Cinématique

1. Starwars* None available

2. Trotteuse None available

3. Mouvement des aiguilles d'une montre* None available

4. Mesure de la vitesse d'une balle* None available

5. Crevaison* None available

6. Marche à l'ombre* None available

7. Ballon sonde* None available

8. Touché-coulé!** None available

9. La mouche et les trains**

1. SCHEMA

2. Comme la mouche va trois fois plus vite que les trains, elle fait son premier demi-tour quand le train partant de Marseille a parcouru une distance D/4 (et elle une distance 3D/4). À ce moment là, la distance entre les deux trains est de D/2 (chacun ayant parcouru D/4). Le demi-tour suivant a lieu quand la mouche a parcouru les 3/4 de la distance restante (soit D/2), c'est-à-dire une distance 3D/8. Les trains sont alors distants de D/4 (chacun ayant avancé de D/8), etc... On voit qu'à chaque demi-tour, la distance entre les trains a été divisée par 2. Il est donc nécessaire de faire une infinité de demi-tour (donc de division par deux) pour que la distance entre les deux trains vaille 0 (cette distance $D/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini avec n le nombre de demi-tours).
3. Comme vu plus haut, le n^e trajet a pour longueur $3D/2 \times 1/2^n$.
4. de sorte que la distance totale vaille

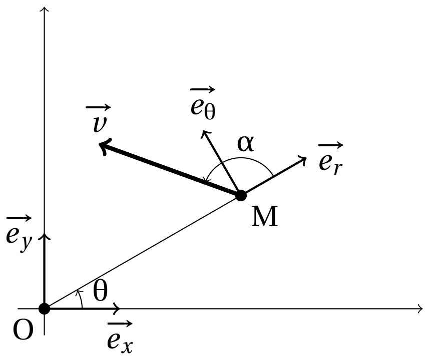
$$\begin{aligned}
\mathrm{D_{tot}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\mathrm{D}}{2} \times \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{3\mathrm{D}}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} && \text{avec } i = n-1 \\
&= \frac{3\mathrm{D}}{4} \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} 2^{-i} \\
&= \frac{3\mathrm{D}}{4} \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1-2^{-(\mathrm{N}+1)}}{1-2^{-1}} \\
&= \frac{3\mathrm{D}}{4} \lim_{\mathrm{N}\to\infty} 2-2^{-\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{D_{tot}} = \frac{3\mathrm{D}}{2}}$$

Remarque : on aurait pu obtenir ce résultat directement en se disant que la mouche se fait écraser quand les deux trains ont parcouru chacun la moitié du chemin, soit D/2. Comme la mouche va trois fois plus vite que les trains, elle aura parcouru trois fois plus de distance donc une distance totale 3D/2, cqfd...

10. Vol d'insecte**

1. La vitesse est qualitativement orientée vers le point central, donc l'insecte devrait finir par s'y écraser.



2. α étant l'angle entre $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{v}$, on doit avoir

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v_0 \cos\alpha\, \overrightarrow{e_r} + v_0 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \overrightarrow{e_\theta} = v_0 \left(\cos\alpha\, \overrightarrow{e_r} + \sin\alpha\, \overrightarrow{e_\theta}\right)}$$

3. Comme on sait en outre que la vitesse s'écrit en coordonnées polaires $\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$, on a en projection suivant $\overrightarrow{e_r}$ des deux expressions que

$$\dot{r} = v_0 \cos\alpha = \mathrm{C^{te}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r(t) = r_0 + (v_0 \cos\alpha) \times t}$$

en s'assurant que l'on a bien $r(0) = r_0$. À noter que cette distance r est bien décroissante car l'énoncé suppose α entre π/2 et π donc $\cos\alpha < 0$.

Une fois le sort de $r(t)$ réglé, on peut faire la même chose en projetant les deux expressions de $\overrightarrow{v}(t)$ selon $\overrightarrow{e_\theta}$ pour obtenir l'équation différentielle

$$r\dot{\theta} = v_0 \sin\alpha \qquad \text{soit} \qquad \dot{\theta} = \frac{v_0 \sin\alpha}{r(t)} = \frac{v_0 \cos\alpha}{r(t)} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\dot{r}}{r} \times \tan\alpha$$

On peut à présent intégrer par rapport au temps de part et d'autre de cette égalité pour obtenir

$$[\theta(t)]_0^t = \tan\alpha \times [\ln(r(t))]_0^t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta(t) = \tan\alpha \times \ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)}$$

en prenant en compte l'hypothèse de l'énoncé qui dit que $\theta(0) = 0$: l'insecte démarre sur l'axe Ox.

4. L'équation polaire de la trajectoire revient à déterminer l'expression de r vue comme une fonction de θ, soit $r = f(\theta)$. On voit qu'il suffit d'inverser la relation précédemment encadrée

$$\boxed{r(\theta) = r_0\,\mathrm{e}^{\theta/\tan\alpha}}$$

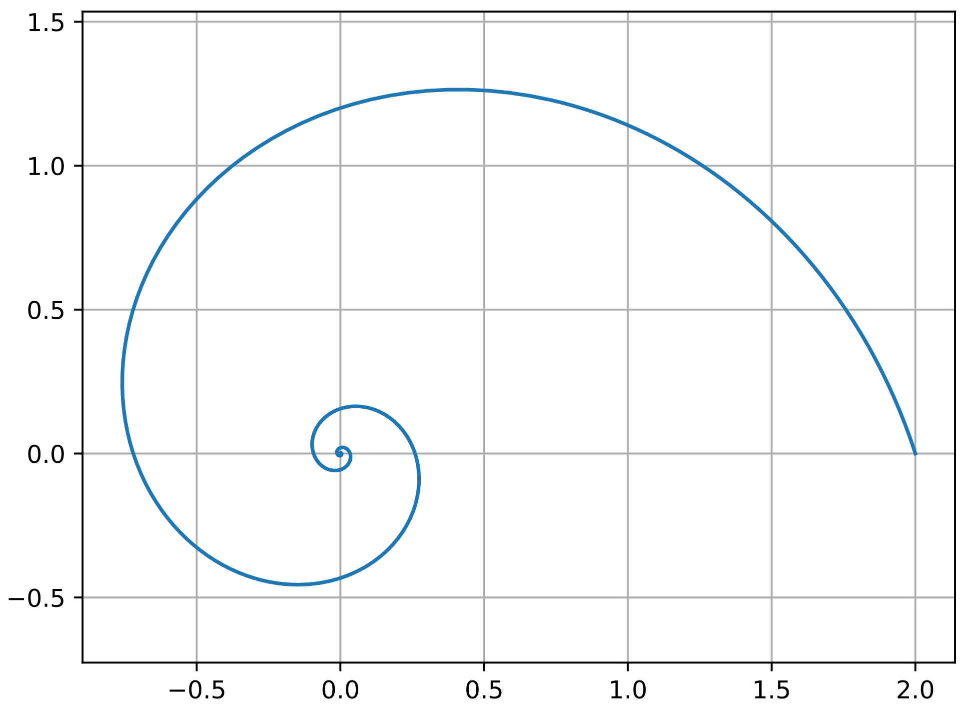
Il s'agit de l'équation d'une spirale exponentielle qui tend vers 0 (encore une fois parce qu'avec la valeur choisie de α, on a $\tan\alpha < 0$).

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

theta = np.linspace(0,8*np.pi,1000) # 1000 points sur 4 tours
alpha = np.pi/2 + np.pi/10
r0    = 2
r     = r0*np.exp(theta/np.tan(alpha))

# On se remet en cartésiennes
x = r*np.cos(theta)
y = r*np.sin(theta)

plt.plot(x,y)
plt.axis('equal') # Pour que les échelles soient les mêmes sur les deux axes
plt.grid()
plt.savefig('PS/meca/vol_d_insecte_spirale.eps')
plt.clf()
```



5. L'insecte atteint le point lumineux quand $r(t) = 0$, c'est-à-dire pour

$$\boxed{t_{\text{impact}} = -\frac{r_0}{v_0 \cos\alpha}}$$

là encore bien positif car $\cos\alpha < 0$ d'après le choix de l'énoncé.

6. Le nombre de tour à l'instant t est donné par la partie entière de $\theta(t)/2\pi$ (un tour fait 2π radians). Or, lorsque t tend vers t_{impact}, on a $r(t)$ qui tend vers 0 (logique...) et donc $\theta(t)$ qui tend vers $+\infty$ (là encore $\tan\alpha < 0$). L'insecte fait donc, dans ce modèle, un nombre infini de tours. À noter que cela découle naturellement du caractère ponctuel de la source lumineuse. Si on ne suppose plus l'ampoule de taille nulle, le temps d'impact reste fini de même que le nombre de tours effectués.

11. Mécanique céleste** None available

12. Sans trainer** None available

13. Course-poursuite***

1. Discutons des différents cas :
   - Si le chien va bien moins vite que le maître (il s'appelle peut-être Flash?), la trajectoire du chien sera quasi-horizontale, visant un point déjà presque à l'infini.
   - Si le chien est juste un peu moins rapide, la va se rapprocher asymptotiquement de l'horizontale après un départ avec une tangente verticale.
   - Si le chien va aussi vite que son maître, il va se rapprocher aussi asymptotiqmenet de l'horizontale, juste de manière plus rapide que précédemment.
   - Si le chien est un peu plus rapide que son maître, il va finir par tacler au niveau des mollets après une distance finie, donc tape l'axe des abscisses avec une dérivée non nulle.
   - Si le chien s'appelle Flash, il va réussir à tacler alors que le maître ne s'est presque pas déplacé, donc la courbe restera presque toujours verticale.

2. Plaçons-nous dans le repère polaire centré sur le chien. On a alors par définition $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho}$. Dans ce repère, la vitesse vaut, par définition d'une vitesse en coordonnées polaires (ρ,θ),
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \dot\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho\,\dot\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$
D'autre part, comme $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{CO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, on peut dériver de chaque côté pour obtenir
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{e_x} - v\,\overrightarrow{e_\rho}$$
Or, en faisant un petit dessin, on voit que
$$\overrightarrow{e_x} = (\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_\rho})\,\overrightarrow{e_\rho} + (\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_\theta})\,\overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$
de sorte que
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = (v_0\cos\theta - v)\,\overrightarrow{e_\rho} - v_0\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$
L'égalisation des deux expressions de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}$ permet d'obtenir le système suivant après projections respectivement sur $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$
$$\boxed{\begin{cases} \dot\rho = v_0\cos\theta - v \\ \rho\,\dot\theta = -v_0\sin\theta \end{cases}}$$

3. Si la vitesse du chien est égale à celle du maître, soit $v = v_0$, le système s'écrit
$$\begin{cases} \dot\rho = v_0\,(\cos\theta - 1) \\ \rho\,\dot\theta = -v_0\sin\theta \end{cases}$$
Bidouillons un peu ces équations au brouillon (si on nous demande de les résoudre, c'est qu'il doit y avoir un « truc » quelque part), par exemple en multipliant la première par $\cos\theta$ (histoire de faire apparaître du $\cos^2\theta$) et la seconde par $-\sin\theta$ (histoire de faire apparaître du $\sin^2\theta$). Alors on a
$$\begin{cases} \dot\rho\cos\theta = v_0\cos^2\theta - v_0\cos\theta \\ -\rho\,\dot\theta\sin\theta = v_0\sin^2\theta \end{cases}$$
En sommant ces deux équation, on obtient

$$\dot\rho\,\cos\theta - \rho\,\dot\theta\,\sin\theta = v_0\,\sin^2\theta + v_0\,\cos^2\theta - v_0\,\cos\theta = v_0 - v_0\cos\theta = -\dot\rho$$

ou encore $$\dot\rho\,(1+\cos\theta) + \rho\times(-\dot\theta\sin\theta) = 0$$

Diantre, on reconnaît dans le membre de gauche la dérivée temportelle de $\rho\,(1+\cos\theta)$, de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\rho\,(1+\cos\theta)\big) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \rho\,(1+\cos\theta) = \mathrm{C^{te}} = d$$

où la constante a été déterminée puisqu'on sait qu'à $t=0$, on a $\rho = d$ avec $\theta = \pi/2$. On en déduit l'équation polaire de la trajectoire

$$\boxed{\rho = \frac{d}{1+\cos\theta}}$$

Bien sûr, il s'agit là de l'évolution du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$, et pour retrouver le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ qui nous intéresse, il faut regarder $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{CM}}$, mais $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = v_0\,t\,\overrightarrow{e_x}$ est particulièrement simple car le maître se contente d'une course en ligne droite. Ainsi, en projetant $\overrightarrow{e_\rho}$ sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$, on peut obtenir assez facilement que

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = v_0\,t\,\overrightarrow{e_x} - \rho\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}\right) = (v_0\,t - \rho\cos\theta)\,\overrightarrow{e_x} - \rho\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

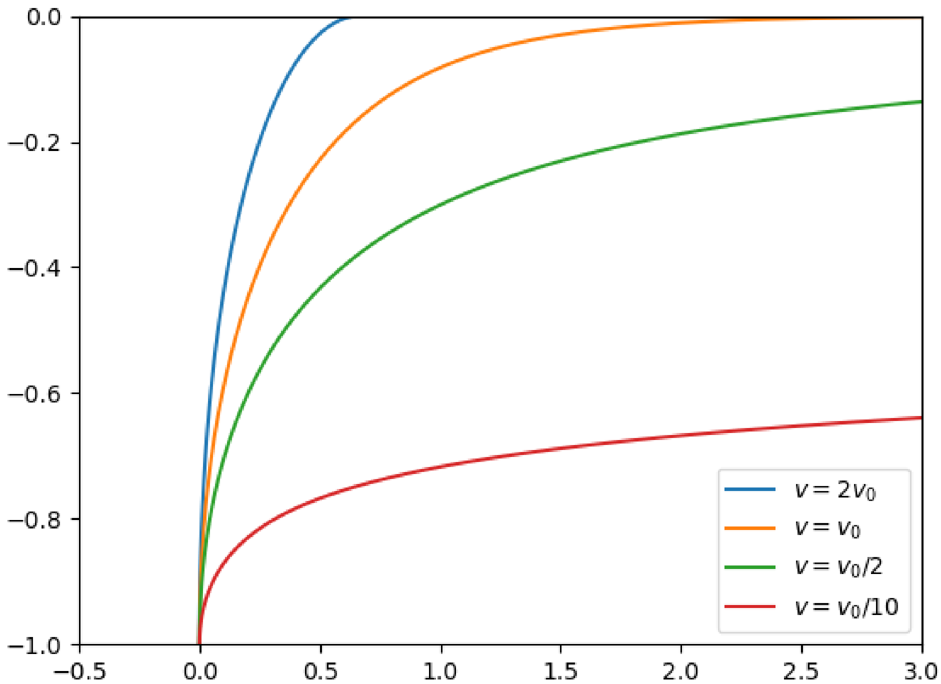
```python
import numpy as np
import scipy as sp
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt

def integre_et_affiche(rapport_v_sur_v0,label):
    v0 = 1.0
    v  = rapport_v_sur_v0 * v0
    print('v=',v)
    rho0   = 1.0
    theta0 = np.pi/2
    # Définition du système différentiel pour intégration par odeint
    def f(y,t):
        rho,theta = y # Le vecteur y donne d'abord rho puis theta
        rhopoint   = v0*np.cos(theta) - v    # Équation donnant rhopoint
        thetapoint = -v0*np.sin(theta) / rho # Équation donnant thetapoint
        return [rhopoint,thetapoint] # On renvoit la dérivée de y

t = np.linspace(0,100,8000)
    sol = sp.integrate.odeint(f,[rho0,theta0],t)
    rho   = sol[:,0] # rho est le premier élément de chaque doublet
    theta = sol[:,1] # theta est le second élément de chaque doublet
    # On ne veut que la zone où rho est positif (sinon, il y a plaquage)
    t = t[rho>0]
    theta = theta[rho>0]
    rho = rho[rho>0]
    # Détermination des coordonnées
    XC = v0*t - rho*np.cos(theta)
    YC = -rho*np.sin(theta)
    # Affichage
```

```
    plt.plot(XC,YC,label=label)

integre_et_affiche(2,label='$v=2v_0$')
integre_et_affiche(1,label='$v=v_0$')
integre_et_affiche(0.5,label='$v=v_0/2$')
integre_et_affiche(0.1,label='$v=v_0/10$')
plt.legend(loc='lower right')
plt.ylim(-1,0)
plt.xlim(-0.5,3)
plt.savefig('PS/meca/course-poursuite.png')
plt.clf()
```



14. Course de moto**

1. Comme la vitesse de la moto est constante dans le virage, le motard se retrouve en sortie de virage dans le même état cinématique qu'il y était à l'entrée. Si on se limite à calculer le temps passé en ligne droite, tout se passe comme si il restait continuellement dans son mouvement à accélération constante (on « zappe » les virages). Ainsi, comme $\ddot{x} = a_0 = \mathrm{C^{te}}$, en partant à vitesse nulle ($\dot{x}(0) = 0$) de l'origine ($x(0) = 0$), on a

$$\dot{x}(t) = a_0\,t \qquad \text{soit} \qquad x(t) = a_0\,\frac{t^2}{2} \qquad \text{ou encore} \qquad t_{x,\text{ ligne droite}} = \sqrt{\frac{2x}{a_0}}$$

soit

$$\boxed{t_{2\mathrm{L},\text{ ligne droite}} = \sqrt{\frac{4\mathrm{L}}{a_0}}}$$

2. Le premier motard arrive à l'entrée du premier virage après avoir parcouru une distance $x = \mathrm{L}/2$ en ligne droite à accélération constante a_0. Ainsi, sa vitesse vaut

$$v_{1^{\text{er}}\,\text{virage}} = a_0\, t_{\text{L}/2,\,\text{ligne droite}} = a_0 \sqrt{\frac{\text{L}}{a_0}} = \sqrt{a_0\,\text{L}}$$

Le temps passé dans le virage est simplement donné par le temps nécessaire pour parcourir la distance πR (demi-périmètre d'un cercle de rayon R) à la vitesse $v_{1^{\text{er}}\,\text{virage}}$, soit

$$\boxed{t_{1^{\text{er}}\,\text{virage}} = \frac{\pi\text{R}}{v_{1^{\text{er}}\,\text{virage}}} = \frac{\pi\text{R}}{\sqrt{a_0\,\text{L}}}}$$

3. Le motard aborde le second virage après avoir parcouru une distance $x = 3\text{L}/2$ en ligne droite, soit avec une vitesse

$$v_{2^{\text{e}}\,\text{virage}} = a_0\, t_{3\text{L}/2,\,\text{ligne droite}} = a_0 \sqrt{\frac{3\text{L}}{a_0}} = \sqrt{3a_0\,\text{L}}$$

Ainsi,
$$\boxed{t_{2^{\text{e}}\,\text{virage}} = \frac{\pi\text{R}}{v_{2^{\text{e}}\,\text{virage}}} = \frac{\pi\text{R}}{\sqrt{3a_0\,\text{L}}}}$$

4. Pour effectuer n tours, la première moto parcourt une distance $2n\text{L}$ en ligne droite et aborde successivement $2n$ virages. Or, pour atteindre le k^{e} virage, la moto doit avoir parcourue une distance $(2k-1)\text{L}/2$ en ligne droite à accélération constante depuis son départ arrêté. Elle y arrive donc avec une vitesse

$$v_{k^{\text{e}}\,\text{virage}} = a_0 \sqrt{\frac{(2k-1)\text{L}}{a_0}} = \sqrt{(2k-1)\,a_0\,\text{L}}$$

Elle y passe donc un temps
$$t_{k^{\text{e}}\,\text{virage}} = \frac{\pi\text{R}}{\sqrt{(2k-1)\,a_0\,\text{L}}}$$

Pour obtenir le temps total passé sur le circuit pendant n tours, il faut sommer les différents temps passés en virage au temps passé en ligne droite, soit

$$\boxed{t_n = t_{2n\text{L},\,\text{ligne droite}} + \sum_{k=1}^{2n} t_{k^{\text{e}}\,\text{virage}} = \overbrace{\sqrt{\frac{4n\text{L}}{a_0}}}^{\text{lignes droites}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi\text{R}}{\sqrt{(2k-1)\,a_0\,\text{L}}}}^{\text{virages}}}$$

5. La deuxième moto a la même relation entre le temps passé en ligne droite et la distance parcourue. Pour combler son handicap de distance $\text{L}/2$, elle doit donc passer un temps

$$\boxed{t_{\text{L}/2,\,\text{ligne droite}} = \sqrt{\frac{\text{L}}{a_0}}}$$

6. Pour compléter un « vrai » tour, la moto doit parcourir une distance totale (avec handicap) de $5\text{L}/2$. Le temps entre deux passage de la ligne vaut donc

$$\boxed{t'_{\text{ligne droite, }1^{\text{er}}\,\text{tour}} = t_{5\text{L}/2,\,\text{ligne droite}} - t_{\text{L}/2,\,\text{ligne droite}} = \sqrt{\frac{5\text{L}}{a_0}} - \sqrt{\frac{\text{L}}{a_0}}}$$

7. Le premier virage est atteint après une distance L, soit

$$v'_{1^{\text{er}}\,\text{virage}} = a_0\, t_{\text{L},\,\text{ligne droite}} = a_0 \sqrt{\frac{2\text{L}}{a_0}} = \sqrt{2a_0\,\text{L}}$$

Ainsi,
$$\boxed{t'_{1^{\text{er}}\,\text{virage}} = \frac{\pi\text{R}}{v'_{1^{\text{er}}\,\text{virage}}} = \frac{\pi\text{R}}{\sqrt{2a_0\,\text{L}}}}$$

8. Le second virage l'est après une distance 2L, soit

$$v'_{2^\mathrm{e}\,\text{virage}} = a_0\, t_{2\mathrm{L},\,\text{ligne droite}} = a_0\sqrt{\frac{4\mathrm{L}}{a_0}} = \sqrt{4a_0\,\mathrm{L}}$$

Ainsi,
$$\boxed{t'_{2^\mathrm{e}\,\text{virage}} = \frac{\pi\mathrm{R}}{v'_{2^\mathrm{e}\,\text{virage}}} = \frac{\pi\mathrm{R}}{\sqrt{4a_0\,\mathrm{L}}}}$$

9. De même que précédemment, on peut remonter jusqu'au temps passé dans le k^e virage par le second motard qui vaut

$$t'_{k^\mathrm{e}\,\text{virage}} = \frac{\pi\mathrm{R}}{\sqrt{2ka_0\,\mathrm{L}}}$$

Comme de plus, le motard aura parcouru une distance $2n\mathrm{L}+\mathrm{L}/2$ en ligne droite au bout de n tours, on a bien

$$\boxed{t'_n = t_{2n\mathrm{L}+\mathrm{L}/2,\,\text{ligne droite}} + \sum_{k=1}^{2n} t'_{k^\mathrm{e}\,\text{virage}} = \sqrt{\frac{4n\mathrm{L}+\mathrm{L}}{a_0}} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{\pi\mathrm{R}}{\sqrt{2ka_0\,\mathrm{L}}}}$$

10. Applications numériques

(a) Les motos passant de 0 à $v_{100} = 100\ \mathrm{km.h^{-1}}$ en $t_{100} = 7{,}89$ s, on a [1]

$$\boxed{a_0 = \frac{v_{100}}{t_{100}} = 3{,}52\ \mathrm{m.s^{-2}}}$$

(b) Après 3 tours, le motard 1 aura parcouru une distance 6L en ligne droite alors que le motard 2 en aura parcouru $6\mathrm{L}+\mathrm{L}/2$. Par les mêmes artifices que précédemment, on calcule

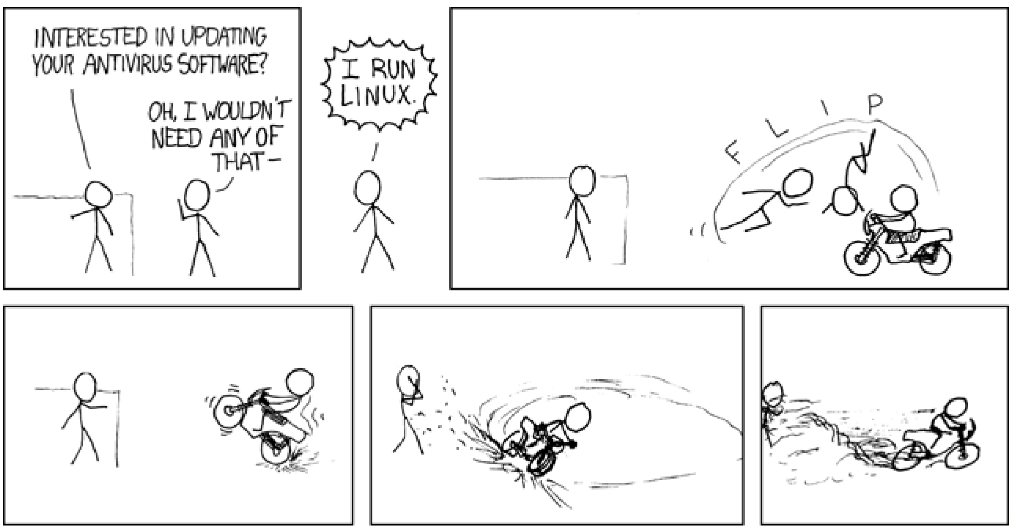
$$\boxed{v_{\text{arrivée, motard 1}} = \sqrt{12a_0\,\mathrm{L}} = 65{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}} = 234\ \mathrm{km.h^{-1}}}$$

et
$$\boxed{v_{\text{arrivée, motard 2}} = \sqrt{13a_0\,\mathrm{L}} = 67{,}7\ \mathrm{m.s^{-1}} = 244\ \mathrm{km.h^{-1}}}$$

(c) Pour calculer les temps passés, il suffit d'appliquer la formule avec $n = 3$. Il vient

$$\boxed{t_3 = 31{,}2\ \mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad t'_3 = 30{,}0\ \mathrm{s}}$$

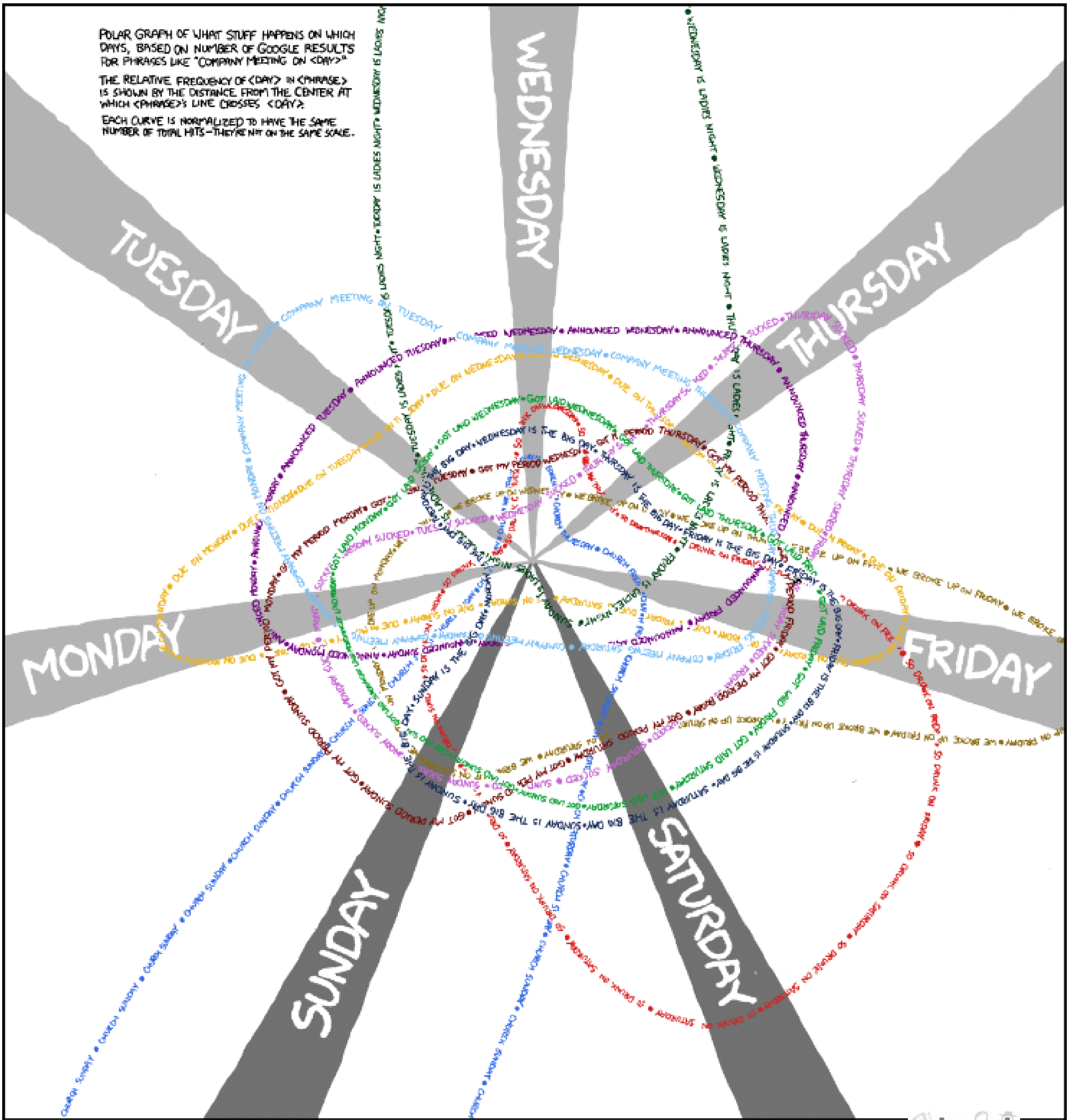
(d) Comme $t'_3 < t_3$, le second motard a effectivement eu raison de parier ! En fait, on peut même calculer que $t_1 = 17{,}3$ s et $t'_1 = 17{,}0$ s : les dés sont jetés dès le premier tour.



xkcd.com

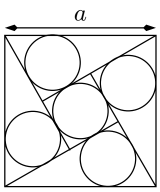
1. En n'oubliant pas de repasser la vitesse en $\mathrm{m.s^{-1}}$.

We actually stand around the antivirus displays with the Mac users just waiting for someone to ask.



xkcd.com

Not pictured:
the elongated Halley's-Comet-like orbit of every Rebecca Black lyric.



r/a ?