S11

Introduction au monde quantique

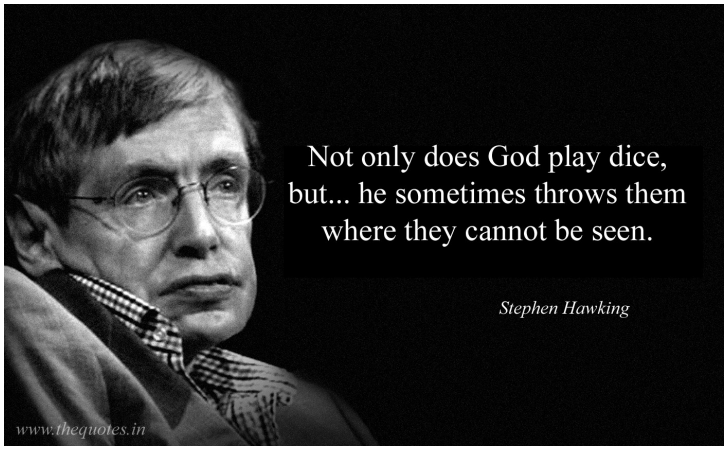
Avant de commencer, un petit retour sur ce qu'est la lumière et pourquoi on a longtemps considéré que c'était une onde grâce à l'expérience des trous d'Young réalisée ici par Véritasium :

`http://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0`

Toute la physique classique, et en particulier toutes les interprétations de phénomènes expérimentaux que nous venons de rappeler, reposent sur un postulat fondamental qu'on a longtemps admis implicitement, tant la chose paraissait naturelle et, pour ainsi dire, évidente. Selon ce postulat, toutes les grandeurs physiques qui caractérisent l'état d'un système sont mesurables, en principe, avec une précision aussi grande que l'on veut et l'évolution du système obéit à un déterminisme rigoureux.

Certes, toute mesure est toujours entachée d'une erreur expérimentale qu'il est impossible de supprimer complètement. Cependant, on peut imaginer des appareils de mesure de plus en plus précis et la physique classique n'impose aucune borne à une précision toujours croissante. Il est donc naturel de dire, qu'à un instant donné, les grandeurs caractérisant l'état d'un système ont des valeurs données, puisque ces valeurs peuvent être effectivement mesurées avec une précision que rien ne limite, en principe [1].

En mécanique quantique il ne sera plus possible de mesurer simultanément la position et la vitesse d'un corpuscule avec une précision illimitée ; la notion de trajectoire perdra ainsi sa signification fondamentale précise, ne restant qu'une approximation valable à l'échelle macroscopique, et l'évolution d'un système quelconque sera gouvernée par des lois de probabilité au lieu d'obéir à un déterminisme absolu.



1. Même si on vient de voir que la diffraction impose déjà une limite à la détection optique mais, comme on va s'en rendre compte, cet effet peut-être relié au principe d'incertitude d'Heisenberg et donc finalement au monde quantique.

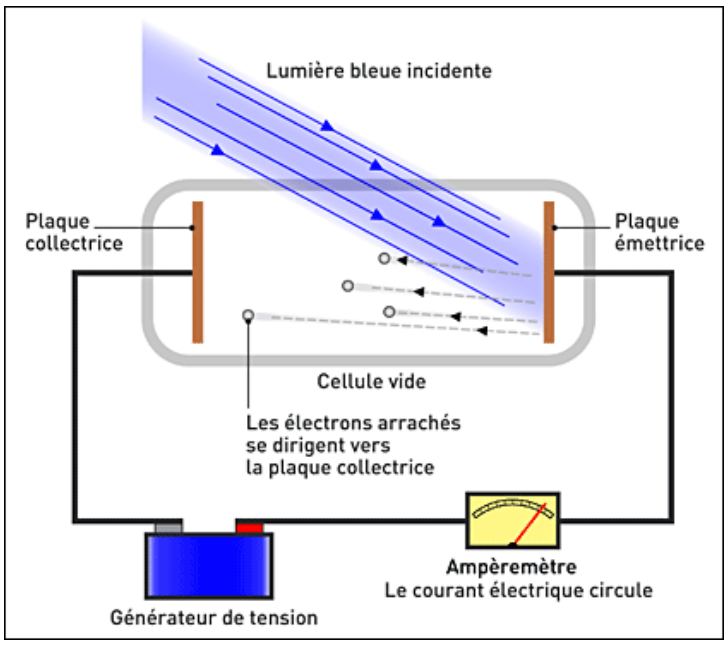
Partie I

Aspect corpusculaire de la lumière

1 Effet photoélectrique

a) Montage et observations

Montage Hertz en 1887 puis Lenard en 1899 – 1902 font le protocole expérimental suivant



Observations Pour une longueur d'onde λ donnée, il existe une tension U_0 qui, si le courant photoélectrique existe, peut ramener ce courant à 0. Cette tension ne dépend que de la longueur d'onde et non de l'intensité lumineuse (même si la valeur du courant dépend elle de l'intensité lumineuse).

En outre, il existe une longueur d'onde seuil λ_{seuil} au-dessus de laquelle aucun courant n'est observé, quelle que soit l'intensité lumineuse. Cette λ_{seuil} dépend du métal utilisé (et accessoirement de son état de surface).

b) Implications

Approche classique Il se conçoit bien qu'il faille une certaine énergie pour arriver à extraire un électron d'un métal (bien que certains électrons dussent être plus facile à extraire que d'autres...), mais l'énergie d'un faisceau lumineux est directement reliée à l'intensité lumineuse que l'on peut augmenter à volonté... donc on devrait observer l'effet pour n'importe quelle longueur d'onde à condition d'augmenter progressivement l'intensité lumineuse et non avoir cette coupure franche à λ_{seuil} !

Pour la même raison, la tension U_0 de blocage devrait augmenter avec l'intensité lumineuse à λ fixé alors que ce n'est pas (du tout) ce qui est observé...

L'approche classique est impuissante à expliquer l'effet photoélectrique.

Approche quantique L'explication quantique de l'effet photoélectrique valut le prix Nobel en 1921 à Einstein. L'idée est que la lumière est en fait constituée de particules d'énergie[2]

$$\boxed{E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{avec} \qquad h = 6{,}63.10^{-34}\ \text{J.s}}$$

2. *Notions à connaître* : Dualité onde-particule pour la lumière. Relation de Planck-Einstein : $E = h\nu$.

où h a par la suite été nommée « constante de Planck ».

Quand un photon d'énergie suffisante frappe un électron, il est capable de lui transmettre (toute) son énergie et de libérer l'électron avec un petit excédent sous forme d'énergie cinétique de manière à pouvoir franchir le vide entre deux électrodes, d'où l'existence d'un λ_{seuil} au-dessus duquel aucun électron n'est libéré puisqu'aucun photon individuel n'a suffisamment d'énergie à transmettre par choc à un électron.

En outre, si le photon a plus d'énergie que l'énergie E_{gap} pour extraire l'électron avec une vitesse nulle, il lui transmet sous forme d'énergie cinétique

$$E_{photon} = E_{gap} + E_{c,électron}$$

Cette énergie cinétique est utilisée pour franchir la distance entre les deux électrodes, et doit donc contrecarrer l'énergie potentielle électrique permettant le franchissement de la tension U_0. On a la relation

$$E_{c,électron} = e\,U_0$$

avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C de sorte que, en isolant U_0, on trouve

$$\boxed{U_0 = \frac{h\nu - E_{gap}}{e}}$$

qui est bien linéaire en fréquence ν et passe à 0 quand $h\nu = E_{gap}$ au niveau du seuil d'existence de l'effet photoélectrique.

Conclusion La lumière est constituée de particules (ou quanta d'énergie) appelés photons dont l'énergie vaut $h\nu$ et qui ne peuvent pas attaquer les électrons à la déloyale : pour un électron éjecté, il y a forcément eu un unique photon à l'origine du drame.

EXERCICE *S11***.1** Seuil d'émission

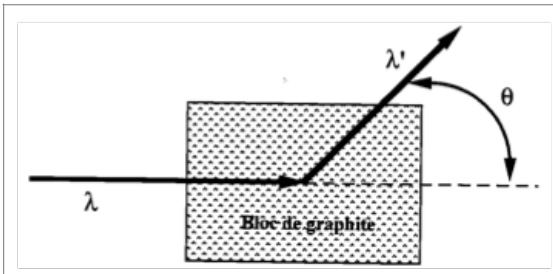
Quelle est l'énergie cinétique des photoélectrons émis par une surface de tungstène (photocathode) à l'aide d'une lumière ultraviolette de longueur d'onde 1940 Å ? Exprimer le résultat en eV. Le seuil photoélectrique du tungstène est de 230 nm.

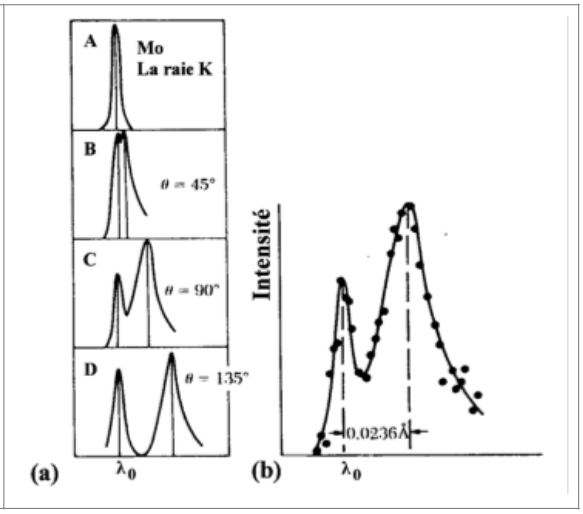
---

2 Effet Compton

a) Montage expérimental et observations

En éclairant un bloc de graphite avec un faisceau de rayons X (raie Kα du molybdène $\lambda = 0{,}071\,260\,5$ nm) et en observant le spectre des radiations diffusées sous un angle θ, A.H. Compton découvrit en 1923 les résultats suivants (agrandissement pour $\theta = 90$ř) :

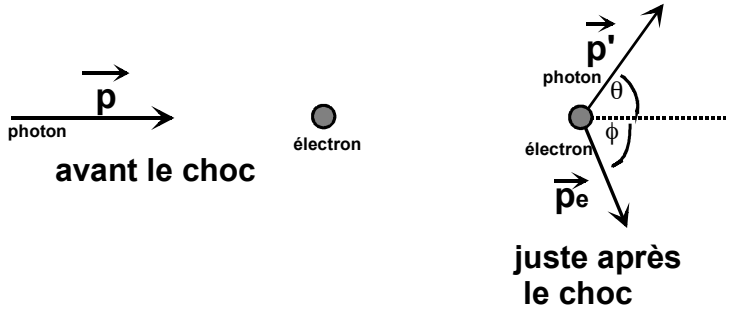




b) Implications

Approche classique Les électrons soumis au champ électrique oscillant de l'onde incidente se mettent à vibrer en synchronisme avec ce champ ; par suite de cette vibration forcée, ils rayonnent à leur tour de la lumière de même fréquence[3] et dans (presque[4]) toutes les directions. L'origine de la raie non déplacée est donc claire. Quant à la raie déplacée, qui peut même devenir plus intense, il n'est guère possible de l'expliquer clairement grâce à la théorie classique.

Approche quantique Par contre, la théorie des photons d'Einstein que Compton a repris, en fournit une interprétation particulièrement simple. Suivant cette théorie, la diffusion est considérée comme résultant du choc de chaque photon avec un des électrons libres du graphite, comme indiqué schématiquement à la figure ci-dessous : le photon incident possède la fréquence ν, l'énergie $h\nu$ et la quantité de mouvement $\vec{p}$. Après le choc, il a changé de fréquence : ν', d'énergie : $h\nu'$ et de quantité de mouvement $\vec{p}'$.



Au cours de la collision, l'électron est projeté dans une certaine direction (faisant un angle ϕ avec la direction du photon incident), emportant avec lui une certaine énergie cinétique E_{c,e^-} et une quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{e^-}}$ (empruntées au photon) tandis que le photon, dévié par le choc, continue sa course avec l'énergie et la quantité de mouvement restante qui résultent des lois de conservation, appliquées à la collision :

$$\vec{p} = \vec{p}' + \overrightarrow{p_{e^-}} \qquad \text{et} \qquad h\nu = h\nu' + E_{c,e^-}$$

Comme E_{c,e^-} est positif, on retrouve en outre que nécessairement $\nu' < \nu$, soit $\lambda' > \lambda$.

c) Quantité de mouvement du photon

Les photons se comportent donc dans certaines expériences comme des particules. En particulier, ils possèdent une quantité de mouvement et peuvent échanger de la quantité de mouvement et de l'énergie lors de chocs.

L'expression de cette quantité de mouvement est donnée par la relation de la relativité restreinte :

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

Le photon ayant une masse nulle, sa quantité de mouvement est donnée par

$$\boxed{p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}}$$

EXERCICE *S11***2** Poussée de radiation

On considère un flux de N photons par unité de temps. Quelle est la force exercée sur la paroi réfléchissante sur laquelle ils rebondissent ?

3. Voir cours de deuxième année sur le dipôle oscillant.
4. Là encore, voir le cours de deuxième année, mais pour nous, c'est comme si l'émission se faisait dans toutes les directions.

3 Implications : énergie et quantité de mouvement des photons

De ce qui précède, nous pouvons conclure que la lumière possède à la fois un caractère ondulatoire et un caractère corpusculaire.

L'énergie d'un photon est $E = h\nu$ et sa quantité de mouvement $p = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$.

Ainsi, les phénomènes d'interférence et de diffraction sont plutôt de nature ondulatoire car la région d'interaction s'étend alors sur une partie importante du front d'onde ; tandis que dans le cas de l'effet Compton et de l'effet photoélectrique, l'interaction entre la lumière et la matière est de nature corpusculaire et localisée. Or, en regardant le quantum de lumière ou photon comme un paquet d'ondes consistant en une superposition d'un grand nombre d'ondes, nous lui conférons à la fois un caractère ondulatoire et corpusculaire. Ainsi, le photon exhibe son caractère ondulatoire quand il entre en interaction avec un réseau où la phase instantanée de chaque onde est importante. Par contre, le photon manifeste son caractère corpusculaire lorsque l'énergie et la quantité de mouvement du paquet entier sont transférées à une autre particule. Nous voyons donc que de cette manière les comportements ondulatoire et corpusculaire de la lumière se complètent.

4 Application moderne : la voile solaire IKAROS

IKAROS (Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation of the Sun) est un démonstrateur de voile solaire développé par le département scientifique (ISAS) de l'Agence d'exploration aérospatiale japonaise (JAXA). Son lancement a été effectué le 20 mai 2010 par le lanceur H-IIA chargé de placer également en orbite la sonde vénusienne Akatsuki. La voile solaire utilise la pression de radiationsolaire pour accélérer. Lorsque cette technologie sera maitrisée elle pourra permettre à des sondes spatiales de masse réduite de se déplacer dans le système solaire.

IKAROS pèse 315 kg dont 15 kg pour la voile. La voile de forme carrée de 14,1 m de côté (20 mètres de diagonale) est réalisée en polyamide de 7,5 µm d'épaisseur. Des cellules solaires couvrent 10% de sa superficie et lui permet d'avoir une alimentation de 40 W. Des portions de la voile sont capables de générer une poussée variable. Au centre de la voile se trouve une capsule d'un mètre de diamètre qui contient tous les autres composants du satellite.

La mission a permis de vérifier les performances d'une propulsion basée sur une voile solaire. La poussée totale exercée par les photons sur la voile solaire d'une superficie de 173 m^2 a été mesurée à 1,12 mN valeur très proche de ce qui était prévu par les concepteurs de la sonde spatiale. La force exercée sur la sonde spatiale d'une masse de 315 kg permet d'augmenter la vitesse d'une dizaine de m/s au bout d'un mois.

Au final, entre juin et novembre 2010, la voile a vu sa vitesse augmenter de 100 m/s. Enfin, au mois de décembre 2010, les ingénieurs de la JAXA ont effectué un essai de navigation, à l'approche de Vénus, qui a montré que la trajectoire de la sonde pouvait bien être contrôlée dans une certaine mesure (IKAROS n'a pas subi une trajectoire exactement parabolique à proximité de Vénus). Pour faire pivoter la voile IKAROS, la JAXA utilise un revêtement spécial disposé sur certaines parties de la voile, dont les propriétés de transparence sont modifiables lorsqu'on y fait circuler un courant, produisant ainsi un couple autour du centre de gravité du démonstrateur.

Après s'être approchée de Vénus, la voile IKAROS a croisé à nouveau l'orbite terrestre dans le courant de l'année 2011, évoluant sur une orbite héliocentrique elliptique entre les orbites de Vénus et de la Terre.

EXERCICE *S11***.3** Voile IKAROS

À partir des données du texte et en approximant la puissance surfacique au niveau de la sonde est la même qu'au niveau de la Terre, c'est-à-dire $\mathscr{P}_{surf} = 1{,}0$ kW/m^2, vérifiez l'ordre de grandeur de la valeur prévue pour la force de poussée.

Partie II

Aspect ondulatoire de la matière

La lumière est passée du statut d'onde à celui de particule (ou plutôt, elle a la double nationalité et choisit celle qui l'arrange selon le cas), se pourrait-il qu'il en aille de même pour la matière ?

1 Longueur d'onde de de Broglie[5]

L'électron est « clairement » une particule, mais si on définit une longueur d'onde λ telle que

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$$

comme pour le photon avec p la quantité de matière de l'électron, se pourrait-il qu'il se comporte comme une onde ? Prenons un exemple numérique. Pour atteindre une vitesse de $v = c/100$, il faut placer un électron dans une différence de potentiel U telle que $U = mv^2/2e = 51$ V, autant dire que ce n'est pas extrêmement difficile... À une telle vitesse, la longueur d'onde associée vaut

$$\lambda = \frac{h}{p} = 2{,}5.10^{-10}\ \text{m} = 2{,}5\ \text{Å}$$

ce qui s'approche de la longueur d'onde associée aux rayons X, nous y reviendrons.

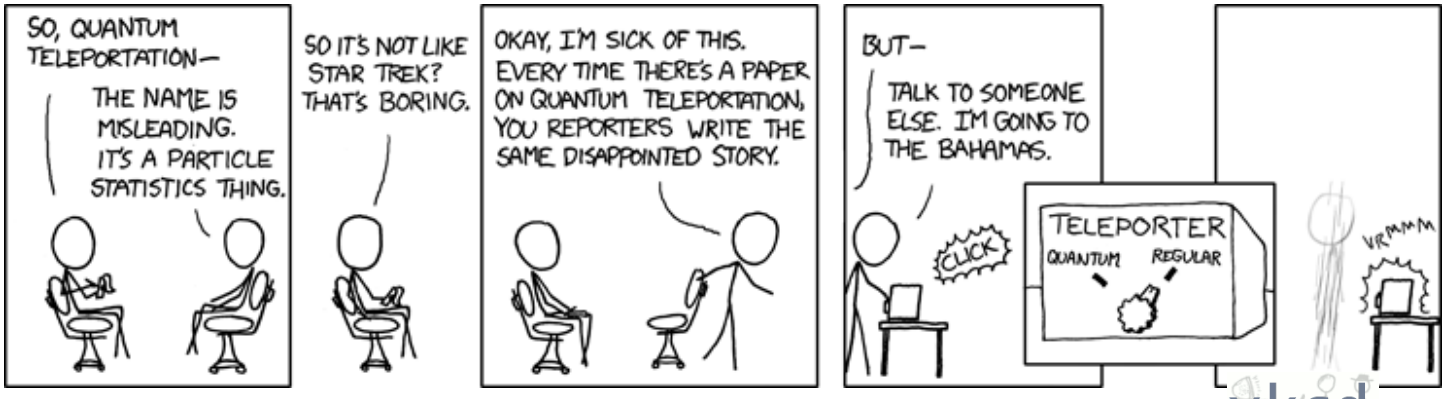
L'hypothèse que de Broglie[6] exposait dans sa thèse en 1924 est que toute matière est dotée d'une onde associée : ceci donne lieu à la dualité onde-particule[7]. De plus, la longueur d'onde λ et la quantité de mouvement p d'une particule sont reliées par une équation simple :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{et} \qquad E_c = \frac{p^2}{2m}}$$

> Cela découle aussi du cas plus général donné par la relativité où
>
> $$\boxed{E = mc^2 + E_c = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}}$$

EXERCICE *S11.4* Électron relativiste

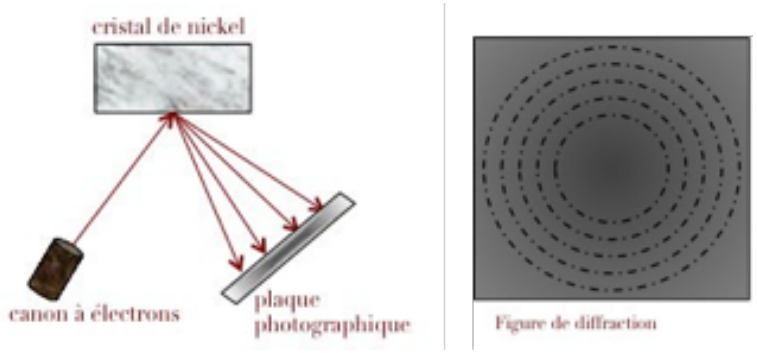
À partir de quelle énergie (en eV) ne peut-on plus négliger l'aspect relativiste d'un électron ? Comparer à la fameuse « énergie au repos » donnée par la non moins fameuse formule $E = mc^2$.



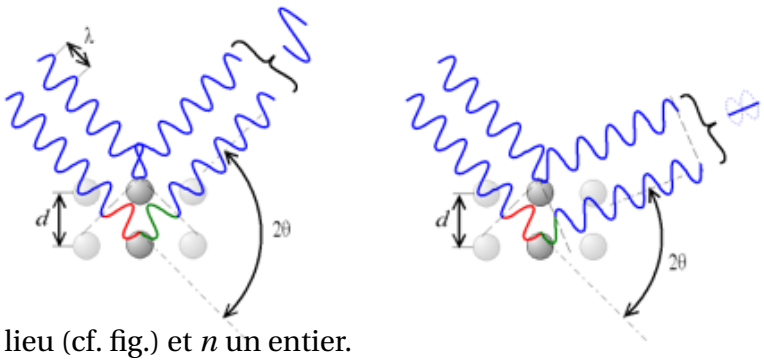
5. *Notions à connaître* : Relation de Louis de Broglie
6. Prononcer « de Breuil ».
7. *Notions à connaître* : Dualité onde-particule pour la matière.

```
Science should be exactly as cool as the headlines sound.
Like the 'RUSSIANS CUT APART AND REASSEMBLE DOGS' thing.
```

2 Confirmation expérimentale



À la fin de sa soutenance de thèse, Jean Perrin, qui était son directeur de thèse, lui demanda comment mettre en évidence cette onde hypothétique. Louis de Broglie lui répondit, sans hésiter, « en diffractant des électrons ». Ce qui fut fait en 1927 dans une expérience réalisée par George Paget Thomson, et indépendamment par Clinton Joseph Davisson et Lester Halbert Germer (expérience dite de Davisson et Germer).



Ils étudiaient la diffraction d'un faisceau d'électrons lents (10 à 100 eV) par un monocristal de nickel. Notons que la longueur d'onde associée à ces électrons est de l'ordre de grandeur des distances interatomiques dans la plupart des cristaux (cf. plus haut). Le faisceau d'électrons est fortement réfléchi lorsque l'angle satisfait à la condition de Bragg : $2d\sin\theta = n\lambda$, d étant la distance des plans réticulaires sur lesquels la réflexion a lieu (cf. fig.) et n un entier.

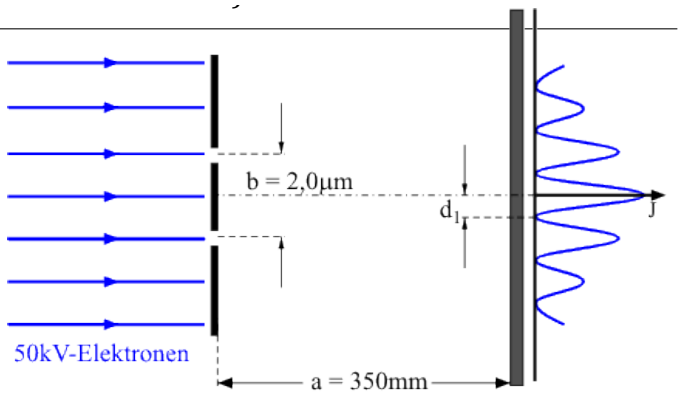
Les électrons présentaient après passage dans le cristal exactement la même figure de diffraction que des rayons X de longueur d'onde correspondante, validant ainsi l'hypothèse de départ !

Une autre preuve expérimentale importante fut la réalisation de l'expérience des trous d'Young par Claus Jönsson en 1961. Seulement, au lieu d'utiliser la lumière comme en introduction de ce chapitre, il utilisa des électrons séparés par un fil d'araignée métallisé et prouva donc le caractère ondulatoire de la matière... Voici une petite vidéo de Dr Quantum résumant cela très bien.

```
http://www.youtube.com/watch?v=DfPeprQ7oGc
```

Conclusion : Les électrons se comportent dans certaines expériences comme des ondes, surtout quand ces expériences concernent une « large » partie de l'espace et non pas une autre particule « ponctuelle ».

EXERCICE *S11***.5** Fentes d'Young électroniques



Le schéma ci-contre montre les conditions expérimentales de Jönsson (1961) qui a étudié le comportement de faisceaux d'électrons sur des fentes d'Young :

1. Déterminer la longueur d'onde des électrons d'énergie cinétique 50 keV. Faut-il utiliser les formules de la mécanique relativiste ?
2. Déterminer la valeur numérique de la distance d_1 de la figure (la figure n'est pas forcément à l'échelle...).

---

3 Notion de fonction d'onde[8]

On doit à présent définir une représentation mathématique qui puisse à la fois être interprétée comme une onde et comme une particule. L'objet central jouant ce rôle en mécanique est la « fonction d'onde » traditionnellement notée $\psi(x,t)$ qui est une fonction de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^4$ si on rajoute y et z à x et t) dans $\mathbb{C}$ telle que $|\psi|^2$ représente la densité de probabilité de trouver l'objet quantique (ici l'électron) en un endroit donné. En particulier, la probabilite dP de trouver la particule en x à $\mathrm{d}x$ près à l'instant t vaut

$$\boxed{\mathrm{dP} = |\psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x}$$

Comme on sait que la particule est « quelque part », on a naturellement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

puisque si l'on somme les probabilités de trouver la particule dans tous les endroits possibles, on trouvera forcément la particule : l'évènement est sûr, la probabilité de l'avoir est égale à 1.

Le caractère complexe de la fonction d'onde est *très* important et contient une grande partie de la richesse des comportements observés en mécanique quantique. Nous ne pourrons malheureusement pas explorer ces phénomènes plus avant, mais ils seront un tout petit peu découvert en seconde année et encore plus en École lorsque vous étudierez la mécanique quantique plus en détail.

Voir les vidéos de MinutePhysics

`https://www.youtube.com/watch?v=Q_h4IoPJXZw`

et surtout `https://www.youtube.com/watch?v=_riIY-v2Ym8`

EXERCICE *S11.6* Fonction d'onde

La fonction d'onde d'une particule ponctuelle s'écrit

$$\Psi(x) = \begin{cases} \mathrm{A}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/a} + 1\right) & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer |A|. Indication : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u} = 2\cos(u)$
2. Dessiner $|\Psi(x)|^2$. Sans faire de calcul, évaluer la dispersion Δx de la position de la particule.
3. Quelle est la probabilité P_1 de trouver la particule entre les points d'abscisses respectives 0 et $a/2$ lors d'une mesure de position.

8. *Notions à connaître* : Interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde : approche qualitative.

4 Inégalité de Heisenberg[9]

Vidéo explicative de Véritasium :

https://www.youtube.com/watch?v=a8FTr2qMutA

Retour sur la diffraction de la lumière par une fente/un trou/un cheveu de taille d... La tache centrale de diffraction a comme taille angulaire 2θ avec $\sin\theta \approx \lambda/d$ soit $d = \lambda/\sin\theta$. Cette figure de diffraction peut être vue pour la lumière mais aussi pour des particules à cause de leur caractère ondulatoire. Plus la fente est fine, plus la tâche de diffraction est large, donc plus quantité de mouvement selon Ox pourra être grande. La position initiale de la particule lorsqu'elle passe pas la fente est connue à une distance $d/2$ près donc à

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

SCHEMA

Sa quantité de mouvement selon Ox après la fente est comprise entre 0 et $p\sin\theta$ (voir figure) avec $p = h/\lambda$ grâce à la relation de de Broglie. On a donc

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda}\sin\theta$$

On constate alors que $$\Delta x\,\Delta p_x \approx \frac{\lambda}{2\sin\theta} \times \frac{h}{\lambda}\sin\theta = \frac{h}{2}$$

Des calculs plus poussés dans plein de cas avec une définition plus précise de l'incertitude donnent alors la relation suivante dite inégalité de Heisenberg spatiale :

$$\boxed{\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2} \qquad \text{avec} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}}$$

EXERCICE *S11***.7** Inégalité d'Heisenberg

On considère que tous les systèmes qui suivent ont une trajectoire rectiligne (axe noté x par exemple). Calculer l'incertitude sur la vitesse ou sur les positions dans les cas suivants :

1. Automobile roulant à $100 \pm 0{,}01$ km.h^{-1} (masse : 1 tonne).
2. Balle de fusil dont la position à l'instant t est connue à $\pm 0{,}01$ mm près (masse 100 g).
3. Atome d'hydrogène dont la vitesse est connue à ± 1 cm.s^{-1} près.
4. Électron dont la position est connue à ± 1Å près.

9. *Notions à connaître* : Inégalité de Heisenberg spatiale.

NB : En mécanique quantique, l'incertitude n'est absolument pas due à l'imprécision de l'appareil de mesure, mais bien au caractère intrinsèquement aléatoire de la mesure quantique : on ne peut prédire avec certitude comment le système évoluera. On ne peut p.ex. pas prédire qui d'entre un grand nombre de noyaux radioactifs va subir une désintégration.

Vers 1927, Heisenberg affirme que l'existence des photons entraîne une limitation de la précision de la mesure simultanée de la position et de l'impulsion d'une particule matérielle par une méthode optique.

En effet, pour déterminer x avec précision, on cherchera à réduire les phénomènes de diffraction et, par conséquent, on emploiera de la lumière de courte longueur d'onde, mais, ce faisant, on utilisera des photons plus énergétiques, qui bousculeront davantage la particule et lui donnent de l'énergie. Inversement, la diminution de Δp_x exigera l'augmentation de λ, et par suite de Δx.

5 Interprétation probabiliste : retour sur les trous d'Young

Cette expérience peut être faite avec des ondes de toutes sortes, en particulier avec des ondes lumineuses, p.ex. un laser. Que se passe-t-il lorsqu'on diminue l'intensité de lumière de manière à assurer le passage d'un photon à la fois par chacune des fentes? Lorsqu'on attend suffisamment longtemps, on observe à nouveau des franges d'interférences. En effet, leurs impacts se répartissent de manière aléatoire et, seulement lorsqu'un grand nombre de photons est arrivé sur l'écran, la figure d'interférence se reconstitue (voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=GzbKb59my3U`). C'est exactement pareil qu'avec des particules (électrons p.ex.)

Nous pouvons seulement dire que la probabilité pour qu'un photon frappe l'écran en un point est proportionnelle à l'intensité I ou $\|\vec{\mathrm{E}}\|^2$ en ce point. Pour les particules c'est pareil, mais on ne parlera pas d'intensité (lumineuse) ni de champ électromagnétique, mais c'est également le carré de l'amplitude de la fonction d'onde. Cette expérience confirme donc bien le comportement « probabiliste » des corpuscules microscopiques. On dit encore que le photon se trouve dans un état caractérisé par la probabilité P et qui est lié au carré de l'amplitude de la fonction d'onde.

Partie III

Systèmes quantiques

1 Oscillateur harmonique quantique[10]

Un oscillateur harmonique est une particule qui est soumise à une interaction dont l'énergie totale s'écrit

$$\mathrm{E} = \overbrace{\frac{1}{2} m \omega_0{}^2 x^2}^{\mathrm{E_p}} + \overbrace{\frac{{p_x}^2}{2m}}^{\mathrm{E_c}}$$

On remplace x par Δx et p_x par Δp_x : histoires de dispersions. On a donc, puisque $\Delta x \times \Delta p_x \approx \hbar$

$$\mathrm{E} \approx \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 (\Delta x)^2 + \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2}$$

On remarque qu'en cas de confinement trop brutal ($\Delta x \to 0$), le terme en énergie cinétique explose (et inversement si on essaie d'arrêter la particule). On a donc une valeur minimale de l'énergie qui est **non nulle**. En cherchant le minimum en Δx de l'expression précédente, on trouve

$$\mathrm{E_{min}} \approx \hbar \omega_0$$

Le calcul rigoureux donne $\mathrm{E_{min}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$.

10. *Notions à connaître* : Énergie minimale de l'oscillateur harmonique quantique.

2 Particule dans un puits de potentiel infini[11]

C'est une particule confinée dans une boîte de largeur L. Elle ne peut en sortir, sa probabilité de présence est donc nulle sur les bords. Par conséquent sa fonction d'onde doit s'annuler aux extrémités; elle est donc formée d'ondes stationnaires de la forme

$$\psi(x) = \mathrm{A}\sin(kx) \qquad \text{avec} \qquad \psi(\mathrm{L}) = 0$$

Ceci impose donc $$k_n = n\frac{\pi}{\mathrm{L}} \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Par conséquent on a une quantification de la quantité de mouvement :

$$\boxed{p_n = \hbar\, k_n = \frac{nh}{2\mathrm{L}}}$$

Et de même de l'énergie cinétique :

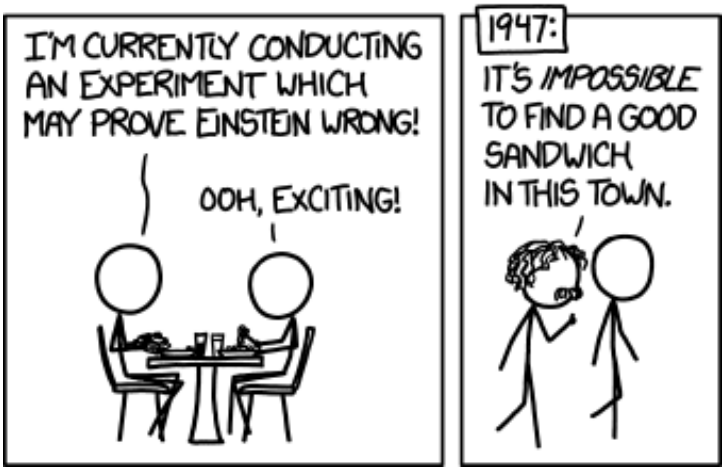
$$\boxed{\mathrm{E_{c},}_n = \frac{{p_n}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2\mathrm{L}}\right)^2 = n^2\frac{h^2}{8m\mathrm{L}^2}}$$

Conclusion : Le confinement d'une particule dans une boîte (puits de potentiel infini) induit une quantification de sa quantité de mouvement et de son énergie.

L'énergie minimale est celle qui correspond à l'état $n = 1$. (peut se retrouver avec Heisenberg)

EXERCICE *S11***8** Puit de potentiel infini

1. Un électron dans un puits quantique infini absorbe de la lumière. La plus grande longueur d'onde dans le spectre d'absorption est de 600 nm. Quelle est la taille de la boite quantique?
2. Un électron dans un puits infini émet des photons de longueur d'onde 1484 nm lors de la transition $3 \longrightarrow 2$. Décrire son spectre d'émission et donnez la dimension de la boite.




```
Einstein was WRONG when he said that provisional patent #39561
represented a novel gravel-sorting technique and
should be approved by the Patent Office.
```

11. *Notions à connaître* : Quantification de l'énergie d'une particule libre confinée 1D

3 Atome de Bohr

Quand de l'hydrogène gazeux sous faible pression (10^{-3} à 10^{-4} atm, ≈ 0,5 mmHg) est soumis à une décharge électrique (10 à qq 100 volts), certaines liaisons H-H sont coupées. Les atomes d'hydrogène sont excités et retombent dans leur état fondamental avec émission d'un rayonnement électromagnétique à différentes longueurs d'onde. On obtient le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène avec la série de Lyman. D'autres séries de raies apparaissent dans l'ultraviolet , le visible et l'infrarouge:Lyman (UV), Balmer (proche-UV, Vis), Paschen, Brackett, Pfund (IR),

Pour expliquer ces raies, Niels Bohr en 1913 (prix Nobel, 1922) utilise la quantification introduite par Planck : « Toute variation de l'énergie d'un atome ou d'une molécule, doit être considérée comme un processus élémentaire qui fait passer cet atome ou cette molécule d'un état stationnaire à un autre... » L'électron est sur une orbite stationnaire, circulaire, stable, de rayon r et d'énergie E, sur laquelle il ne rayonne pas d'énergie. Nous ne suivrons pas le raisonnement de Bohr qui utilisait le moment cinétique, mais allons utiliser nos outils. On a $2\pi r = n\lambda$ (orbite stationnaire) et d'après de Broglie $p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{nh}{2\pi r} = \dfrac{n\hbar}{r}$.

SCHEMA

On retrouve là l'hypothèse de Bohr concernant la quantification du moment cinétique σ_O qui vaut $r \times p$ ici :

$$\sigma_O = r \times p = n\hbar$$

La suite est un peu plus délicate car il faut un deuxième lien entre r et p pour calculer l'énergie de l'électron (puisque r varie aussi avec n en $n^2\, a_0$). L'exercice sera fait en mécanique et on montre que pour une force F centrale, on a la relation

$$-\frac{p^2}{mr} = \mathrm{F} = \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \qquad \text{(force électrostatique)}$$

On élimine p, on trouve $r = n^2\, a_0$ et on remplace dans l'énergie totale

$$\mathrm{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{q\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0\, r} = -\frac{\mathrm{E}_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{E}_0 = \frac{m_e\, e^4}{8\,{\varepsilon_0}^2\, h^2}$$

L'électron ne peut alors changer d'orbite que par sauts d'un niveau d'énergie $\mathrm{E_i}$ à un autre $\mathrm{E_f}$, ce qui correspond à l'absorption/émission d'un photon d'énergie $h\nu = |\mathrm{E_f} - \mathrm{E_i}|$. L'atome de Bohr marche bien pour l'atome d'hydrogène et les hydrogénoïdes (en fait les entités à un seul électron), sinon il faut introduire, ℓ et m (nombres quantiques) dans les niveaux d'énergie.

EXERCICE *S11.9* Atome de Bohr

Faire le détail des calculs précédents.

CORRECTION *S11*.1 Seuil d'émission

L'énergie cinétique est l'énergie qui reste à l'électron après qu'on ait réussi à l'arracher au métal. L'énergie permettant pile d'arracher l'électron est donné par le photon correspondant au seuil photoélectrique, de sorte que

$$\boxed{E_c = E_{tot} - E_{seuil} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{seuil}} = 1{,}60.10^{-19}\ \text{J} = 1{,}00\ \text{eV}}$$

CORRECTION *S11*.2 Poussée de radiation

Chaque photon qui rebondit voit sa quantité de mouvement varier de $2h\nu/c$ en valeur absolue (il passe de $+h\nu/c$ à $-h\nu/c$). Par conséquent, la variation de quantité de mouvement de la paroi est la même en valeur absolue (la variation relative est opposée). Comme la RFD dit que la force qui s'exerce sur un objet est liée à la variation de la quantité de mouvement au cours du temps, il suffit de multiplier la quantité précédente par le nombre de photon qui tape la surface par unité de temps pour obtenir la force

$$\boxed{F = N\frac{h\nu}{c} = \frac{N\,h}{\lambda}}$$

CORRECTION *S11*.3 Voile IKAROS

Une puissance étant une énergie par unité de temps, la puissance surfacique $\mathscr{P}_{surf}$ permet d'évaluer le nombre de photons qui se baladent à cet endroit par unité de surface et unité de temps. Il suffit de diviser la puissance par l'énergie d'un photon pour connaître le nombre associé de photons par secondes en supposant pour simplifier que le Soleil n'émet que des photons de longueur d'onde $\lambda = 500$ nm. Ainsi, en notant S la surface des voiles, on a le nombre de photons par unité de temps qui vaut

$$N = \frac{\mathscr{P}_{surf}\,S}{h\nu} = \frac{\mathscr{P}_{surf}\,S\,\lambda}{hc} = 4{,}3.10^{23}\ \text{photons/s}$$

La force exercée est donc donnée par la variation de quantité de mouvement de la voile par unité de temps, c'est-à-dire la variation de quantité de mouvement d'un photon lors du rebond multiplié par le nombre de photons qui heurtent la voile par unité de temps.

$$\boxed{F = N \times \frac{2h}{\lambda} = \frac{2\mathscr{P}_{surf}\,S}{c} = 0{,}58\ \text{mN}}$$

On trouve bien le même ordre de grandeur puisque la puissance surfacique au niveau de Vénus est plus élevée qu'au niveau de la Terre, étant plus proche du Soleil.

CORRECTION *S11.4* Électron relativiste

Un électron sera relativiste lorsqu'il atteint à peu près un tiers de la vitesse de la lumière, soit $1{,}0.10^8$ m/s. L'énergie cinétique correspondante vaut

$$\boxed{\mathrm{E_c} = \frac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2 = 4{,}5.10^{-15}\ \mathrm{J} = 28\ \mathrm{keV}}$$

C'est de l'ordre de grandeur du dixième de l'énergie au repos $m_\mathrm{e}c^2 = 506$ keV, ce qui n'est guère surprenant puisque cela correspond à la fois au moment où le terme pc devient non négligeable devant mc^2 et que l'on dit être relativiste quand v approche de c avec une expression très similaire pour le calcul de l'énergie ($mv^2/2$ vs mc^2).

CORRECTION *S11.5* Fentes d'Young électroniques

1. La vitesse est donnée par $$v = \sqrt{\frac{2\mathrm{E_c}}{m}} = 1{,}3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

   On s'approche dangeureusement de la valeur de la vitesse de la lumière ($\gamma = 1{,}2$), mais l'ordre de grandeur devrait rester correct. Ainsi,

   $$\lambda = \frac{h}{mv} = 5{,}5.10^{-12}\ \mathrm{m}$$

   Si l'on voulait utiliser la relativité, il faudrait prendre les formules suivantes (non encore fournies en cours, cela attendra le cours de mécanique) :

   $$\mathrm{E_c} = (\gamma - 1) mc^2 \qquad \text{et} \qquad p = \gamma mv \qquad \text{avec} \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

   L'expression de $\mathrm{E_c}$ permet de trouver γ puis la vitesse v

   $$\gamma = \frac{\mathrm{E_c} + mc^2}{mc^2} = 1{,}1 \qquad \text{soit} \qquad v = c\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = 1{,}2.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

   On utilise alors l'expression de la quantité de mouvement relativiste pour obtenir la longueur d'onde

   $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv} = 5{,}4.10^{-12}\ \mathrm{m}$$

   On voit que même jusqu'à 1/3 de la vitesse de la lumière, les estimations à 2CS sont parfaitement équivalentes (seul le dernier chiffres significatif change d'une unité).

2. Une distance de 35 cm peut être considérée comme l'infini pour des trous distant de 2 µm et des onde de $\lambda = 5{,}4.10^{-12}$ m. Ainsi, on peut utiliser la formule de l'interfrange des interférence à grande distance : $i = \lambda a/b$. Ici, la distance d_1 recherchée est le demi-interfrange, soit

   $$\boxed{d_1 = \frac{\lambda a}{2b} = 4{,}7.10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

   Le schéma n'est finalement pas trop mal à l'échelle au niveau de la verticale.

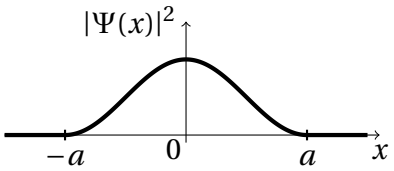
CORRECTION *S11.6* Fonction d'onde

1. On est sûr de trouver la particule quelque part entre $-a$ et $+a$. On a donc

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-a}^{a} |\Psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= |\mathrm{A}|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} + 1\right|^2 \frac{a\,\mathrm{d}u}{\pi} && \text{avec } u = \frac{\pi x}{a} \\
&= |\mathrm{A}|^2 \,\frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u/2}\right)\right|^2 \mathrm{d}u \\
&= |\mathrm{A}|^2 \,\frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u && \text{car } \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u/2}\right| = 1 \\
1 &= |\mathrm{A}|^2 \, 4a && \text{car } \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} 2\,(1+\cos u)\,\mathrm{d}u = 4\pi
\end{aligned}$$

   soit $\boxed{|\mathrm{A}| = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}}$

2. Dans le calcul précédent, on a vu que $|\Psi(x)|^2 = 4\,|\mathrm{A}|^2 \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)$, dont la représentation graphique est donnée ci-contre



3. On va à nouveau avoir besoin de l'identité $2\cos^2(u/2) = 1+\cos(u)$ et on peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_1 &= \int_0^{a/2} |\Psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= |\mathrm{A}|^2 \,\frac{4a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(u)}{2} \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{u+\sin(u)}{2}\right]_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}_1 = \frac{\pi+2}{4\pi}}$$

CORRECTION *S11.7* Inégalité d'Heisenberg

1. $$\Delta x_{\text{automobile}} \approx \frac{\hbar}{m\,\Delta v} = 3{,}8.10^{-35}\ \mathrm{m}$$

2. $$\Delta v_{\text{balle}} = \frac{\hbar}{m\,\Delta x} = 1{,}1.10^{-28}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

3. $$\Delta x_{\mathrm{H}} = \frac{\hbar}{m\,\Delta v} = 6{,}3.10^{-6}\ \mathrm{m}$$

4. $$\Delta v_{\text{électron}} = \frac{\hbar}{m\,\Delta x} = 1{,}2.10^{6}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

CORRECTION *S11.8* Puit de potentiel infini

1. La plus petite énergie de transition entre deux état correspond à la transition de $n = 2$ à $n = 1$, d'où

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 4E_1 - E_1 = 3E_1 = \frac{3h^2}{8ma^2} \qquad \text{car} \qquad E_n = n^2 E_1$$

avec a la taille de la boîte. De plus, le photon émis est tel que $\Delta E = h\nu = hc/\lambda$, soit

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{3h^2\lambda}{8mhc}} = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}} = 0{,}74 \text{ nm}}$$

2. Pour la transition de 3 vers 2, la variation énergétique vaut

$$\Delta E = E_3 - E_2 = 9E_1 - 4E_1 = 5E_1 = \frac{5h^2}{8ma^2}$$

On trouve alors avec le même raisonnement

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{5h\lambda}{8mc}} = 1{,}5 \text{ nm}}$$

CORRECTION *S11.9* Atome de Bohr

La relation $rp = n\hbar$ permet d'isoler $p = n\hbar/r$ que l'on remplace dans l'autre relation pour obtenir

$$\left(\frac{n\hbar}{r}\right)^2 \times \frac{1}{m_e r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r_n = n^2 a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$$

où a_0 est nommé le rayon de Bohr et vaut 0,529 Å = 52,9 pm. Il reste à remplacer p_n et r_n dans l'expression de l'énergie mécanique et simplifier quelque peu pour obtenir la forme prédite.

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{{p_n}^2}{2m_e} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_n} \\ &= \left(\frac{n\hbar}{n^2 a_0}\right)^2 \frac{1}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n^2 a_0} \\ &= \left(\frac{m_e e^2}{n 4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{2m_e} - \frac{m_e e^4}{n^2 (4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} \\ &= -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad E_0 = \frac{m_e e^4}{8{\varepsilon_0}^2 h^2}} \qquad \text{en remplaçant } 2\pi\hbar = h$$

Grâce à cette forme de l'énergie, Bohr fut capable d'expliquer le spectre d'émission de l'hydrogène et, par extension, de tous les atomes hydrogénoïdes (c'est-à-dire n'ayant plus qu'un seul électron dans leurs couches électroniques).