

Relation fondamentale de la dynamique

1. **Hamac** None available
2. **Distance de freinage** None available
3. **Freinage en pente** None available
4. **Un peu plus a l'ouest*** None available
5. **Panne d'essence*** None available
6. **Vol d'avion humanitaire*** None available
7. **Tir dans le vide*** None available
8. **Question pour un(e) champion(ne)*** None available
9. **Monté sur ressort (horizontalement)*** None available
10. **Fête foraine*** None available
11. **Régimes sans sel*** None available
12. **Sèche-linge*** None available
13. **Coefficient de frottement du verre***

1. Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, les forces s'appliquant sur le morceau de verre sont son poids \vec{P} , la réaction normale \vec{R}_n et la réaction tangentielle du support \vec{R}_t . La relation fondamentale de la dynamique traduisant l'équilibre du bout de verre donne, après projections successives sur Ox et Oy

$$\|\vec{R}_t\| = mg \sin \alpha \quad \text{et} \quad \|\vec{R}_n\| = mg \cos \alpha$$

2. Comme $\|\vec{R}_t\| \leq \mu \|\vec{R}_n\|$

l'équilibre n'est possible que si

$$\tan \alpha \leq \mu$$

3. *Application numérique:*

$$\mu = 0,70$$

14. **Traction d'un cube sur une table horizontale*** None available
15. **En bloc*** None available

16. Chute en v^* None available

17. King-Kong* None available

18. Glissement sur plan incliné** None available

19. Monté sur ressorts (verticalement)** None available

20. Chute en v^{2**} None available

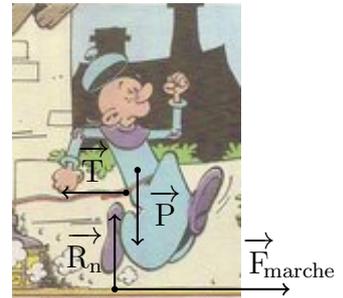
21. Méditation** non available

22. La physique en BD ou dessin animé**

1. Léonard et Disciplus Simplex

(a) Dans le référentiel terrestre (supposé galiléen sur la durée de l'expérience), le disciple de masse m est soumis aux forces suivantes :

- son poids \vec{P} ;
- la réaction normale du sol \vec{R}_n qui compense exactement le poids¹ ;
- la force de frottement $\vec{F}_{\text{marche}} = F_{\text{marche}} \vec{e}_x$ (motrice) sur le sol induite par le phénomène de marche ;
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(x - \ell_0) \vec{e}_x$.



La RFD s'écrit
$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_{\text{marche}} + \vec{T}$$

La projection selon \vec{e}_x donne
$$m \ddot{x} = F_{\text{marche}} - k(x - \ell_0)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} \ell_0 + \frac{F_{\text{marche}}}{m}$$

(b) On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ dont la solution générale s'écrit

$$x(t) = \ell_0 + \frac{F_{\text{marche}}}{k} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constante à déterminer en fonction des conditions initiales $x(0) = \ell_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, soit

$$\ell_0 = \ell_0 + \frac{F_{\text{marche}}}{k} + A \quad \text{et} \quad 0 = B\omega_0$$

On obtient sans peine

$$x(t) = \ell_0 + \frac{F_{\text{marche}}}{k} [1 - \cos(\omega_0 t)]$$

(c) Disciple commence à repartir vers le mur la première fois que $x(t)$ est maximal, c'est-à-dire la première fois que $\cos(\omega_0 t) = -1$, soit $\omega_0 t_1 = \pi$ ou encore

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

1. Disciple ne s'enfonce pas dans le sol...

On a alors

$$x_{\max} = \ell_0 + 2 \frac{F_{\text{marche}}}{k}$$

- (d) Augmenter « doucement » la force de traction modélisant la marche revient à être constamment en état de quasi-équilibre, donc avoir $\ddot{x} = 0$ dans l'équation différentielle. On en déduit

$$x_{\max, \text{doux}} = \ell_0 + \frac{F_{\text{marche}}}{k}$$

- (e) Dans la deuxième phase, l'inventaire des force est le même en supprimant la force F_{marche} . On trouve donc pour équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} \ell_0$$

- (f) L'énoncé stipule que l'élastique ne joue son rôle de ressort que s'il est tendu d'une longueur au moins égale à ℓ_0 . L'équation est donc valable tant que

$$x(t) \geq \ell_0$$

- (g) Pour connaître la vitesse lors de l'impact, il faut déterminer $x(t)$ explicitement. La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit, en gardant la notation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$,

$$x(t') = \ell_0 + A \cos(\omega_0 t') + B \sin(\omega_0 t')$$

en posant $t' = t - t_1$ et avec A et B deux constantes à déterminer. Les conditions « initiales » sont maintenant $x(t' = 0) = \ell_0 + 2F_{\text{marche}}/k$ et $\dot{x}(t' = 0) = 0$, ce qui mène aux équations

$$\ell_0 + 2 \frac{F_{\text{marche}}}{k} = \ell_0 + A \quad \text{et} \quad 0 = B\omega_0$$

soit $x(t') = \ell_0 + 2 \frac{F_{\text{marche}}}{k} \cos(\omega_0 t')$ et $\dot{x}(t') = -2 \frac{F_{\text{marche}}}{k} \omega_0 \sin(\omega_0 t')$

Quand $x(t') \leq \ell_0$, Disciple n'est plus soumis à aucune force selon l'horizontale et conserve donc une vitesse constante égale à celle acquise lors du passage en $x = \ell_0$ qui se fait à un temps t' tel que $\omega_0 t' = \pi/2$. On en déduit

$$v_0 = -2 \frac{F_{\text{marche}}}{k} \omega_0 = -2 \frac{F_{\text{marche}}}{\sqrt{km}}$$

2. Bip-bip et Coyote

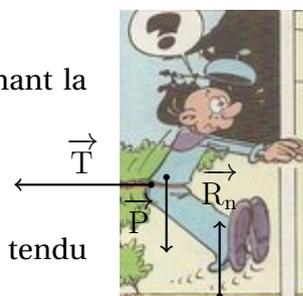
- (a) Une fois en l'air, Coyote n'est plus soumis dans le référentiel terrestre (supposé galiléen le temps de la chute) qu'à son poids $\vec{P} = m \vec{g}$. L'application de la RFD donne donc directement

$$m \frac{d^2 \vec{OC}}{dt^2} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$$

- (b) En simplifiant par m et en projetant respectivement selon \vec{e}_x et \vec{e}_z , on obtient le système

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = -v_0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \quad \text{car } \vec{v}(t=0) = -v_0 \vec{e}_x$$

ou encore $\begin{cases} x(t) = -v_0 t \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + H \end{cases}$ soit $\vec{OC}(t) = \frac{t^2}{2} \vec{g} + H \vec{e}_z + t \vec{v}_0$ car $\vec{OC}(t=0) = H \vec{e}_z$



(c) On peut se débarrasser du temps au profit de x en écrivant $t = -x/v_0$, ce qui donne

$$z = -\frac{g x^2}{2v_0^2} + H$$

Pour que Coyote réussisse parfaitement sa prise, il doit atteindre $z = 0$ quand $x = -\delta$, soit avec une vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \delta^2}{2H}}$$

(d) On a trouvé là la vitesse minimale nécessaire à Coyote (s'il va plus lentement, il s'écrasera avant d'avoir atteint les pieds de Bip-Bip). En revanche, si on accroît cette vitesse, Coyote peut toujours attraper Bip-Bip à condition que $z(\delta) \leq h_{bb}$, soit à la limite

$$h_{bb} = -\frac{g \delta^2}{2(v_0 + \Delta v_0)^2} + H$$

$$\text{ou encore } v_0 + \Delta v_0 = \sqrt{\frac{g \delta^2}{2(H - h_{bb})}} = \underbrace{\sqrt{\frac{g \delta^2}{2H}}}_{v_0} \times \left(1 - \frac{h_{bb}}{H}\right)^{-1/2} \approx v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_{bb}}{H}\right)$$

soit

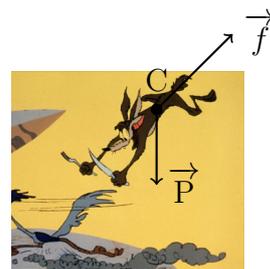
$$\Delta v_0 = \frac{1}{2} \frac{h_{bb}}{H} v_0$$

(e) Les frottements de l'air se rajoutent à l'inventaire des forces disponibles. La RFD devient donc

$$m \frac{d^2 \vec{OC}}{dt^2} = m \vec{g} - \alpha \vec{v}$$

soit, avec $\vec{v} = \frac{d\vec{OC}}{dt}$,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = \vec{g} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha}$$



(f) On a une équation différentielle (vectorielle) du premier ordre à coefficients constants dont la solution générale s'écrit comme somme d'une solution particulière et d'une solution homogène,

$$\vec{v}(t) = \tau \vec{g} + e^{-t/\tau} \vec{A}$$

avec \vec{A} un vecteur constant à déterminer. Comme initialement $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$, il vient

$$\vec{v}_0 = \tau \vec{g} + \vec{A}$$

soit

$$\vec{v}(t) = \tau \vec{g} (1 - e^{-t/\tau}) + e^{-t/\tau} \vec{v}_0$$

(g) Comme $\vec{v} = d\vec{OC}/dt$, il suffit d'intégrer la relation précédente entre les instants $t = 0$ et t , ce qu'il est facile de faire puisque les vecteurs \vec{g} et \vec{v}_0 sont ici des constantes et peuvent être mis en facteur des intégrales. On a

$$\int_{\vec{OC}(0)}^{\vec{OC}(t)} \frac{d\vec{OC}}{dt} dt = \tau \vec{g} \int_0^t (1 - e^{-t/\tau}) dt + \vec{v}_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt$$

$$\left[\vec{OC} \right]_{H \vec{e}_z}^{\vec{OC}(t)} = \tau \vec{g} [t + \tau e^{-t/\tau}]_0^t + \vec{v}_0 [-\tau e^{-t/\tau}]_0^t$$

$$\vec{OC}(t) - H \vec{e}_z = \tau \vec{g} (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)) + \tau \vec{v}_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

soit

$$\overrightarrow{OC}(t) = H\vec{e}_z + t\tau\vec{g} + \tau(1 - e^{-t/\tau})(\vec{v}_0 - \tau\vec{g})$$

(h) Les projections² selon \vec{e}_x et \vec{e}_z donnent respectivement

$$x(t) = -v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad z(t) = H - g \tau t + g \tau^2 (1 - e^{-t/\tau})$$

On peut donc se débarrasser du temps au profit de x pour obtenir à la fois

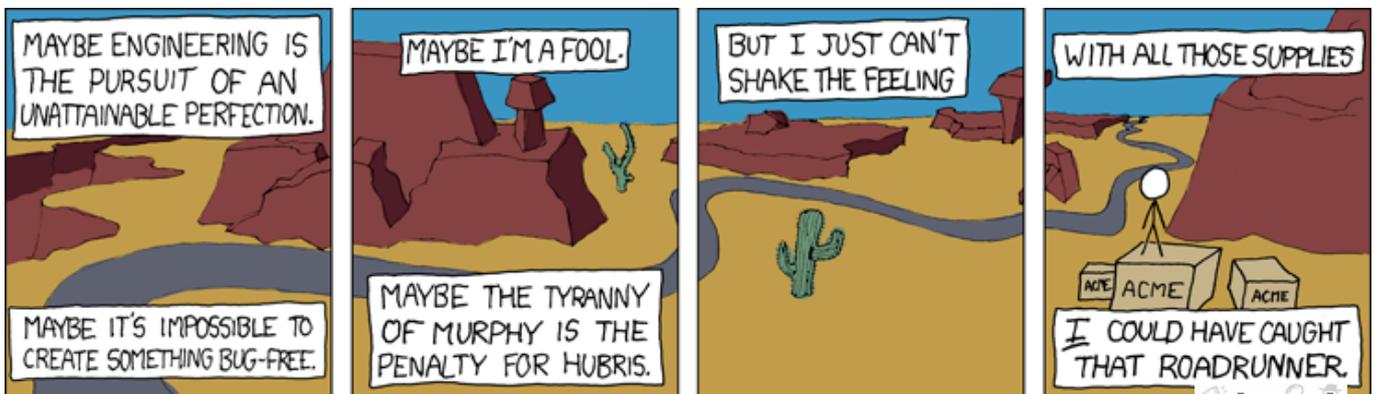
$$(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{-x}{v_0 \tau} \quad \text{et} \quad t = -\tau \ln\left(1 + \frac{x}{v_0 \tau}\right)$$

En remplaçant ces deux expressions dans z , on obtient

$$z(x) = H + g \tau^2 \ln\left(1 + \frac{x}{v_0 \tau}\right) - \frac{g \tau}{v_0} x$$

Pour réussir son affaire, Coyote doit s'assurer que $z(x = -\delta) = 0$, soit l'équation vérifiée par v_0

$$0 = H + g \tau^2 \ln\left(1 - \frac{\delta}{v_0 \tau}\right) + \frac{g \tau}{v_0} \delta$$



xkcd.com

Chuck Jones is a vengeful god.

2. Attention, $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_x$ et $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

23. Étude du mouvement de satellites**

1. Vitesse de circularisation

(a) En coordonnées polaires, $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

soit
$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$
 car $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

et
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Or $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$, d'où
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

(b) Pour une orbite circulaire (pas forcément uniforme), $r = R = C^{te}$, c'est-à-dire $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. On se réduit donc à

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

(c) Le schéma est donné ci-contre.

(d) Seule la force de gravitation s'exerce sur le satellite dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen sur la durée de l'étude). La RFD s'écrit

$$m \vec{a} = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{R^2} \vec{e}_r$$

La projection sur \vec{e}_θ permet de déduire que $\ddot{\theta} = 0$, c'est-à-dire que $\dot{\theta} = C^{te}$, d'où $\|\vec{v}\| = |R\dot{\theta}| = C^{te}$:

Le mouvement est uniforme.

La projection selon \vec{e}_r permet d'obtenir le lien

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{R^2} \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R^3}}$$

ou encore

$$v_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R}}$$

En remarquant que g_0 est relié en première approximation à la force gravitationnelle au niveau du sol via

$$mg_0 = \frac{\mathcal{G} M_T m}{R_T^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{G} M_T = g_0 R_T^2$$

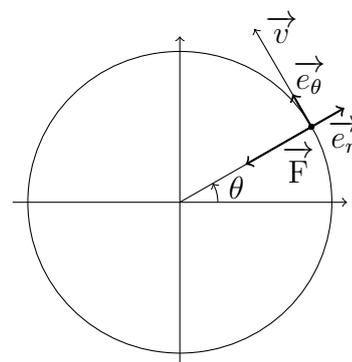
on en déduit

$$v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R}}$$

(e) Pour SPOT, on trouve

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R_T + h}} = 7,44 \text{ km.s}^{-1}$$

(f) Comme le satellite tourne de 2π en une période T , celle-ci est reliée à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par



$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G}M_T}}$$

On retrouve la 3^e loi de Képler

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} = C^{te}$$

(g) Pour SPOT,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{\mathcal{G}M_T}} = 6,08 \cdot 10^3 \text{ s} = 1\text{h}41\text{min}$$

(h) Pour que la période du satellite soit de $T_{\text{géo}} = 24\text{h}$, il faut le mettre à une altitude

$$h = -R_T + \sqrt[3]{\frac{T_{\text{géo}}^2 \mathcal{G}M_T}{4\pi^2}} = 35,9 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Une telle orbite est dite géostationnaire.

2. Mouvement de la Lune autour de la Terre

(a) Sachant qu'en $T_1 = 1$ jour, la Lune parcourt un angle α sur son orbite, alors elle aura fait un tour complet (2π rad) en un temps

$$T_L = \frac{2\pi}{\alpha} T_1 = 27,3 \text{ jours}$$

La troisième loi de Képler démontrée précédemment permet d'obtenir³

$$M_T = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}} \frac{R_{TL}^3}{T_L^2} = 6,02 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

parfaitement en accord avec les données fournies puisque seul le dernier chiffre significatif est entaché d'erreur comme on s'y attend par définition de celui-ci.

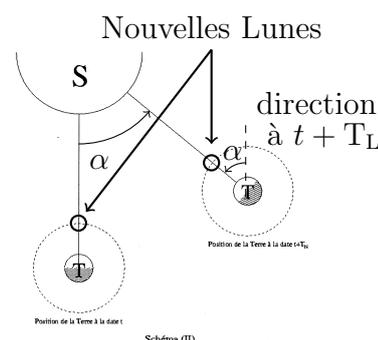
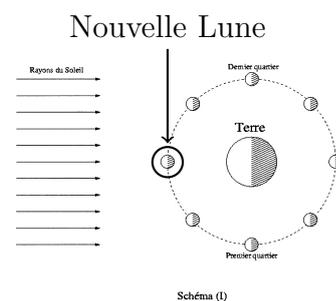
(b) Pour que la Lune nous présente toujours la même face, il faut à la fois que sa période de rotation propre (autour d'elle-même) soit égale à sa période T_L de rotation autour de la Terre et que son axe de rotation soit confondu avec la normale au plan de son orbite.

(c) La nouvelle Lune se présente quand la Lune est placée entre la Terre et le Soleil (seule la partie sombre est tournée vers la Terre) c'est-à-dire « visible » seulement quand le Soleil l'est, donc en plein jour. En pratique, sa présence ne peut être détectée que durant les éclipses de Soleil où l'alignement Soleil-Lune-Terre est parfait, ce qui n'est pas le cas la plupart du temps du fait du léger décalage des plans orbitaux de la Lune autour de la Terre et de la Terre autour du Soleil.

Après une période T_L , la Lune a parcouru 2π autour de la Terre, mais comme la Terre a tourné autour du Soleil, elle doit encore parcourir un angle supplémentaire pour se retrouver dans l'alignement Soleil-Terre. Mathématiquement, on a que pendant la période de lunaison T_N , la lune doit parcourir un angle $2\pi + \alpha$, d'où

$$T_N = \frac{2\pi + \alpha}{2\pi} T_L$$

D'autre part, cet angle α est égal à l'angle balayé par la Terre durant cette même période, d'où



3. en n'oubliant pas de convertir la période en secondes...

$$\alpha = 2\pi \frac{T_N}{T_T}$$

En remplaçant, on a

$$\left(1 + \frac{T_N}{T_T}\right) T_L = T_N$$

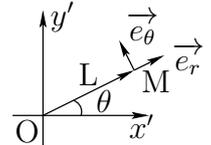
et on retrouve bien

$$T_N = \frac{T_L}{1 - T_L/T_T} = 29,5 \text{ jours}$$

24. Lancer du marteau***

1. Dans la base polaire définie ci-contre, on a

$$\vec{OM} = L\vec{e}_r \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{e}_r + L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$



2. L'accélération angulaire étant constante, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = bt + C^{te} \quad \text{soit} \quad v(t) = L \frac{d\theta}{dt} = Lbt + LC^{te}$$

À $t = 0$, $v(0) = v_1 = LC^{te}$, soit

$$v(t) = Lbt + v_1$$

On vérifie bien que $v(t) > 0$ car on tourne bien dans le sens trigonométrique. Il reste à trouver $\theta(t)$ en intégrant $\dot{\theta}$ et en posant $\theta(0) = 0$. Il vient

$$\theta(t) = \frac{bt^2}{2} + \frac{v_1}{L}t$$

3. Après 3 tours, au bout d'un temps t_1 , on vérifie à la fois

$$v_e = Lbt_1 + v_1 \quad \text{et} \quad 6\pi = \frac{bt_1^2}{2} + \frac{v_1}{L}t_1$$

En isolant $t_1 = \frac{v_e - v_1}{Lb}$,

$$6\pi = \left(\frac{b}{2} \left(\frac{v_e - v_1}{Lb}\right) + \frac{v_1}{L}\right) \left(\frac{v_e - v_1}{Lb}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_e^2 - v_1^2}{L^2 b}\right)$$

Soit

$$b = \frac{1}{12\pi} \left(\frac{v_e^2 - v_1^2}{L^2}\right) = 8,8 \text{ rad.s}^{-2}$$

4. Dans le référentiel \mathcal{R} (galiléen), les forces qui s'appliquent sont le poids (que l'on va négliger) et la tension du fil. La relation fondamentale s'écrit alors $m\vec{a} = \vec{T}$, c'est-à-dire

$$\vec{T} = -mL \left(bt + \frac{v_1}{L}\right)^2 \vec{e}_r + mLb\vec{e}_\theta$$

Remarque : la tension du fil n'est pas radiale car le boulet accélère.

5. La norme de la tension vaut $\|\vec{T}\| = mL\sqrt{\left(bt + \frac{v_1}{L}\right)^4 + b^2}$

Elle est maximale au moment du lâcher en $t = t_1$, c'est-à-dire quand $\dot{\theta} = v_e/L$, soit

$$\|\vec{T}\|_{\max} = mL\sqrt{\left(\frac{v_e}{L}\right)^4 + b^2} = 2,3 \text{ kN}$$

Cette valeur étant inférieure à 8 kN, le poignet tient bon. On remarquera que la composante orthoradiale est bien plus faible que la composante radiale puisque $|T_\theta/T_r|_{\max} = bL^2/v_e^2 = 1,9 \%$.

6. En comparant $\|\vec{T}\|_{\min}$ (obtenue en remplaçant v_e par v_1 dans l'expression précédente) et mg , on trouve

$$\frac{\|\vec{T}\|_{\min}}{mg} = 17 \gg 1$$

Le poids est bien négligeable devant la tension tout au long du mouvement.

1 Étude de la troisième phase

7. En considérant la masse m dans le référentiel \mathcal{R} (galiléen), la seule force qui s'applique est le poids. La RFD donne alors $m\vec{a} = m\vec{g}$, c'est-à-dire $\vec{a} = \vec{g}$. La projection de cette dernière relation sur \vec{e}_x et \vec{e}_z donne

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -g$$

8. L'intégration donne $\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0$ et $\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt$, soit

$$\dot{x}(t) = v_e \cos \alpha \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = -gt + v_e \sin \alpha$$

L'intégration de ces nouvelles équations donne $x(t) - x(0) = v_e \cos \alpha t$ et $z(t) - z(0) = -gt^2/2 + v_e \sin \alpha t$, soit

$$x(t) = v_e \cos \alpha t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_e \sin \alpha t + h$$

En remplaçant $t = x/v_e \cos \alpha$ dans l'expression de $z(t)$, on obtient

$$z(x) = -\frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_e \cos \alpha} \right)^2 + x \tan \alpha + h$$

Rechercher $z(x) = 0$ donne pour seule solution positive

$$x = \frac{-\tan \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha + 2gh/(v_e \cos \alpha)^2}}{-g/(v_e \cos \alpha)^2} = 70 \text{ m}$$

9. On étudie toujours la masse m dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, mais en plus du poids se rajoute la force de frottement $\vec{f} = -\mu \vec{v}$, d'où

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \mu \vec{v}$$

En projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_z , on obtient les équations différentielles vérifiées par les deux composante v_x et v_z de la vitesse, en posant $\tau = m/\mu$

$$\tau \frac{dv_x}{dt} + v_x = 0 \quad \text{et} \quad \tau \frac{dv_z}{dt} + v_z = -g\tau$$

Avec les conditions initiales $v_x(0) = v_e \cos \alpha$ et $v_z(0) = v_e \sin \alpha$ ainsi que la solution particulière $v_{zP} = -mg/\mu$, il vient

$$v_x(t) = v_e \cos \alpha e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad v_z(t) = v_e \sin \alpha e^{-t/\tau} - g\tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Pour obtenir les positions, on calcule

$$x(t) - x(0) = \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^t v_e \cos \alpha e^{-t/\tau} dt = v_e \tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau})$$

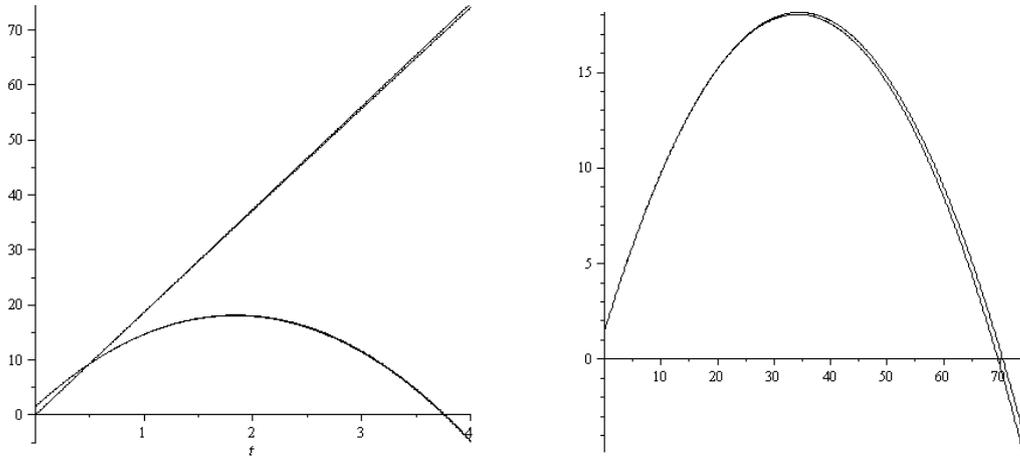
et

$$z(t) - z(0) = \int_{z(0)}^{z(t)} dz = \int_0^t \frac{dz}{dt} dt = \int_0^t [v_e \sin \alpha e^{-t/\tau} - g\tau (1 - e^{-t/\tau})] dt$$

soit

$$x(t) = v_e \tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad z(t) = h + \tau (v_e \sin \alpha + g\tau) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t$$

Sur les graphes suivants, on remarque que la différence entre le cas avec et sans frottement est minime.



25. Lancé de poids*** None available

26. Mesure de viscosité dans une éprouvette***

1. Chute dans le fluide.

(a) En se souvenant qu'une pression (mesurée en pascals) est une force par unité de surface,

$$[\eta r \nu] = \left(\frac{[F]}{L^2} \cdot T \right) \cdot L \cdot (L \cdot T^{-1}) = [F]$$

Le résultat est bien homogène.

(b) i. Dans le référentiel terrestre galiléen, les forces qui s'appliquent sur la bille dans le fluide sont son poids ($\vec{P} = (4/3) \pi r^3 \rho_0 \vec{g}$), la poussée d'Archimède ($\vec{\Pi} = -(4/3) \pi r^3 \rho \vec{g}$) et la force de frottement ($\vec{F} = -6\pi \eta r \vec{v}$). La RFD donne

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_0 - \rho) \vec{g} - 6\pi \eta r \vec{v}$$

ou encore
$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{g} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2\rho_0 r^2}{9\eta}$$

ii. Projetons cette équation selon \vec{e}_x . Puisque \vec{e}_x est un vecteur fixe et comme $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{e}_x = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{e}_x)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}$$

d'où
$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} = 0 \quad \text{de solution générale} \quad v_x(t) = A e^{-t/\tau}$$

La condition initiale s'écrit $v_x(0) = \vec{v}_A \cdot \vec{e}_x = v_A \cos \alpha$, soit

$$v_x(t) = v_A \cos \alpha e^{-t/\tau}$$

De même, la projection selon \vec{e}_z donne

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = -\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) g \quad \text{de solution générale} \quad v_z(t) = A e^{-t/\tau} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) g \tau$$

La condition initiale s'écrit à présent $v_z(0) = \vec{v}_A \cdot \vec{e}_z = -v_A \sin \alpha (< 0 \text{ by the way})$. Ainsi,

$$v_z(t) = -v_A \sin \alpha e^{-t/\tau} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) g \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

En rassemblant ces deux expressions via $\vec{v}(t) = v_x(t) \vec{e}_x + v_z(t) \vec{e}_z$, il vient

$$\vec{v}(t) = e^{-t/\tau} \vec{v}_A + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \tau (1 - e^{-t/\tau}) \vec{g}$$

iii. La valeur limite de la vitesse est atteinte pour t tendant vers l'infini. Comme $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/\tau} = 0$, on trouve

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \tau \vec{g}$$

On pouvait aussi regarder la vitesse limite comme la vitesse atteinte lorsque $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ dans l'équation différentielle, ce qui ramène bien au même résultat.

iv. On a $e^{-t/\tau} < 5\%$ pour $t = 3\tau$, on peut donc prendre

$$\Delta t = 3\tau$$

v. On a
$$v_{\text{lim}} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{2\rho_0 r^2}{9\eta} g$$

soit
$$\eta = \frac{(\rho_0 - \rho) 2r^2}{9 v_{\text{lim}}} g = 1,3 \cdot 10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_{\text{lim}}}{(1 - \rho/\rho_0) g} = 14 \text{ ms}$$

vi. Si on double la valeur du rayon, les valeurs de v_{lim} et Δt quadruplent car elles sont proportionnelles à r^2 . Cela s'explique par le fait que, même si la force de frottement est plus importante (augmentation en r), la masse de la bille augmente bien plus (en r^3).

(c) i. Commençons par le déplacement horizontal. On a

$$x(t) - x(0) = \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^t v_x(t) dt = \int_0^t v_A \cos \alpha e^{-t/\tau} dt$$

Comme $x(0) = x_A$,
$$x(t) = x_A + v_A \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \tau$$

De la même manière, en utilisant $v_{\text{lim}} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) g \tau$ pour alléger les notations,

$$z(t) - z(0) = \int_{z(0)}^{z(t)} dz = \int_0^t \frac{dz}{dt} dt = \int_0^t v_z(t) dt = \int_0^t [-v_{\text{lim}} + (v_{\text{lim}} - v_A \sin \alpha) e^{-t/\tau}] dt$$

soit
$$z(t) = -v_{\text{lim}} t + (v_{\text{lim}} - v_A \sin \alpha) (1 - e^{-t/\tau}) \tau \quad \text{car } z(0) = 0$$

ii. La position horizontale est bornée et impose donc le rayon minimal de l'éprouvette

$$R_{e0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - x_A) = v_A \cos \alpha \tau = 1,2 \text{ cm}$$

La hauteur verticale doit être suffisante pour que l'on ait le temps d'atteindre v_{lim}

$$h_{e0} \geq |z(\Delta t)| \simeq v_{\text{lim}} \Delta t - (v_{\text{lim}} - v_A \sin \alpha) \tau = 1,0 \text{ cm}$$

L'éprouvette choisie est donc bien adaptée puisque $R_e > R_{e0}$ et $h_e > h_{e0}$.

2. Phase de lancer

- (a) Lors du mouvement de O à A, la bille n'est soumise qu'à son poids et à la poussée d'Archimède⁴ dont les énergies potentielles ne dépendent que de l'altitude. Par conséquent, l'énergie mécanique étant conservée et l'énergie potentielle étant la même aux deux points, on a identité des énergies cinétiques donc, en norme, $v_O = v_A$. La symétrie de la trajectoire parabolique (démontrée à la question suivante) impose, en accord avec la direction de la planche d'envol donnée par l'énoncé,

$$\vec{v}_O = v_A (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$$

- (b) L'intégration immédiate des équations horaires pour une particule soumise uniquement à son poids partant du point O avec une vitesse \vec{v}_O donne (en redéfinissant l'origine des temps pour un départ en O à $t = 0$)

$$x(t) = (v_A \cos \alpha) t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_A \sin \alpha) t$$

Il y a deux instants $t = 0$ et $t = 2v_A \sin \alpha / g$ pour lesquels on a $z = 0$. Le premier correspond au point O, le second au point A. On doit donc avoir la relation

$$x_A = \frac{v_A^2 \sin(2\alpha)}{g} = 8,8 \text{ cm}$$

- (c) Seules des forces conservatives (le poids) ou ne travaillant pas (réaction normale) agissent sur la bille lors de son déplacement le long du plan incliné. On peut donc utiliser la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m v_{\text{init}}^2 + mg(-h_e) = E_{m,\text{init}} = E_{m,O} = \frac{1}{2} m v_O^2 = \frac{1}{2} m v_A^2$$

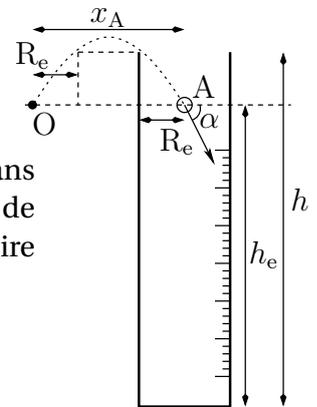
d'où

$$v_{\text{init}} = \sqrt{v_A^2 + 2gh_e} = 2,0 \text{ m.s}^{-1}$$

3. Expérimentations

- (a) Pour utiliser le même protocole, il suffit que la bille ne tape pas dans l'éprouvette et monte donc suffisamment en altitude. Par symétrie de la trajectoire parabolique, il suffit que pour $x(t_1) = R_e$, c'est-à-dire $t_1 = R_e / (v_A \cos \alpha)$, on ait $z(t_1) > h - h_e$. D'où

$$h - h_e < R_e \tan \alpha - \frac{g R_e^2}{2v_A^2 \cos^2 \alpha} = 0,89 \text{ cm}$$



- (b) À la limite, il faut que l'altitude maximale atteinte lors de la trajectoire vaille $h - h_e$. Or celle-ci est atteinte (par symétrie) pour $x = x_A/2$ que l'on impose alors égal à R_e . On a donc la même expression que précédemment mais avec α tel que $x_A = 2R_e = v_A^2 \sin(2\alpha) / g$, d'où,

$$\sin(2\alpha) = \frac{2R_e g}{v_A^2}$$

puisqu'on cherche la trajectoire la plus haute⁵,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\pi - \text{Arcsin} \left(\frac{2R_e g}{v_A^2} \right) \right] = 78^\circ \quad \text{et} \quad h - h_e = 4,9 \text{ cm}$$

- (c) Qualitativement, la vitesse de la bille en A est plus verticale d'où une dérive moins importante selon l'axe des x . En revanche, la durée Δt d'approche de la vitesse limite reste la même si l'on garde un critère de valeur relative de 5% à l'écart initial (légèrement plus grand dans ce cas).

4. négligeable dans l'air de toutes les façons.

5. On rappelle que $\sin \theta = x$ donne $\theta = \text{Arcsin}(x)$ ou $\theta = \pi - \text{Arcsin}(x)$

27. Kilomètre lancé***

1. Lorsqu'on avance horizontalement de 100 m, on descend verticalement de 60 m. Par conséquent

$$\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{60}{100}\right) \approx 31^\circ$$

2. Le coefficient μ est **sans dimension** car il compare des forces entre elles. En revanche, le coefficient β est tel que

$$[F] = [\beta v^2]$$

d'où

$$[\beta] = \frac{[F]}{[v^2]} = \frac{\text{M.L.T}^{-2}}{\text{L}^2.\text{T}^{-2}} = \text{M.L}^{-1}$$

3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le skieur est soumis à son poids \vec{P} , à la réaction du sol \vec{R} et à la force de frottement \vec{f} . On définit l'axe Ox parallèle à la direction de la piste vers le bas et l'axe Oy qui lui est perpendiculaire vers le haut. L'équilibre du skieur selon l'axe Oy (il ne s'enfonce pas dans la neige) s'écrit

$$-mg \cos \alpha + \|\vec{R}_n\| = 0$$

d'où

$$\|\vec{R}_t\| = \mu \|\vec{R}_n\| = \mu mg \cos \alpha$$

La projection sur Ox , axe du mouvement étudié, donne, en notant $\dot{x} = v$

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \|\vec{R}_t\| - \beta v^2$$

d'où l'équation différentielle vérifiée par v

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v^2 = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

La vitesse limite du skieur est la solution particulière constante de cette équation qui vaut alors

$$v_\ell = \sqrt{\frac{mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\beta}} = 1,7.10^2 \text{ m.s}^{-1} = 6,3.10^2 \text{ km.h}^{-1}$$

Elle est bien positive car on a orienté l'axe des x vers le bas de la piste.

4. En remplaçant v_ℓ dans l'équation différentielle, on peut la réécrire

$$\frac{m}{\beta} \frac{dv}{dt} = v_\ell^2 - v^2$$

d'où, en séparant les variables, la vitesse étant nulle à $t = 0$,

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{\beta}{m} \int_0^t dt$$

À l'aide de l'intégrale fournie par l'énoncé, on obtient, puisque $v(t) \leq v_\ell$,

$$\frac{1}{2v_\ell} \ln\left(\frac{v_\ell + v}{v_\ell - v}\right) = \frac{\beta t}{m}$$

d'où

$$v(t) = v_\ell \frac{e^{2\beta v_\ell t/m} - 1}{e^{2\beta v_\ell t/m} + 1} = v_\ell \text{th}\left(\frac{\beta v_\ell t}{m}\right)$$

En supposant que le skieur se trouve initialement en $x = 0$, l'évolution de la position est donnée par

$$x(t) = \int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v(t) dt$$

En posant $T = \beta v_\ell t / m$, on se ramène aux données de l'énoncé

$$x(t) = \int_0^t v_\ell \operatorname{th}\left(\frac{\beta v_\ell t}{m}\right) dt = v_\ell \frac{m}{\beta v_\ell} \int_0^T \operatorname{th}(T) dT = \frac{m}{\beta} \left[\ln(\operatorname{ch} T) \right]_0^T$$

d'où

$$x(t) = \frac{m}{\beta} \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\beta v_\ell t}{m} \right) \right]$$

5. Pour obtenir le temps t_1 mis pour atteindre le premier chronomètre positionné en $x_1 = 700$ m, il faut utiliser sa calculatrice pour inverser le cosinus hyperbolique

$$t_1 = \frac{m}{\beta v_\ell} \operatorname{Argch} \left(e^{\beta x_1 / m} \right) = 17 \text{ s}$$

En utilisant cette valeur, on calcule la vitesse v_1 en x_1 ainsi que la force de frottement f_1

$$v_1 = v_\ell \operatorname{th} \left(\frac{\beta v_\ell t_1}{m} \right) = 78 \text{ m.s}^{-1} = 2,8 \cdot 10^2 \text{ km.h}^{-1} \quad \text{et} \quad f_1 = \beta v_1^2 = 73 \text{ N}$$

ce qui correspond au poids d'une masse de 7,5 kg

6. On trouve une valeur supérieure à la valeur mesurée : le modèle sous-estime donc l'influence des forces de frottement (par exemple le coefficient β qui dépend de la posture du skieur). Pour améliorer encore les performances, il faudrait diminuer les valeurs de μ (par un meilleur fartage des skis) et de β (en améliorant l'aérodynamisme de la posture). On pourrait aussi choisir une piste encore plus pentue.

28. Modèle de Drude de conduction électrique***

- On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen dans lequel on étudie un électron soumis à son poids \vec{P} et à la force électrique $-e \vec{E}$.
- On peut négliger la force de pesanteur comparée à la force électrique à condition que le rapport des deux soit très petit devant 1. En particulier

$$\frac{mg}{eE} = \frac{mgL}{eU} \approx \frac{10^{-30} \times 10 \times 1}{10^{-19} \times 10} = 10^{-11} \ll 1$$

- On peut donc négliger la pesanteur dans toute la suite.

(a) L'équation différentielle en présence de la seule force électrique s'écrit alors

$$m \frac{dv}{dt} = -eE$$

(b) Le champ électrique étant constant, l'intégration est directe et

$$v(t) = v_0 - \frac{eE}{m} t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$$

L'électron acquiert théoriquement une vitesse infini ce qui n'est pas physique⁶

6. Dans l'absolu, il faudrait appliquer les principes de la relativité pour déjà éviter que sa vitesse dépasse celle de la lumière.

4. Pour contrer ce désagrément, on modélise la résistance au passage du courant (donc des électrons) par une force de frottement fluide.

(a) S'exercent alors sur l'électron les forces électrique $-e \vec{E}$ et de frottement $-b \vec{v}$.

(b) La projection du PFD sur l'axe horizontal donne

$$m \frac{dv}{dt} = -eE - b v$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = -\frac{eE}{m} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{b}$$

(c) On se retrouve devant une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre dont la résolution est bien connue depuis le cours d'électricité et donne, avec $v(0) = 0$,

$$v = -\frac{eE\tau}{m} (1 - e^{-t/\tau}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{eE\tau}{m}$$

(d) τ est un temps de relaxation, c'est-à-dire la durée caractéristique qui permet d'atteindre le régime permanent qui correspond à l'équilibre entre les forces de frottement et l'accélération due à la force électrique. Plus l'inertie du système (m) est grande, plus il est difficile de le mettre en branle et d'arriver au régime permanent (donc τ augmente). De même, plus les frottements sont faibles (b petit), plus le temps mis pour éliminer le régime transitoire est long (τ augmente). Remarquons que τ ne dépend que des caractéristiques propres au conducteur et ne dépend pas de E , par exemple, imposé de l'extérieur.

5. En régime permanent, la vitesse atteint sa valeur limite $v = -eE\tau/m$. Les électrons ayant traversé une surface S (orientée vers les x croissants) durant un intervalle de temps dt sont contenus dans le volume $dV = S v dt$. Le nombre dN de ces électrons vaut donc

$$dN = n dV = n S v dt = -\frac{n S e E \tau}{m} dt \quad \text{d'où} \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{n S e E \tau}{m}$$

6. Le courant s'écrit

$$I = \frac{dq}{dt} = -e \frac{dN}{dt} = \frac{n S e^2 E \tau}{m}$$

7. En remplaçant le champ électrique par son expression $E = U/L$, il vient $I = \frac{n e^2 \tau S}{m L} U$

En rapprochant cette expression de la loi d'Ohm $I = U/R$ et avec l'expression fournie de la résistance $R = L/(S\gamma)$, on en déduit l'expression de la conductivité

$$\gamma = \frac{n e^2 \tau}{m} = \frac{n e^2}{b}$$

Elle ne fait intervenir que les caractéristiques intrinsèques du conducteur comme sa densité en électrons et le coefficient de frottement fluide.

8. Les données numériques ne nous fournissent pas directement le coefficient b permettant le calcul de τ . En revanche, elles nous donnent sa conductivité γ_{Cu} ainsi que sa densité massique. Connaissant sa masse molaire, on peut en déduire sa densité molaire n_m et, en utilisant le nombre d'Avogadro \mathcal{N}_A , arriver à sa densité particulière n . Ainsi,

$$n = n_m \mathcal{N}_A = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} \mathcal{N}_A$$

d'où

$$\tau = \frac{m \gamma_{\text{Cu}}}{n e^2} = \frac{m \gamma_{\text{Cu}} M_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}} \mathcal{N}_A e^2} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad \text{et} \quad v = -\frac{eE\tau}{m} = -4,4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

9. Place à l'approche statistique du problème.

- (a) Les déviations brusques des électrons dans le métal sont expliquées par les chocs sur le réseau cristallin métallique. Le passage près d'un atome du réseau entraîne un brusque changement de direction lié à l'interaction électrostatique entre les deux particules.
- (b) En l'absence de champ électrique, les déviations étant aléatoires on a naturellement $\vec{u}_0 = \vec{0}$
- (c) Placé dans un champ électrique, les électrons sont soumis à la force associée, mais l'équation est « réinitialisée » tous les intervalles de temps τ .
- i. Le PFD s'applique de la même manière qu'en question 3a avec une vitesse initiale v_0 mais l'intégration n'est valable que jusqu'à $t = \tau$

$$\forall t \in [0; \tau] \quad v(t) = v_0 - \frac{eE}{m} t$$

- ii. Ainsi, la vitesse acquise par action du champ électrique est naturellement limitée car après la période τ , l'électron se comporte comme s'il avait une vitesse totalement arbitraire.
- iii. Du fait de cette « réinitialisation » périodique tous les τ , la vitesse moyenne globale se déduit de la prise de la moyenne sur une période τ :

$$\langle v(t) \rangle = \langle v \rangle + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{-eE}{m} t dt = 0 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{-eE}{m} \frac{t^2}{2} \right]_0^\tau = -\frac{eE\tau}{2m}$$

On a bien $\langle \vec{v} \rangle = \mu \vec{E}$ avec $\mu = \frac{-e\tau}{2m}$

À un facteur deux près (qui dépend de la manière dont on définit τ dans les deux approches), on retrouve bien le même résultat qu'avec le modèle de frottement fluide.

