

Définitions

1 Fluide

Un fluide est un corps n'ayant pas de forme propre et qui épouse la forme de son contenant. En d'autres termes, c'est un matériau se déformant très facilement.

? Le saviez-vous?

The first Professor of Physics at University of Queensland, Brisbane, Australia, Professor Thomas Parnell, began an experiment in 1927 to illustrate that everyday materials can exhibit quite surprising properties. The experiment demonstrates the fluidity and high viscosity of pitch, a derivative of tar once used for waterproofing boats. At room temperature pitch feels solid – even brittle – and can easily be shattered with a blow from a hammer. It's quite amazing then, to see that pitch at room temperature is actually fluid!

In 1927 Professor Parnell heated a sample of pitch and poured it into a glass funnel with a sealed stem. Three years were allowed for the pitch to settle, and in 1930 the sealed stem was cut. From that date on the pitch has slowly dripped out of the funnel – so slowly that now, 83 years later, the ninth drop is only just fully formed.

The experiment was set up as a demonstration and is not kept under special environmental conditions (it is actually kept in a display cabinet in the foyer of the Department), so the rate of flow of the pitch varies with seasonal changes in temperature. Nonetheless, it is possible to make an estimate of the viscosity of this sample of pitch (R. Edgeworth, B.J. Dalton and T. Parnell, Eur. J. Phys (1984) 198-200). It turns out to be about 100 billion times more viscous than water! In the 83 years that the pitch has been dripping, no-one has ever seen the drop fall. If you're interested in trying your luck, or at least just having a look at the experiment, you can watch the live view below. You can also see students of The University of Queensland milling around outside the cabinet, so it is more exciting than watching grass grow!

Voir https://www.youtube.com/watch?v=BZvsrOciU_Q pour un TimeLapse
et <https://youtu.be/SkpZAg4RkGI> pour un résumé historique.

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de la conductivité thermique. En d'autres termes, un fluide parfait est un fluide parfaitement déformable à toutes vitesses.

2 Pression

Si le fluide est au repos, il est possible de définir la pression en un point. Celle-ci est reliée à la force qui s'exercerait si on mettait une surface orientée (du fluide *vers* la paroi) en ce point par la relation

$$\vec{dF} = P d\vec{S}$$

La pression dépend du lieu où l'on se trouve : c'est une propriété *locale* et l'on définit donc la pression *en un point* du fluide. Elle s'exprime en Pascal (Pa) qui équivaut à une force d'1 N exercée sur 1 m² (La pression est une force par unité de surface). C'est donc une toute « petite » unité comparée aux valeurs usuelles des pressions atmosphérique :

$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

À noter que la pression atmosphérique varie selon les conditions météo entre 980 et 1040 mbar (ou hPa).

3 Forces surfaciques, forces volumiques

Une force de pression est *a priori* une force surfacique, c'est-à-dire qu'elle se calcule en sommant sur une surface alors que les forces de pesanteurs sont des forces volumiques : elles s'exercent au centre de gravité de tout petit élément de volume et on calcule la résultante en sommant sur le volume entier de l'objet étudié.

Néanmoins, on verra plus loin que l'on peut assez facilement calculer la résultante $\vec{dF}$ des forces surfaciques de pression qui s'exercent sur les 6 faces d'un volume élémentaire $dV = dx dy dz$ de forme parallélépipédique. Cf section IV.3

Partie II

Équilibre d'un fluide dans le champ de pesanteur

1 Évolution de P avec z : loi fondamentale de l'hydrostatique

La loi fondamentale de l'hydrostatique sera démontrée un peu plus loin dans ce chapitre. On va se contenter ici de l'énoncer puis de l'utiliser dans des cas pratiques. Elle n'est valable que pour un fluide au repos (donc sans mouvement) soumis uniquement au champ de pesanteur terrestre. Elle donne que la pression dans le fluide dépend uniquement de l'altitude z (supposée orientée vers le haut) et varie avec z suivant l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

où ρ est la masse volumique du fluide considéré et g l'accélération du champ de pesanteur à l'endroit considéré¹.

Connaissant cette relation, on peut déjà prédire que l'on va pouvoir négliger en première intention les variations de pression dans un volume de taille « normale » pour un gaz, mais pas pour un liquide tel de l'eau. En effet, tout le monde sait que la masse volumique de l'eau vaut $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \text{ kg.L}^{-1} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Ce qui est peut-être moins connu du grand public est que la masse volumique de l'air est environ 1000 fois moindre que celle de l'eau, soit $\rho_{\text{air}} \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$, de sorte que le gradient de pression dans les deux matériaux vaille respectivement

$$\frac{dP}{dz}_{\text{eau}} = -\rho_{\text{eau}} g \approx 1,0 \cdot 10^4 \text{ Pa/m} \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dz}_{\text{air}} = -\rho_{\text{air}} g \approx 10 \text{ Pa/m}$$

Sur une distance d'un mètre, la pression dans l'eau varie déjà d'un dixième de bar, ce qui fait qu'au bout de 10 m, la pression varie d'un bar². Au contraire dans une pièce telle la salle de classe (on va dire 3 m de plafond),

1. Pour la retenir, c'est assez facile, il suffit de se souvenir qu'elle concerne votre vieil ami Roger (ρg).

2. C'est la raison pour laquelle les 10 derniers mètres sont les plus dangereux en plongée car la pression diminue d'un facteur 2.

la pression entre sol et plafond n'aura changé que de 30 Pa ce qui est totalement négligeable comparé à la pression atmosphérique. Il faut monter jusqu'à une hauteur de 10 km pour observer une variation sensible de pression de l'ordre de la pression atmosphérique³. Si l'on regarde à la même profondeur (10 km) mais sous l'eau, au fin fond des océans, la pression monte jusqu'à 1000 bar... Pas étonnant qu'il faille des équipements très spéciaux pour descendre à de telles profondeurs.

2 Pression dans un gaz : modèle de l'atmosphère isotherme

On va considérer l'atmosphère en faisant deux hypothèses :

- La première est de considérer le gaz atmosphérique comme un gaz parfait (c'est-à-dire vérifiant localement la loi des gaz parfaits $PV = nRT$). Cette hypothèse est bien vérifiée en pratique car l'air est un « bon » gaz parfait.
- La seconde est de considérer cette atmosphère comme étant *isotherme* c'est-à-dire ayant en tout point de l'atmosphère la même température $T = T_0$. Cette seconde hypothèse est bien plus discutable⁴ mais va nous permettre d'effectuer des calculs relativement simple pour un résultat qui, s'il n'a pas la qualité requise pour être un bon modèle météorologique, a tout de même « une bonne tête ».

Le point central de la démonstration est de déterminer le lien entre la pression P et la masse volumique ρ dans le cadre d'un gaz parfait⁵. En effet, considérons une masse m de gaz (ici l'air) occupant un volume V de l'espace. On a alors, avec M la masse molaire de l'air,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{MP}{RT} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3} \quad \text{pour} \quad T = 288 \text{ K} \quad \text{et} \quad P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

La loi de l'hydrostatique s'écrit alors

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{MP}{RT} g \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT} P = 0}$$

On se retrouve avec une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont bien constants car on a supposé l'atmosphère isotherme donc la température T reste uniforme égale à T_0 . La solution exponentielle s'impose donc sous la forme

$$P(z) = A e^{-Mgz/RT_0}$$

Il ne reste qu'à noter P_0 la pression au sol (soit en $z = 0$) pour en déduire

$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-Mgz/RT_0} = P_0 e^{-z/H_0} \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{RT_0}{Mg} = 8,4 \text{ km}}$$

⚠ Attention!

La masse molaire de l'air vaut $M = 29 \text{ g/mol}$, soit $29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ dans les unités du système international... L'erreur critique dans cette application numérique plus que classique est de trouver une hauteur H_0 de seulement 8 m (et non 8 km). Si c'était le cas, nous serions tous morts par manque d'oxygène au troisième étage du bâtiment D (sans parler de la F501 !)...

3. c'est d'ailleurs comme on va le voir la taille caractéristique de l'atmosphère

4. Tout le monde sait que la température a tendance à baisser quand on monte en altitude avant d'atteindre un pallier à -55°C aux alentours de 10 km d'altitude. Ce qu'on sait moins, c'est qu'après ce pallier, la tendance est plutôt à la hausse (modérée), les couches externes de l'atmosphère étant plus chauffées par le Soleil que celle qui sont un peu plus bas.

5. Moyen mnémotechnique : cela doit faire intervenir vos grands copains les MP..

L'ordre de grandeur de la taille caractéristique H_0 de l'atmosphère est à retenir. On se retrouve peu ou prou au niveau du sommet de l'Everest où la pression a été divisée presque par trois (division par $e = 0,3679$) par rapport au niveau du sol, ce qui explique pourquoi les hélicoptères commencent à avoir du mal à voler, n'ayant plus assez d'air sur lequel s'appuyer.

Notons à présent qu'à la fois la masse volumique $\rho(z) = MP(z)/RT_0$ et la densité moléculaire $n^* = n\mathcal{N}_A/V = \mathcal{N}_A P(z)/RT_0$ suivent une loi d'évolution puisqu'en remplaçant, on trouve $\rho_0 = MP_0/RT_0$ et $n_0^* = \mathcal{N}_A P_0/RT_0$ et donc

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-Mgz/RT_0} \quad \text{et} \quad n^*(z) = n_0^* e^{-Mgz/RT_0}$$

Notons en outre que la masse molaire s'exprime $M = \mathcal{N}_A m_\mu$ en notant m_μ la masse (moyenne) d'une seule molécule d'air et que par définition $R = \mathcal{N}_A k_B$ où k_B est la constante dite de Boltzmann⁶. Ainsi les rapports Mgz/RT_0 se réécrivent en $m_\mu gz/k_B T_0$ soit comme le rapport de l'énergie potentielle de pesanteur $m_\mu gz$ d'une molécule d'air à l'altitude z par l'énergie $k_B T_0$ d'agitation thermique. En d'autres termes, quand l'énergie potentielle est de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique, la probabilité de trouver la molécule à cet endroit est (environ car $e = 2,718$) trois fois plus faible qu'au sol.

Imaginez vous dans une pièce remplie de ballons gonflables (et gonflés d'air). Tant que vous ne bougez pas (agitation thermique nulle), les ballons sont simplement posés les uns sur les autres jusqu'à un niveau de remplissage puis plus rien. Lorsque vous commencez à bouger les bras pour envoyer des ballons en l'air (créant ainsi une agitation thermique non nulle), les ballons que vous envoyez montent puis redescendent sur le côté. Mais si quelqu'un prend une photo de la pièce et s'amuse à compter le nombre de ballons contenu dans chaque tranche de 20 cm de hauteur du sol au plafond, il comptera toujours à peu près le même nombre (incertitude statistique oblige). Même si pour deux photos prises à des temps différents, les ballons présents dans chaque tranche ne sont pas les mêmes, la distribution statistique des ballons dans son ensemble reste inchangée et va uniquement dépendre de votre degré d'agitation des bras, c'est-à-dire de l'énergie d'agitation thermique de vos ballons. Pour les molécules, c'est exactement pareil, voir les animations avec $g = 1$ et $g = 9.8$ sur la page <http://pcsi.kleber.free.fr/IPT/py4phys.html>

La formule de Boltzmann se généralise pour toute distribution de niveaux d'énergie (discrets ou continus). Par exemple, la distribution de la densité moléculaire d'une population de molécules soumises à une énergie potentielle $E_p(z)$ s'écrit

$$n^*(z) = n_0^* e^{-E_p(z)/k_B T}$$

Et si les niveaux d'énergie E_i sont discrets comme en mécanique quantique, le rapport des populations des niveaux i et j sera donné par

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{e^{-E_i/k_B T}}{e^{-E_j/k_B T}} = e^{-(E_i - E_j)/k_B T}$$

6. Ludwig Eduard Boltzmann (né le 20 février 1844 à Vienne, Autriche - mort le 5 septembre 1906 à Duino) est un physicien et philosophe autrichien. Il est considéré comme le père de la physique statistique et un fervent défenseur de l'existence des atomes. Ludwig Boltzmann obtient son doctorat à l'université de Vienne en 1866, avec une thèse sur la théorie cinétique des gaz, dirigée par Jožef Stefan, dont il devient ensuite assistant. Il étudie successivement à Graz, à Heidelberg et à Berlin, où il suit les cours de Bunsen, Kirchhoff et Helmholtz. En 1869, il obtient une chaire de physique théorique à Graz, où il reste pendant quatre ans. En 1873, il accepte une chaire de mathématiques à Vienne, mais revient à Graz trois ans plus tard, cette fois pour enseigner la physique expérimentale. Il devient membre étranger de la Royal Society en 1899.

Il entretient des échanges, parfois vifs, avec les physiciens contemporains à propos de ses travaux. Cela l'affecte particulièrement et entraîne des crises de dépression qui le conduisent à une première tentative de suicide à Leipzig, puis à une seconde à Duino, près de Trieste, qui lui sera fatale. Boltzmann meurt avant même d'avoir vu ses idées s'imposer.

La tombe de Boltzmann au Zentralfriedhof porte une équation inscrite au-dessus de la statue du physicien, à savoir $S = k_B \log W$, qui exprime l'entropie S en fonction du nombre W (pour Wahrscheinlichkeit, c'est-à-dire probabilité en allemand) de microétats possibles pour un macroétat donné d'un système thermodynamique fermé, avec k_B la constante de Boltzmann.

Sources : Wikipédia

3 Pression dans les liquides

a) Formule générale

Un liquide, contrairement à un gaz, est pratiquement incompressible de sorte que sa masse volumique ρ puisse être considérée comme une constante. La loi fondamentale de l'hydrostatique donne alors que la dérivée spatiale de P est constante, ce qui s'intègre facilement

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{soit} \quad P(z) = -\rho g z + C^{\text{te}}$$

ou encore

$$P(z) + \rho g z = C^{\text{te}}$$

En particulier, pour deux points A et B d'altitudes respectives z_A et z_B , on en déduit que

$$P_A = P_B + \rho g (z_B - z_A)$$

où l'on voit tout de suite que si le point A se situe sous le point B, la pression y est plus importante, ce qui correspond bien à l'expérience courante

Attention!

Pour pouvoir appliquer la loi précédente, il est important que les deux points A et B soient *continuellement* reliés par le liquide de masse volumique ρ étudié. Si différents liquides (ou fluides) se succèdent, il faut à chaque fois calculer les pressions d'équilibre au niveau des interface ^a

^a. Une interface étant, par définition, à l'équilibre dans le cadre de l'hydrostatique, les pressions de part et d'autre de l'interface doivent être égales de sorte que les forces de pressions s'y compensent.

b) Manomètre à liquide

Prenons deux boîtes remplies de gaz aux pressions respectives P_1 et P_2 . Si l'on relie les deux boîtes à l'aide d'une tubulure dans laquelle on a glissé un liquide de masse volumique ρ_{liq} , on observe que l'interface du côté ① n'est pas à la même altitude que celle du côté ②.

SCHEMA

EXERCICE 70.1 Manomètre à liquide

Montrer que la différence de pression entre les deux boîtes est reliée de manière simple à la différence h d'altitude entre les deux interfaces.

c) Baromètre à mercure

SCHEMA

Dans un baromètre à mercure, on a rempli un bac de mercure (liquide à température ambiante) et on y plonge⁷ un tube de 1 mètre de long (fermé à une extrémité et ouvert à l'autre) de sorte qu'il soit entièrement

7. Précautionneusement, le mercure, c'est dangereux...

rempli de mercure. Une fois le tube rempli, on le redresse en se débrouillant pour que l'extrémité ouverte reste à tout instant dans le mercure, rien d'autre ne peut donc s'introduire dans le tube. Pourtant on remarque que le mercure ne monte « que » jusqu'à 76 cm de hauteur par rapport à l'interface entre le mercure du bac et l'air, laissant un espace « vide⁸ » au sommet. Plus étrange encore, si on incline le tube, le mercure peut occuper plus ou moins de place dans le tube, mais son altitude maximale ne dépasse jamais les 76 cm.

EXERCICE T02 Baromètre à Mercure

Expliquer les constatations précédentes.

d) Siphon**SCHEMA**

Comment faire pour siphonner le contenu d'un aquarium (vidé de ses poissons bien sûr) sans risquer de le faire tomber dans l'évier ni même avoir à vider tous les divers jouets que Maurice y aura laissé traîné? Rien de plus simple, il suffit de plonger un tube flexible (ouvert aux deux bouts) dans le liquide à siphonner (ici l'eau) et le laisser se remplir. On bouche alors une extrémité que l'on met dans l'évier, en contrebas (c'est important) de l'aquarium. Au moment où l'on débouche l'extrémité dans l'évier (l'autre étant encore au fond de l'aquarium), l'eau s'écoule de l'aquarium vers l'évier.

EXERCICE T03 Siphon

Expliquer.

e) Surface de séparation entre deux fluides

EXERCICE T04 Surface de séparation

Prouver par l'absurde qu'une interface entre deux fluides ne peut être qu'horizontale dans le champ de pesanteur terrestre en considérant le système suivant où l'on note ①, ②, ③ et ④ quatre points tels que $z_1 = z_4$ et $z_2 = z_3$.

SCHEMA

8. C'est Evangelista Torricelli qui mit le premier cet effet en évidence et donc l'existence du vide, bien qu'il n'ait jamais vraiment publié sur le sujet par peur des théologiens de l'époque qui abhorrent la notion de vide.

Partie III

Résultante des forces de pression

Calculer la résultante des force de pression revient toujours à découper la surface à étudier en petit éléments de surface $d\vec{S}$ bien choisis de manière à ce que la pression y soit uniforme et sommer ces petits vecteurs surface de manière adéquate.

1 Quelques exemples

EXERCICE T05 Barrage rectangulaire

Considérons un barrage de forme rectangulaire de hauteur H et de largeur L dans le plan Oyz tel que l'eau occupe le demi-espace $x < 0$ et l'air occupe le demi-espace $x > 0$. Montrer que l'air exerce une force résultante $\vec{F}_{\text{tot,air}} = -P_0 HL \vec{e}_x$ et l'eau une résultante $\vec{F}_{\text{tot,eau}} = (P_0 HL + \rho_{\text{eau}} g H^2 L / 2) \vec{e}_x$

EXERCICE T06 Barrage parabolique

Considérons à présent un barrage non plus rectangulaire, mais en forme de parabole (car appuyé sur les montagnes alentours). Trouver l'intégrale qu'il *faudrait*⁹ calculer pour déterminer la résultante des forces de pression sur le barrage.

EXERCICE T07 Toit de maison

Considérons un toit de maison vu comme un triangle isocèle dont la base est posée sur le sol et dont les deux côtés relevés (de largeur ℓ) partent avec un angle α par rapport au sol. On veut calculer uniquement la composante des forces de pressions découlant de l'air au-dessus du toit¹⁰.

Ce résultat se généralise comme suit :

Si la pression est uniforme sur une surface, la norme de la résultante des forces de pression sur cette surface dans une direction donnée est égale à la pression que multiplie la surface projetée perpendiculairement à cette direction

Cette généralisation permet d'affirmer par exemple que si on considère une surface hémisphérique plongée dans un champ de pression uniforme, la force totale exercée sera égale à $P_0 \times \pi R^2$ et non $P_0 \times 4\pi R^2$ du fait des compensation des forces horizontales.

SCHEMA

EXERCICE T08 Surface conique

On considère un cône de hauteur h et de rayon R à la base entièrement plongé sous une hauteur H d'eau. Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur la partie haute du cône.

9. L'idée n'est bien sûr pas de retenir le résultat, mais plutôt la méthode qui permet de redécouper ce barrage comme bon nous semble.

10. Par exemple si vous avez mis un grand aspirateur pour fabriquer du vide sous le toit.

2 Poussée d'Archimède

a) Théorème d'Archimède

Le théorème d'Archimède est une superbe construction de l'esprit humain qui permet en un tour de main de calculer la résultante des forces de pression sur un objet *entièrement* plongé dans un fluide donné.

SCHEMA

Supposons un instant que l'objet¹¹ étudié soit, par la pensée, remplacé pour le même fluide (même propriété de densité, température, etc.) que le fluide environnant tout en conservant parfaitement la géométrie de l'objet initial. Ce fluide (épousant le volume du corps devenu fantomatique) est à l'équilibre avec le fluide environnant puisqu'on se place dans le cadre de l'hydrostatique. Par conséquent, les forces qui s'exercent sur lui doivent se compenser de sorte que la résultante globale des forces soit nulle. Or seule deux forces s'exercent dans le cadre habituel : le poids $m_{\text{fluide}} \vec{g} = \rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}} \vec{g}$ et la résultante $\vec{\Pi}_{\mathcal{A}}$ des forces de pression, plus connue sous le nom de « Poussée d'Archimède ». On déduit de cette condition d'équilibre que

$$\rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}} \vec{g} + \vec{\Pi}_{\mathcal{A}} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{\Pi}_{\mathcal{A}} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}} \vec{g}}$$

Dis avec des mots (relativement) simples, la poussée d'Archimède est l'opposée du poids du fluide déplacé¹²

b) Retour sur la surface conique

EXERCICE 10.9 Surface conique (bis)

Retrouver la résultante des forces de pression s'exerçant sur un cône entièrement plongé dans de l'eau en utilisant Archimède, c'est-à-dire en rajoutant une fine couche d'eau *sous* le cône afin qu'il soit entièrement plongé dans le liquide.

c) Cas d'un objet à l'interface entre deux fluides

Le théorème d'Archimède ne s'applique que lorsqu'un fluide est *entièrement* entouré d'un même fluide. Qu'en est-il d'une balle flottant à la surface de l'eau? Il suffit de refaire une démonstration du même style qui indique que *si l'interface entre les deux fluides correspond à une interface d'équilibre valide dans le cadre de l'hydrostatique* (en gros, si l'interface est horizontale), alors si l'on remplit la partie inférieure du fluide inférieur et la partie supérieure du fluide supérieur, alors les fluides sont toujours à l'équilibre et la poussée d'Archimède correspond à l'opposé de la somme des poids des fluides dans les deux volumes considérés :

SCHEMA

$$\boxed{\vec{\Pi}_{\mathcal{A}} = -\rho_1 V_1 \vec{g} - \rho_2 V_2 \vec{g}}$$

11. De forme a priori patatoïdale.

12. Même si ici on a rajouté du fluide par la pensée, Archimède prenait un cas très pratique où il plongeait un objet dans un contenant d'eau. Le niveau d'eau montait du fait de l'introduction d'un nouvel objet, d'où la dénomination « fluide déplacé ».

Partie IV

Forces volumiques de pression

1 Notions de dérivées partielles

Lorsqu'on considère une fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables, on peut généraliser la notion de dérivation en ce qu'on appelle une « dérivée partielle », c'est-à-dire que l'on peut calculer la dérivée de f par rapport à la variable x en considérant dans le calcul que y et z sont des constantes. On peut au choix indiquer les variables que l'on garde constantes dans le calcul (ce sera le cas dans certaines parties de la thermodynamique) ou les omettre s'il est clair que l'on connaît les variables considérées (c'est le cas par exemple pour les dérivées spatiales où la dérivation par rapport à x se fait toujours à y et z constants). Pour montrer clairement que la dérivée que l'on fait est une dérivée *partielle* (et donc que f est une fonction de plusieurs variables), on n'utilise pas un d droit (d), mais un « d de traviole » ∂ qu'il va falloir savoir dessiner correctement à partir de maintenant.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ est la dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } x, \text{ à } y \text{ et } z \text{ constants}$$

Pour une fonction f d'une seule variable, on a eu l'occasion de rencontrer (sans formellement nommer) la notion de « différentielle » de f (notée df) interprétée par le physicien comme la « petite évolution » de f lorsque x varie d'une « petite variation » dx . On peut marquer que, grâce à la notion de développement limité

$$df \approx f(x+dx) - f(x) \approx f'(x) dx = \frac{df}{dx} dx$$

Notons que l'on fait ici deux approximations en physique qui correspondent en fait à une définition stricte en mathématique de sorte qu'en fait

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

Quand on dispose d'une fonction f de plusieurs variables x , y et z , la valeur de f peut changer à la fois si x varie, mais aussi si y ou z varient et l'on peut refaire l'approximation affine précédente pour chaque cause de variation. Il est donc naturel de définir la variation totale comme la somme des variations dues à chaque variable prise séparément :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

2 Opérateur gradient

Dans la définition précédente, on voit poindre un lien vers le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ qui s'écrit en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{dOM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}$. Notamment, si l'on note

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e_z}$$

Alors on a

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{dOM}$$

L'opérateur gradient est donc une généralisation (pour les fonctions à plusieurs variables de l'opérateur de dérivation pour les fonctions à une seule variables.

On vient de définir le gradient en coordonnées cartésiennes (à connaître!). Si l'on se place en coordonnées cylindriques, la même grandeur f sera maintenant une fonction des variables d'espace r , θ et z , de sorte que

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

puisque ce n'est pas le nom donné à une variable qui va modifier la manière d'écrire un développement limité... En revanche, en coordonnées cylindrique, le déplacement élémentaire s'écrit

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

de sorte que, pour conserver l'identité $df = \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{OM}$, on dusse avoir

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

De même, en coordonnée sphériques, f devient une fonction des variables r , θ et φ et on a prouvé dans le chapitre $\mathcal{M}1$ que

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

de sorte que, pour conserver l'identité $df = \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{OM}$, on dusse avoir

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Comme indiqué plus haut dans les capacités exigibles, seule l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes est à connaître par cœur (c'est relativement direct...) mais vous devez être capable d'appliquer le gradient dans d'autres systèmes de coordonnées pourvu que l'on vous donne la formule¹³.

3 Forces volumiques de pression

Pour déterminer l'équivalent volumique des forces de pression qui va nous servir juste après pour démontrer la loi fondamentale de l'hydrostatique dans son cadre le plus général, il est nécessaire de considérer un petit cube¹⁴ de dimensions dx , dy et dz donc de volume $dV = dx dy dz$. Notons $d\vec{\mathcal{F}}$ la résultante des forces de pressions sur les 6 faces du cube.

SCHEMA

Un simple regard sur le schéma permet de se convaincre que les faces vont par paire et par exemple en projection selon $\vec{e}_x$,

$$\begin{aligned} d\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_x &= P(x, y, z) dy dz - P(x + dx, y, z) dy dz \\ &= P(x, y, z) dy dz - \left(P(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz \\ d\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_x &= - \frac{\partial P}{\partial x} dV \end{aligned}$$

On démontre de même que $d\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_y = - \frac{\partial P}{\partial y} dV$ et $d\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_z = - \frac{\partial P}{\partial z} dV$

13. Néanmoins, si un coin de votre tête peut retenir comment on peut le retrouver en utilisant $df = \vec{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{OM}$, ce n'est pas forcément un mal.

14. En fait un petit parallélépipède car rien n'impose les trois côtés d'être égaux.

de sorte que

$$\vec{d\mathcal{F}} = -(\vec{\text{grad}} P) \times dV \quad \text{avec} \quad \vec{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z$$

On nomme alors le terme $-\vec{\text{grad}} P$ forces *volumiques* de pression puisqu'il s'agit des forces exercées sur un petit élément de volume, tout comme on peut définir une force *volumique* de pesanteur $\rho \vec{g}$ de sorte que le poids s'exerçant sur un élément de volume élémentaire dV s'écrit $\rho \vec{g} \times dV$

4 Équation locale de la statique des fluides

Considérons un volume dV de fluide sous forme d'un petit cube de côtés dx , dy et dz . Ce petit cube est de masse $dm = \rho dV$ avec ρ la masse volumique du fluide. Le cube (qui constitue notre système, étudié dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude, galiléen) est soumis à deux forces¹⁵ : son poids $dm \vec{g}$ et la résultante $\vec{d\mathcal{F}} = -(\vec{\text{grad}} P) dV$ des forces de pression. Le petit cube étant par hypothèse à l'équilibre (on est dans le cadre de l'*hydrostatique*), son accélération est donc nulle et la RFD appliquée au cube s'écrit

$$\vec{0} = \rho dV \vec{g} - (\vec{\text{grad}} P) dV$$

En simplifiant par dV , il vient

$$\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$

En prenant en compte l'orientation habituelle vers le haut de l'axe Oz , on a $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ et la projection de l'équation précédente permet de retrouver la forme annoncée dans la section II.1

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

5 Courbes isobares : forme de la surface libre dans un fluide en rotation

EXERCICE T0.10 Fluide en rotation

Déterminer la forme de la surface libre dans un fluide en rotation autour de l'axe Oz en tirant parti du fait que ladite surface est une surface isobare qui vérifie $P(r, z) = P_0$.

15. Mais on peut très bien généraliser cette démonstration en rajoutant d'autres interactions.

CORRECTION T0.1 Manomètre à liquide

Notons z_1 et z_2 les altitudes respectives des interfaces. Chaque interface étant à l'équilibre mécanique avec les fluides environnants, les pressions dans le liquide aux deux interfaces valent respectivement P_1 et P_2 . La loi de l'hydrostatique intégrée dans le cadre d'un liquide stipule donc que

$$P_2 + \rho_{\text{liq}} g z_2 = P_1 + \rho_{\text{liq}} g z_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{P_2 - P_1 = \rho_{\text{liq}} g (z_2 - z_1) = \rho_{\text{liq}} g h}$$

La mesure de la différence de hauteur h donne une mesure directe de la différence de pression ΔP .

CORRECTION T0.2 Baromètre à Mercure

L'espace dans le tube au-dessus du mercure est effectivement vide (en fait, il contient des atomes de mercure gazeux à sa pression de vapeur saturante soit 1 Pa à 42°C (et moins en-dessous)) donc sa pression à l'interface d'altitude h est nulle. Au contraire, au niveau de l'interface du bac, la pression du mercure vaut la pression atmosphérique P_0 . On a donc

$$P_0 + \rho_{\text{Hg}} g \times 0 = 0 + \rho_{\text{Hg}} g h \quad \text{soit} \quad \boxed{P_0 = \rho_{\text{Hg}} g h}$$

La hauteur h de mercure (les fameux 76 cm ou 760 mm de mercure) correspond donc à la pression atmosphérique et on peut mesurer les variations de pression atmosphérique au cours du temps en mesurant l'évolution de la hauteur de mercure dans le tube¹⁶. Le « millimètre de mercure » correspond donc à une unité de pression dénommée « torr » en l'honneur de Torricelli.

CORRECTION T0.3 Siphon

L'interface ainsi créée est soumise à deux forces de pression :

- celle correspondant à la pression P_0 atmosphérique de l'air que l'on vient de mettre en contact avec elle;
- l'autre correspondant à une pression $P = P_0 + \rho g h$ avec h la profondeur à laquelle se trouve l'interface comparée à la surface de l'eau à siphonner.

La pression du liquide étant plus importante que celle de l'air, le liquide commence à se déplacer et le mouvement, une fois démarré, ne s'arrête plus avant que l'aquarium ne soit vidé et que des bulles d'air s'introduisent dans la tubulure (mais là, il ne s'agit plus d'hydrostatique mais d'hydrodynamique qui ne commencera à être étudiée qu'en seconde année.).

CORRECTION T04 Surface de séparation

Les points ① et ② étant situés dans le fluide de masse volumique ρ , on a

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \quad \text{soit} \quad P_2 = P_1 + \rho g(z_1 - z_2) = P_1 + \rho g h$$

Les points ③ et ④ sont quant à eux dans le fluide de masse volumique ρ' , soit

$$P_3 + \rho' g z_3 = P_4 + \rho' g z_4 \quad \text{soit} \quad P_3 = P_4 + \rho' g(z_4 - z_3) = P_4 + \rho' g(z_1 - z_2) = P_4 + \rho' g h$$

Les points ① et ④ étant à la même altitude et dans le même liquide, leurs pressions sont égales : $P_1 = P_4$. De même pour les points ② et ③ : $P_2 = P_3$. On en déduit que l'on doit forcément avoir

$$\boxed{\rho g h = \rho' g h}$$

Cette égalité n'est possible que dans deux configurations :

- soit $\rho = \rho'$, il s'agit alors du même liquide (ou de deux liquides qui vont entièrement s'interpénétrer) ;
- soit $h = 0$, donc l'interface ne peut être qu'horizontale.

CORRECTION T08 Surface conique

En plaçant l'origine des altitudes au niveau de la base du cône, on retrouve facilement¹⁷ que

$$P(z) = P_0 + \rho g(H - z)$$

qui redonne bien une pression atmosphérique P_0 à la surface en $z = H$ et une pression plus importante de $\rho g H$ tout au fond.

Découpons le cône en bandelettes d'épaisseur dz et de rayon $r(z)$. Localement, ces bandelettes sont inclinées d'un angle α par rapport à la verticale tel que $\tan \alpha = R/h$. Ainsi, la surface effective de la bandelette sera (voir schéma)

$$dS_{\text{bandelette}} = 2\pi r(z) \times \frac{dz}{\cos \alpha}$$

La force de pression exercée sur chaque surface élémentaire est donc inclinées du même angle α mais par rapport à l'horizontale (voir schéma). Or, pour chaque surface élémentaire, il existe par symétrie une surface élémentaire diamétralement opposée telle que les composantes horizontales des deux forces se compensent. On peut donc affirmer que, par symétrie, la force globale exercée sur la bandelette sera orientée vers le bas et il suffit donc de calculer la projection suivant $\vec{e}_z$ de cette force sur chaque bandelette (les composantes horizontales étant forcément nulle). En sommant les contributions verticales sur tout le pourtour de la bandelette, on trouve

$$\vec{dF}_{\text{bandelette}} \cdot \vec{e}_z = -P(z) \times dS_{\text{bandelette}} \times \sin \alpha = -P(z) 2\pi r(z) \tan \alpha dz$$

où l'on retrouve le fait que si $\alpha = 0$, il n'y a pas de composante verticale des forces de pression. Il ne reste qu'à exprimer $r(z)$ en prenant en compte le fait que

$$\tan \alpha = \frac{r(z)}{h - z} \quad \text{soit} \quad r(z) = (h - z) \tan \alpha$$

Il ne reste plus qu'à sommer les contributions sur toutes les bandelettes de $z = 0$ à $z = h$ pour obtenir

$$\vec{F}_{\text{tot}} \cdot \vec{e}_z = - \int_{z=0}^h (P_0 + \rho g(H - z)) \times 2\pi (h - z) \tan^2 \alpha dz$$

dont l'intégrale se calcule... même si ce n'est pas trop le propos ici. On trouvera d'ailleurs plus loin une manière bien plus simple de calculer cette valeur en utilisant le théorème d'Archimède.

CORRECTION T05 Barrage rectangulaire

Voyons déjà l'influence de l'air dont la pression P_0 est uniforme sur toute la surface du barrage. Si on considère un petit élément de surface

$$\vec{dS} = dS(-\vec{e}_x)$$

orienté de l'air vers la surface, alors la force élémentaire s'exerçant sur cet élément de surface s'écrit

$$\vec{dF} = P_0 \vec{dS} = -P_0 dS \vec{e}_x$$

La force totale s'obtient sommant/intégrant sur la surface totale du barrage. Or, comme la pression ne change pas en fonction du point considéré (de même que le vecteur portant la force), on peut la sortir de l'intégrale qui s'écrit finalement

$$\vec{F}_{\text{tot,air}} = \int_{\text{barrage}} \vec{dF} = -P_0 \vec{e}_x \times \int_{\text{barrage}} dS = -P_0 \times S_{\text{barrage}} \vec{e}_x = -P_0 HL \vec{e}_x$$

Pour ce qui est de l'action de l'eau, c'est un chouïa plus compliqué. Déterminons d'abord l'expression de la pression dans l'eau à l'altitude z . Comme on se trouve dans un liquide de masse volumique $\rho_{\text{eau}} = \rho$ supposée constante, la pression vérifie

$$P(z) + \rho g z = C^{\text{te}}$$

On détermine alors la constante avec l'expression de la pression P_0 à la surface $z = H$ de l'eau : $P_0 + \rho g H = C^{\text{te}}$, de sorte que

$$P(z) = P_0 + \rho g (H - z)$$

Comme on sait que la pression de l'eau est constante à une altitude z donnée, on va considérer une bande horizontale de longueur L entre les altitudes z et $z + dz$, donc de surface $dS = L dz$. La force totale s'écrit alors, en prenant bien soin d'orienter le vecteur surface de l'eau vers le barrage (donc selon $+\vec{e}_x$) et de réaliser l'intégrale dans le « bon sens » pour que dz soit bien positif,

$$\vec{F}_{\text{tot,eau}} = \int_{\text{barrage}} \vec{dF} = \int_{\text{barrage}} P(z) \overbrace{L dz}^{\vec{dS}} \vec{e}_x = \int_{z=0}^H (P_0 + \rho g (H - z)) L dz \vec{e}_x = \left[P_0 z - \rho g \frac{(H - z)^2}{2} \right]_0^H L \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{F}_{\text{tot,eau}} = \left(P_0 HL + \rho g \frac{H^2 L}{2} \right) \vec{e}_x$$

Plusieurs vérifications sont de rigueur :

- Déjà, il s'agit bien d'une force puisque le premier terme correspond à une pression que multiplie une surface (donc une force) et le second correspond à une masse volumique multipliée par un volume (donc une masse), le tout multiplié par l'accélération g de la pesanteur (donc une force au total).
- Ensuite, cette force est en norme plus élevée que celle exercée par l'air de l'autre côté puisqu'il s'agit de celle de l'air ($P_0 HL$) auquel se rajoute le terme issu de la loi de l'hydrostatique, ce qui est cohérent puisqu'on sait que la pression augmente avec la profondeur d'immersion.

La force totale est alors donnée par la somme

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{tot,air}} + \vec{F}_{\text{tot,eau}} = \rho g \frac{H^2 L}{2} \vec{e}_x$$

On se retrouve bien avec une force globalement dirigée de l'eau vers le barrage, la contribution de l'air se simplifiant avec la contribution du terme constant dans l'expression de $P(z)$.

CORRECTION T0.6 Barrage parabolique

On suppose que la largeur du barrage est nulle en $z = 0$ et vaut L en $z = H$ avec l'altitude z vue comme une fonction parabolique de l'abscisse y du bord du barrage. Dans une telle configuration, on va toujours découper le barrage en bandelettes d'épaisseur dz (entre z et $z + dz$) mais la largeur ℓ de ces bandelettes dépend à présent de l'altitude z à laquelle on se trouve. Plus exactement, on doit avoir $z = \alpha \ell(z)^2$ pour avoir effectivement le caractère parabolique présumé. Sachant qu'en $z = H$ on doit avoir $\ell(H) = L$, on en déduit que $\alpha = H/L^2$, soit $\ell(z) = \sqrt{z/\alpha} = L\sqrt{z/H}$ (logique...).

Comme on a vu à la section précédente que la contribution de l'air se simplifie avec la partie constante de la contribution de l'eau, la force totale s'exprime simplement par

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \int_{\text{barrage}} \rho g(H-z) \overbrace{\ell(z) dz}^{dS} \vec{e}_x = \int_{z=0}^H \rho g(H-z) L \sqrt{\frac{z}{H}} dz \vec{e}_x = \dots$$

Le calcul exact ne nous intéresse (finalement) que peu, mais ce qui importe est comment arriver à écrire l'intégrale qu'il s'agit de calculer. On dispose alors d'outils (Python par exemple) pour faire le calcul explicite ou alors si vous voulez vous entraîner pour les maths.

CORRECTION T0.7 Toit de maison

On remarque que les deux ailes du toit ont une surface totale $L \times \ell$. Il s'exerce donc de chaque côté une force totale de norme $P_0 L \ell$ et dirigée perpendiculairement à l'arrête du toit vers le bas. Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ correspondant au plan du tableau, ces deux forces s'écrivent

$$\vec{F}_{\text{gauche}} = P_0 L \ell (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{\text{droite}} = P_0 L \ell (-\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$$

La résultante vaut donc

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{gauche}} + \vec{F}_{\text{droite}} = -P_0 2L \ell \cos \alpha \vec{e}_z}$$

On remarque qu'une partie de ces deux forces se compensent (les composantes horizontales) alors que les composantes verticales se renforcent (c'est assez logique vu que l'air est globalement au-dessus mais autant à droite qu'à gauche du toit). On remarque aussi que la norme de la force totale est donnée par la pression globale P_0 que l'on a supposée uniforme sur le toit que multiplie $2L \ell \cos \alpha$ qui est la surface apparente du toit vu du ciel ou encore la projection sur le sol de la surface du toit.

CORRECTION T0.9 Surface conique (bis)

Imaginons un instant que le cône soit légèrement soulevé du support de sorte que l'eau s'intercale en $z = 0$ entre lui et le support. Ainsi, le cône est *entièrement* entouré d'eau et la résultante des forces de pression vaut donc, d'après le théorème d'Archimède, l'opposé du poids du fluide déplacé, en l'occurrence

$$\vec{\Pi}_{\mathcal{A}} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}} \vec{g} = -\rho \times \frac{1}{3} \pi R^2 h \vec{g}$$

Or la poussée d'Archimède étant la résultante des forces de pression s'exerçant sur le cône, elle doit être égale à la somme de deux composantes :

- la résultante des forces de pression sur le haut du cône qu'on a tenté de calculer (à grand renfort d'intégrales et de raisonnements géométrique) à la section précédente;
- et la force en $z = 0$ dirigée vers le haut et valant simplement $P(z = 0) \times \pi R^2$ puisque la pression est uniforme sur toute la base du cône.

On en déduit la résultante des forces de pression sur le haut du cône par différence

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tot, haut}} = \vec{\Pi}_{\mathcal{A}} - P(z = 0) \times \pi R^2 \vec{e}_z = \rho \times \frac{1}{3} \pi R^2 h \vec{g} \vec{e}_z - (P_0 + \rho g H) \pi R^2 \vec{e}_z}$$

ce qui est bien le résultat obtenu après intégration des calculs de l'exercice précédent.

CORRECTION T0.10 Fluide en rotation

Considérons à présent le même petit cube que dans la section précédente, mais en « équilibre » dans le reste du fluide en rotation uniforme autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω . Cette fois-ci, l'application de la RFD change légèrement puisque l'accélération n'est plus nulle (le mouvement est *circulaire* uniforme et non *rectiligne* uniforme) mais vaut $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$ si le cube est à une distance r de l'axe de rotation (on se place bien sûr en coordonnées sphériques). La RFD s'écrit alors

$$dm \vec{a} = dm \vec{g} - (\vec{\text{grad}} P) dV \quad \text{soit} \quad \vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g} - \rho \vec{a} = \rho (-g \vec{e}_z + r\omega^2 \vec{e}_r)$$

Le gradient de pression étant orthogonal aux surfaces isobares (ce qui signifie « surfaces de pression constante »), celles-ci ne sont plus horizontales (cas de l'hydrostatique avec $\vec{\text{grad}} P$ selon $\vec{e}_z$) mais s'inclinent au fur et à mesure. La surface de séparation du fluide avec l'air constitue justement une surface isobare puisque la pression est uniforme dans l'air à notre échelle. Ainsi, on déduit que, dans le cas d'un fluide en rotation, l'interface avec l'air ne sera plus plane mais courbée. On va montrer qu'il s'agit en fait d'une parabolôïde de révolution.

Il faut ici utiliser l'expression du gradient en coordonnées cylindriques pour déduire le système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction $P(r, \theta, z)$. Les projections suivant $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$ donnent alors

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2 \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

On en déduit déjà que P ne dépend pas de θ , mais uniquement de r et z . Intégrons l'équation selon z . Pour que la dérivée partielle $\partial P / \partial z$ soit constante égale à $-\rho g$, il faut que P s'écrive $-\rho g z$ plus quelque chose qui ne dépend pas de z mais peut dépendre de r . Écrivons donc

$$P(r, z) = -\rho g z + f(r)$$

où $f(r)$ est une certaine fonction de la distance r à l'axe de rotation qu'il reste à déterminer. Si l'on calcule la dérivée partielle de cette expression par rapport à r , la partie en $-\rho g z$ disparaît (elle ne dépend pas de r), mais pas $f(r)$ qui se dérive en df/dr . En utilisant la deuxième équation, on a

$$\frac{df}{dr} = \frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2 \quad \text{qui s'intègre en} \quad f(r) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + C^{\text{te}}$$

où la constante est une « vraie » constante (c'est-à-dire ne dépend ni de r ni de z) puisque f ne doit dépendre que de r et non de z . En rassemblant ces deux résultats, il vient

$$P(r, z) = -\rho g z + \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + C^{\text{te}}$$

En supposant en outre que $P(0, 0) = P_0$, on en déduit que la constante vaut P_0 soit

$$P(r, z) = P_0 - \rho g z + \frac{\rho r^2 \omega^2}{2}$$

L'interface avec l'air correspond à la surface isobare $P(r, z) = P_0$, soit

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$

c'est-à-dire bien un parabolôïde de révolution dans notre cas, ce qui explique la déformation de la surface de l'eau dans un seau que l'on fait tourner sur lui-même.

