Forces de Laplace

1. Sélectionner les orientations correctes https://youtu.be/nuIbV-iBHbw?t=545

2. Calcul de forces de Laplace* https://youtu.be/6wfmF_RmsVc?t=820

3. Définition légale de l'ampère* https://youtu.be/nuIbV-iBHbw?t=653

4. Déplacement d'un fil dans le champ de deux autres* None available

5. Cadre dans un champ magnétique* https://youtu.be/nuIbV-iBHbw?t=916

6. Déplacement pendulaire d'une barre* https://youtu.be/6wfmF_RmsVc

7. Force sur un cadre de courant* None available

8. Force induite par un fil sur un cadre* https://youtu.be/6wfmF_RmsVc?t=1477

9. Rail de Laplace* https://youtu.be/6wfmF_RmsVc?t=2131

10. Cadre pour ampèremètre à aiguille*** https://youtu.be/6wfmF_RmsVc?t=2339

Pour se mettre d'accord sur les vecteurs, disons que le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ donne la direction de $\overrightarrow{e_x}$ (soit $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\,\overrightarrow{e_x}$), l'axe Δ donne la direction de $\overrightarrow{e_z}$ (vers le haut) et le 3$^{\mathrm{e}}$ vecteur directeur $\overrightarrow{e_y}$ se plante dans la feuille de sorte que le trièdre $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ soit direct.

1. Forces de Laplace
   (a) Les forces sur les côtés NM et PO n'auront qu'une composante suivant Δ de sorte qu'elles ne participeront pas à la rotation sur cet axe (moment nul selon cet axe). Celles sur MP et ON, quant-à-elles sont perpendiculaire à l'axe de la feuille, données respectivement par la règle de la main droite : la force sur MP sort de la feuille alors que celle sur ON rentre dans la feuille.
   (b) On se retrouve dans le cas d'une barre de direction fixe dans un champ uniforme. On a alors
   $$\overrightarrow{\mathrm{F_{MP}}} = \mathrm{I}\,\overrightarrow{\mathrm{MP}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{I}\,(-a\,\overrightarrow{e_z})\wedge\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_x} = -\mathrm{I}a\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{F_{ON}}} = \mathrm{I}\,\overrightarrow{\mathrm{ON}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathrm{I}\,(a\,\overrightarrow{e_z})\wedge\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_x} = \mathrm{I}a\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_y}$$
   Bien sûr, il ne faut pas oublier qu'il y a n spires au total, ce qui démultiplie d'autant les forces, de sorte qu'en fait
   $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F_{MP}}} = -n\mathrm{I}a\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{F_{ON}}} = n\mathrm{I}a\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_y}}$$
2. Équilibre du cadre soumis à un courant
   (a) À l'équilibre, le moment de torsion compense parfaitement le moment des forces de Laplace. Comme la rotation d'angle α fait passer le bras de levier de $a/2$ à $(a\cos\alpha)/2$ pour chaque force de Laplace, on a la relation
   $$\frac{a\cos\alpha}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{F_{MP}}}\| + \frac{a\cos\alpha}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{F_{ON}}}\| = \mathrm{C}\alpha$$
   ce que l'on peut réécrire, en remplaçant le tout
   $$\boxed{n\mathrm{I}a^2\mathrm{B}\,\cos\alpha = \mathrm{C}\alpha}$$

(b) Pour trouver une expression explicite de α en fonction de I, il faudrait connaître une fonction réciproque de $x \mapsto x/\cos(x)$, ce qui n'est pas évident de prime abord. Néanmoins, si on suppose que l'angle reste relativement petit, on peut approximer $\cos\alpha$ à 1, d'où l'expression

$$\boxed{\alpha = \frac{n\mathrm{I}a^2\mathrm{B}\,\cos\alpha}{\mathrm{C}} \approx \frac{n\mathrm{I}a^2\mathrm{B}}{\mathrm{C}}}$$

(c) Il est bien plus facile d'isoler I connaissant α que l'inverse (demandé à la question précédente). On a donc

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{\mathrm{C}\alpha}{na^2\mathrm{B}\,\cos\alpha} = 1.10^{-6}\ \mathrm{A} = 1\ \mu\mathrm{A}}$$

On se rend compte que ce galvanomètre peut alors être très précis pour mesurer de très faibles courants.

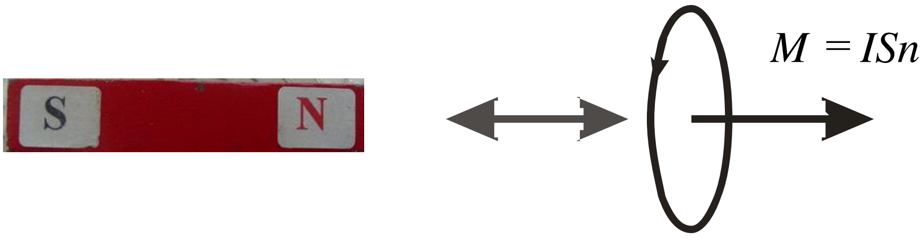
11. Mesure de moment magnétique par oscillation* ** https://youtu.be/6wfmF_RmsVc?t=3024

1. **Équations différentielle des oscillations**

(a) L'aiguille de la boussole est un petit aimant et à chaque aimant, on peut faire correspondre un circuit plan pour lequel on peut définir un moment magnétique défini par

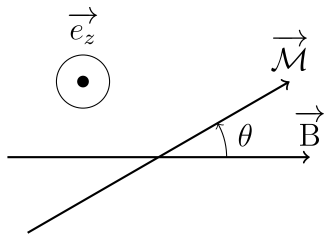
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = i\,\mathcal{S}\,\overrightarrow{n} = i\,\overrightarrow{\mathcal{S}}}$$

où $\overrightarrow{n}$ est la normale au plan du circuit déterminée par la règle de la main droite à partir de l'orientation imposée par le choix du sens positif du courant pour le circuit.



ATTENTION : le i qui est présent dans cette question n'a en fait *rien à voir* avec celui qui apparaît deux questions plus loin, c'était juste une petite question de cours qui avait pour but de vous souffler l'unité dans laquelle il faudra exprimer $\mathcal{M}$ à la fin de l'exercice.

(b) L'aiguille peut tourner librement autour de l'axe vertical. Ni le poids, ni la réaction du support (la point sur laquelle elle est posée) ne contribuent aux moments selon cet axe puisqu'ils y sont parallèles. Seule l'action du couple magnétique $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$ est non nulle après projection selon $\overrightarrow{e_z}$. Le moment du couple se calcule de la sorte quand $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont décalés d'un angle $\theta = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{B}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}})$.



$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} = \|\overrightarrow{\mathcal{M}}\| \times \|\overrightarrow{\mathrm{B}}\| \times \sin(\widehat{\overrightarrow{\mathcal{M}}, \overrightarrow{\mathrm{B}}})\overrightarrow{e_z} = -\mathcal{M} \times \mathrm{B} \times \sin(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{B}}, \overrightarrow{\mathcal{M}}})\,\overrightarrow{e_z} = -\mathcal{M}\mathrm{B}\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué par rapport à l'axe de rotation vertical donne alors

$$\mathrm{J}\,\ddot{\theta} = \overrightarrow{\Gamma}\cdot\overrightarrow{e_z} = -\mathcal{M}\mathrm{B}\sin\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}\mathrm{B}}{\mathrm{J}}\sin\theta = 0}$$

ce qui, dans l'approximation des petits angles, se ramène à une équation d'oscillateur harmonique (qui montre bien que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable puisqu'on oscille autour d'elle)

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}\mathrm{B}}{\mathrm{J}}\,\theta = 0}$$

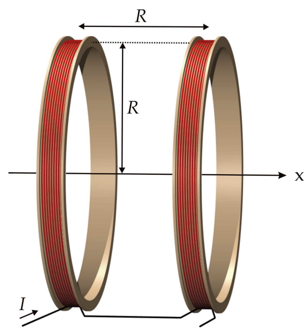
(c) De cette équation, on tire

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}\mathrm{B}}{\mathrm{J}}} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathcal{M}\mathrm{B}}}$$

Or le champ magnétique produit par les bobines de Helmholtz est nécessairement proportionnel au courant i qui les traverse, donc la période devrait dépendre de i (si le champ des bobines est prédominant dans le champ total auquel est soumise la boussole).

2. **Estimation du moment magnétique**

(a) Chaque bobine est à une distance $d = \pm\,\mathrm{R}/2$ du point où nous intéresse le champ magnétique (mais comme la fonction est paire en d, on se retrouve simplement avec un champ double). En outre, chaque bobine est constituée de N spires. Le champ total au point O est donc



$$\boxed{\mathrm{B_{Helm}} = 2\mathrm{N} \times \frac{\mu_0 i}{2\mathrm{R}}\,\frac{\mathrm{R}^3}{\left(\mathrm{R}^2 + \left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \mathrm{N} \times \frac{\mu_0 i}{\mathrm{R}}\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}}$$

(b) L'application numérique donne $\boxed{\mathrm{B_{Helm}} = 5{,}3\ \mu\mathrm{T}}$

Très clairement, le champ terrestre (presque 4 fois plus grand !) n'est pas négligeable dans cette affaire et il va falloir non pas seulement considérer $\mathrm{B_{Helm}}$, mais $\mathrm{B_{tot}} = \mathrm{B_{Helm}} + \mathrm{B_{terr}} \approx 25\ \mu\mathrm{T}$ en supposant que les bobines ont été orientées dans l'axe des pôles pour que la somme soit directe (sinon, cela dépendra de la direction dudit axe).

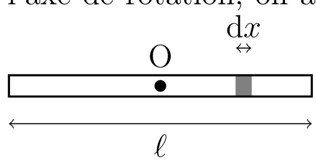
(c) On a montré que la période s'écrivait

$$\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathcal{M}\mathrm{B}}}$$

Il faut donc obtenir une estimation du moment d'inertie J de l'aiguille aimantée. Si l'on prend une longueur totale $\ell = 1$ cm pour une masse $m = 10$ g, on sait que ce moment sera inférieur à $m(\ell/2)^2$ puisque tout le corps de l'aiguille est à une distance inférieure ou égale à $\ell/2$ de l'axe de rotation. On peut donc isoler

$$\boxed{\mathcal{M} = \left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}\right)^2 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{B_{tot}}} \leqslant \left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}\right)^2 \frac{m\ell^2}{4\mathrm{B_{tot}}} = 0{,}7\ \mathrm{A.m^2}}$$

Revenons deux secondes sur le calcul du moment d'inertie associée à une barre de longueur totale ℓ et de masse m tournant autour d'un axe passant par son centre de gravité. Comme dit plus haut, ce moment d'inertie est forcément inférieur à celui qu'auraient deux masses $m/2$ chacunes placées à une distance $\ell/2$ de l'axe de rotation, on a donc déjà



$$\mathrm{J} \leqslant \frac{m}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{4}$$

Découpons notre barre en petits morceaux de longueur dx et de masse dm. Comme la masse est régulièrement répartie sur toute la barre, on a une simple proportionnalité entre la longueur de barre considérée et la masse associée. Ainsi,

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

Il ne reste plus qu'à écrire la définition du moment d'inertie (en prenant bien sûr l'origine des x au niveau du milieu de la barre) :

$$\mathrm{J} = \sum_i m_i\,{r_i}^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathrm{d}m \times x^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m}{\ell}\,x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{mx^3}{3\ell}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m\ell^2}{12}$$

♫