date $t + T_L$.

Sachant que la Terre est en orbite circulaire de période $T_T = 365$ jours autour du Soleil, retrouver la valeur de $T_N = 29{,}5$ jours pour la lunaison.

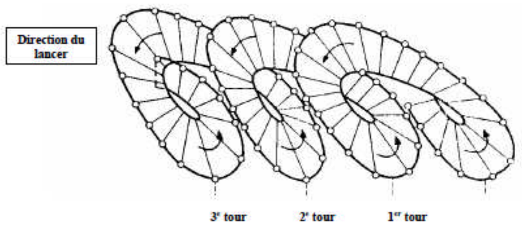
24. Lancer du marteau*** Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes et ne nécessitent pas toujours la compréhension du lancer de marteau ci-dessous. On étudie le lancer d'un marteau dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Données :

Masse du marteau	$m = 4{,}0$ kg
Longueur de la corde	$\mathrm{L} = 1{,}2$ m
Nombre de tours de la phase 2	$\mathrm{N} = 3$
Angle de lancement	$\alpha = 44°$
Champ de pesanteur	$g = 9{,}8$ m.s^{-2}
Vitesse initiale de la phase 2	$v_1 = 14$ m.s^{-1}
Vitesse finale de la phase 2	$v_e = 26$ m.s^{-1}
Coefficient de frottement	$\mu = 2{,}0.10^{-4}$ kg.s^{-1}
Altitude du lancer	$h = 1{,}5$ m

Le marteau utilisé dans le lancer du marteau en athlétisme est un boulet de masse $m = 4{,}0$ kg fixé au bout d'un fil métallique de longueur $\mathrm{L} = 1{,}2$ m. L'athlète commence à tourner lentement le marteau au-dessus de sa tête (moulinets) pendant 3 tours puis il se met à tourner sur lui-même pendant à nouveau 3 tours pour donner au marteau une vitesse d'éjection suffisante.

L'angle d'inclinaison α du chemin de lancement du marteau est de 44° lors des trois derniers tours, le chemin de lancement réel en spirale du marteau pendant la technique en 3 tours est décrit dans la figure (**non contractuelle**) ci-contre. On décompose donc le lancer en trois phases en simplifiant quelque peu le mouvement réel :



— Une première phase en moulinets **qui ne sera pas étudiée** et au bout de laquelle le boulet possède la vitesse $v_1 = 14$ m.s^{-1}.

— Une deuxième phase accélératrice pour laquelle on suppose que la masse du marteau (point matériel M de masse m) décrit une trajectoire circulaire uniformément accélérée de rayon $r = \mathrm{L}$ (L : longueur du fil métallique) dans le plan $\mathrm{O}x'y'$ pour atteindre la vitesse d'éjection de $v_e = 26$ m.s^{-1}. Le plan $\mathrm{O}x'y'$ est incliné d'un angle $\alpha = 44°$ par rapport au plan $\mathrm{O}xy$. Le plan $\mathrm{O}xy$ est perpendiculaire à $\mathrm{O}z$, direction du champ de pesanteur terrestre (mais de sens opposé).

— Une troisième phase après le lâcher du marteau que l'on étudiera dans le repère $\mathrm{O}xyz$ lié au référentiel terrestre.

1 Étude de la deuxième phase

Aspect cinématique

On s'intéresse ici à la cinématique du mouvement circulaire de rayon L dans le plan $\mathrm{O}x'y'$.

1. On travaille dans la base polaire liée au repère $\mathrm{O}x'y'$:

   (a) Faire un schéma en 2D dans le plan $\mathrm{O}x'y'$ pour placer la base polaire.

   (b) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ (vecteur position), $\overrightarrow{v}$ (vecteur vitesse) et $\overrightarrow{a}$ (vecteur accélération) dans cette base en fonction de L, θ , des dérivées de θ par rapport au temps et des vecteurs de la base polaire.

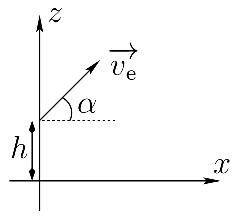
2. L'accélération angulaire $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = b$ est supposée constante durant cette phase. En déduire les expressions de $v(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\|$ et de $\theta(t)$ (en supposant le marteau orienté initialement selon Ox') en fonction de L, b, t et v_1.
3. Sachant que cette phase comporte 3 tours, en déduire l'expression de b en fonction de v_1, v_e et L. Faire l'application numérique.

Aspect dynamique

On s'intéresse à la tension du fil d'acier pendant cette phase ; pour un tel fil, la tension **peut ne pas être purement radiale**.

4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au boulet pendant cette phase accélératrice dans le plan $Ox'y'$ en négligeant le poids du boulet. En déduire l'expression de la tension de la corde en fonction de m, L, b, v_1 et t.
5. Application numérique : chercher la valeur maximale de cette tension.
   Commenter sachant que la rupture de la poignée intervient à 8 kN.
6. L'hypothèse de négliger le poids du boulet est-elle justifiée ?

2 Étude de la troisième phase



Le boulet est lâché par l'athlète au point de coordonnées $x = 0$, $y = L$, $z = h = 1{,}5$ m avec une vitesse initiale $v_e = 26$ m.s^{-1} faisant un angle $\alpha = 44°$ avec l'axe Ox. La trajectoire du boulet se fait dans un plan parallèle au plan Oxz avec l'axe Oz colinéaire et de sens opposé à $\overrightarrow{g}$, l'accélération de la pesanteur. Dans un premier temps, on négligera les frottements et on supposera que le boulet se comporte comme un point matériel même avec la corde. Ci-contre un schéma du plan du mouvement (plan $y = L$) avec la vitesse initiale.

7. Déterminer les équations différentielles vérifieées par $x(t)$ et $z(t)$, coordonnées cartésiennes du boulet.
8. Les résoudre pour déterminer le jet obtenu lors de ce lancer c'est-à-dire x tel que $z = 0$.
   Faire l'application numérique.
9. À présent on ne néglige plus les frottements. On suppose que le boulet est soumis à des frottements fluides d'expression $\overrightarrow{f} = -\mu\overrightarrow{v}$ avec $\mu = 2{,}0.10^{-4}$ kg.s^{-1}. Déterminer les expressions de $z(t)$ et $x(t)$ dans ce cas. Esquisser les graphes de $x(t)$ et $z(t)$, les comparer aux graphes des expressions de la question précédente et conclure.

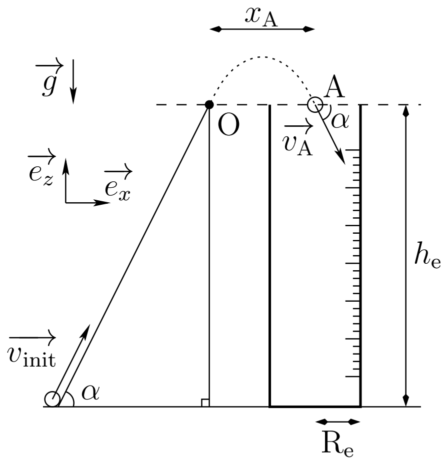
25. Lancé de poids***   Achille, ayant perdu sa course avec la tortue, s'est reconverti dans le lancé de poids. Il lance donc du haut de ses $h_0 = 1{,}80$ m un poids de rayon R, de masse $m = 7{,}25$ kg et de masse volumique $\rho_P = 7{,}7$ kg.dm^{-3} à une distance $d = 21$ m avec une vitesse initiale faisant un angle $\alpha = 45°$ avec la verticale.

1. Déterminer la vitesse initiale en négligeant les frottements.
2. Avait-il intérêt à lancer le poids plus haut ou plus bas ? Si oui avec quel angle ? On posera $\varepsilon = h_0 g/{v_0}^2$ et on tentera de développer au premier ordre en ε.
3. Donner un ordre de grandeur des forces de frottement visqueux ($F = 6\pi\eta R v$) et des forces de frottement frontal ($F = \rho S C_X v^2/2$). Conclure.
   Données : $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1}, $\rho = 1{,}3$ kg.m^{-3}, $C_X = 0{,}5$.

26. Mesure de viscosité dans une éprouvette*** On considère une sphère de rayon $r = 1{,}0$ mm et de masse volumique $\rho_0 = 7{,}88.10^3$ kg.m^{-3}, assimilée à toutes fins utiles à un point matériel de taille négligeable. Cette sphère est lancée depuis le point A (x_A, 0), centre de l'éprouvette, avec une vitesse $v_A = 1{,}0$ m.s^{-1} faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale (cf schéma) dans un fluide qui est un mélange d'eau et de glycérol, de masse volumique $\rho = 1{,}22.10^3$ kg.m^{-3}. La bille est, entre autres, soumise à une force de frottement fluide qui s'écrit

$$\overrightarrow{F} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la bille par rapport au fluide et η la viscosité du fluide qui s'exprime en Pa.s. On notera $\overrightarrow{g}$ l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81$ m.s^{-2}). Le point O est choisi comme origine du repère avec l'axe horizontal Ox tel que $\overrightarrow{v_A}\cdot\overrightarrow{e_x} > 0$ et l'axe vertical Oz ascendant. On posera $\tau = 2\rho_0 r^2/(9\eta)$. L'expérience est réalisée dans une éprouvette graduée de rayon $R_e = 2{,}0$ cm et de hauteur $h_e = 15$ cm.



1. (a) Vérifier que l'expression de $\overrightarrow{F}$ est cohérente avec l'unité de η.
   (b) i. Établir l'équation différentielle (vectorielle) vérifiée par la vitesse.
   ii. La résoudre selon Ox et Oz pour trouver l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v}$ au cours du temps en fonction de ρ_0, ρ, $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{g}$ et τ.
   iii. Montrer qu'il existe une vitesse limite $\overrightarrow{v_{lim}}$ et donner son expression.
   iv. Donner l'expression de la durée Δt au bout de laquelle on peut la considérer atteinte.
   v. On mesure une vitesse limite $v_{lim} = \|\overrightarrow{v_{lim}}\| = 11{,}6$ cm.s^{-1}. Déterminer les valeurs de η et τ.
   vi. Si la bille avait un rayon $2r$, quelles seraient les nouvelles valeurs de v_{lim} et Δt ? En donner une interprétation physique.
   (c) i. Établir l'expression des positions $x(t)$ et $z(t)$ de la bille au cours du temps.
   ii. Quelles doivent être les dimensions minimales h_{e0} et R_{e0} de l'éprouvette ? On les exprimera en fonction de v_{lim}, Δt, v_A, α et τ. L'éprouvette choisie est-elle adaptée ?
2. Pour amener la bille jusqu'au point A précédent, on utilise un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale sur lequel la bille glisse sans frotter. Le plan incliné démarre à la même altitude que l'éprouvette et s'arrête en O origine du repère
   (a) Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_O}$ de la bille en O afin qu'elle atteigne le point A avec la vitesse $\overrightarrow{v_A}$.
   (b) Quel doit être le lien entre x_A, v_A et α pour que cela fonctionne ? Application numérique.
   (c) Quelle doit être la vitesse $\overrightarrow{v_{init}}$ au pied du plan incliné pour que l'ensemble du dispositif marche ? Application numérique.
3. Quelques jours plus tard, vous désirez refaire l'expérience mais impossible de remettre la main sur l'éprouvette utilisée initialement. Vous êtes donc contraints d'utiliser une éprouvette de même rayon R_e mais de hauteur $h > h_e$.
   (a) À quelle condition sur h pourrez-vous utiliser le même dispositif en remplissant l'éprouvette jusqu'à une hauteur h_e identique à l'éprouvette précédente ? Application numérique.

(b) Si ce n'est pas le cas, jusqu'à quelle valeur de h pouvez-vous régler le problème en jouant sur x_A et α (on suppose que la bille décolle toujours du plan incliné au point O, que le point A est au centre de l'éprouvette et qu'on a toujours $v_A = 1{,}0\ \text{m.s}^{-1}$) ? Application numérique.

(c) Qualitativement, quels sont les éléments qui changent pour la trajectoire dans le fluide ?

27. Kilomètre lancé*** Le ski de vitesse ou « kilomètre lancé » est un sport qui consiste à descendre une piste enneigée le plus rapidement possible. Une piste de kilomètre lancé a une pente moyenne de 60% ; cela signifie qu'elle est telle qu'un déplacement horizontal de 100 m correspond à un déplacement vertical de 60 m. Un skieur de masse $m = 75$ kg est chronométré par deux capteurs situés à 700 m et 800 m du point de départ. On suppose que l'air exerce une force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse avec un coefficient de proportionnalité $\beta = 1{,}20.10^{-2}$ SI. Le facteur de frottement solide des skis sur la piste est $\mu = 0{,}020$ SI.

1. Quel est l'angle moyen α que fait la piste avec l'horizontale ?
2. Déterminer les dimensions des coefficients β et μ.
3. Déterminer analytiquement et numériquement la vitesse limite v_ℓ que peut atteindre le skieur.
4. Déterminer en fonction notamment de v_ℓ les expressions de la vitesse $v(t)$ et de la distance $x(t)$ en fonction du temps. On considérera que la vitesse initiale est nulle et on n'oubliera pas de lire l'énoncé jusqu'au bout.
5. Déterminer numériquement la durée que met le skieur à atteindre le premier chronomètre ainsi que la vitesse acquise et la force alors exercée par l'air. Au poids de quelle masse correspond-elle ?
6. On chronomètre le skieur à 240 km.h^{-1}. Évaluez la validité du modèle retenu ; que peut-on en déduire des pistes pour améliorer les performances obtenues ?

Données :
$$\int_0^{X} \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2\,a} \ln\left(\frac{a+X}{a-X}\right) \qquad \text{si } a > x$$

On rappelle que
$$\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}\left[\ln(\text{ch}\, x)\right] = \text{th}\, x$$

28. Modèle de Drude de conduction électrique*** On étudie dans ce problème un modèle simple pour expliquer le phénomène de conduction dans les métaux. Les données numériques sont rassemblées en fin de problème.

Le courant électrique dans les métaux est un mouvement d'ensemble d'électrons de masse m et de charge $q = -e$ (e est la charge élémentaire $e = 1{,}6.10^{-19}$ C). Pour simplifier, on adopte dans tout le problème un modèle unidimensionnel. Le champ électrique sera pris de la forme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_x}$ avec E constante positive. On admet que ce champ est créé par une tension U appliquée sur un conducteur ohmique de longueur L et que l'on a $E = U/L$. On rappelle qu'en présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$, des porteurs de charge portant la charge q sont soumis à la force électrique $\overrightarrow{F_e} = q\,\overrightarrow{E}$.

1. Donner le référentiel d'étude, le système et effectuer un bilan des actions extérieures auxquelles l'électron libre est soumis dans un métal.
2. Montrer que la force de pesanteur est négligeable devant la force électrique.
3. Dans tout le problème, on néglige donc désormais la force de pesanteur devant la force électrique quel que soit le porteur envisagé (électron ou ion).
   (a) Établir l'équation du mouvement puis l'intégrer une fois pour obtenir la vitesse.
   (b) Montrer que l'on aboutit à un résultat non physique.
4. En fait, l'approche simpliste précédente ne tient pas compte de la résistivité du métal au passage du courant. Pour résoudre cette difficulté, on modélise l'action résistive du conducteur par une force de frottement fluide qui s'exerce sur chaque porteur que l'on note $\overrightarrow{f} = -b\,\overrightarrow{v}$.

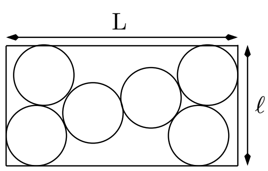
(a) Refaire le bilan des forces.
(b) Appliquer le PFD et établir l'équation du mouvement d'un électron. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression en fonction des paramètres du problème.
(c) Résoudre l'équation du mouvement en supposant que l'électron est immobile à $t = 0$ et montrer que la vitesse admet une valeur limite finie dont on donnera l'expression en fonction de $\overrightarrow{E}$, e, τ et m.
(d) Interpréter physiquement les dépendances de τ.

5. En régime permanent, donner la vitesse des électrons en fonction du champ. Soit n la concentration volumique en porteurs libres dans le conducteur. Le milieu conducteur est constitué par un fil cylindrique homogène de section S. Calculer le nombre de charges qui traversent une section du conducteur par unité de temps.
6. En déduire l'intensité I qui traverse ce conducteur et la résistance R du fil. Interpréter physiquement ses dépendances.
7. Une grandeur caractéristique du conducteur utilisé est la conductivité γ définie par $R = L/(S\gamma)$. Exprimer γ. En quoi cette grandeur est-elle caractéristique du conducteur ?
8. Application numérique. On suppose que chaque atome de cuivre libère en moyenne un électron de conduction. Calculer la constante de temps et la vitesse de dérive pour le cuivre. Commenter la valeur de τ et discuter de la limite de validité de la loi d'Ohm.
9. Approche «statistique». On va montrer que l'on peut rendre compte des mêmes phénomènes sans faire appel à une force de frottement fluide. La trajectoire d'un porteur de charge est en fait une suite de déviations brusques. Entre deux déviations, le porteur est quasiment isolé. La durée moyenne entre deux déviations (parfois appelé «temps de vol») est notée τ. Après chaque déviation, la vitesse est aléatoire. En l'absence de champ électrique, le mouvement des porteurs est alors entièrement aléatoire.

   (a) Qu'est-ce qui explique les déviations brusques des mouvements des électrons libres dans un métal ?
   (b) Que vaut la valeur moyenne $\overrightarrow{u_0}$ des porteurs de charges en l'absence de champ électrique ?
   (c) Lorsqu'ils sont placés dans un champ $\overrightarrow{E}$, les porteurs ont alors un faible mouvement de dérive. Le régime des déviations tous les τ n'est pas modifié.

      i. Appliquer le PFD à un électron dans un métal et intégrer l'équation obtenue.
      ii. Montrer que l'on n'est pas confronté au problème soulevé à la question 3b.
      iii. Montrer que, statistiquement, $\overrightarrow{v} = \mu \overrightarrow{E}$. Donner l'expression de la constante μ (appelée mobilité des porteurs) en fonction de e, τ et m. Vérifier que les résultats sont bien cohérents avec ceux obtenus précédemment avec l'hypothèse de frottement fluide.

Données numériques $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2} ; U = 10 V ; L = 1 m, $M_{Cu} = 63{,}5$ g.mol^{-1} ; $\gamma_{Cu} = 5{,}8.10^7$ S.m^{-1} $\rho_{Cu} = 8{,}8.10^3$ kg.m^{-3}.



L/r et ℓ/r ?