S10

Superposition de deux signaux

Partie I

Interférences[1]

1 Définition

En mécanique/optique ondulatoire, on parle d'interférences lorsque deux ondes de même type (=même pulsation) se rencontrent et interagissent l'une avec l'autre.

On parle d'interférences constructives quand les deux ondes se renforcent l'une l'autre pour résulter en une oscillation de plus grande amplitude.

On parle d'interférences destructives quand les deux ondes se compensent l'une l'autre pour résulter en une oscillation de plus petite amplitude (voire d'amplitude nulle).

2 Visualisation : cuve à onde

`http://tinyurl.com/interferences-cuve-a-ondes`

3 Notion de déphasage

Supposons que l'on dispose de deux signaux respectivement

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Alors, la quantité $\boxed{\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$

est appelée déphasage du signal 2 par rapport au signal 1. Si $\varphi > 0$ alors u_2 est en *avance* sur u_1. Au contraire, si $\varphi < 0$, φ_2 est en *retard* sur u_1. Regardons comment on peut le mesurer sur un exemple concret.

SCHEMA

1. *Notions à connaître* : Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.

Notons t_0 le temps qui sépare le passage au maximum de u_1 de celui du maximum de u_2. Comme il y a deux manières de le calculer (un maximum de u_1 est encadré par *deux* maxima de u_2, indiscernables l'un de l'autre), on prend t_0 tel que $|t_0| < T/2$. Ainsi, si $t_0 > 0$, cela signifie que u_2 est en *retard* sur u_1 puisqu'il passe par son maximum *après* u_1. À l'inverse, si $t_0 < 0$, u_2 est en *avance* sur u_1 (son maximum est atteint *avant* que u_1 n'atteigne le sien). On voit alors qu'à un facteur multiplicatif près, le graphe de u_2 n'est que la translation temporelle de t_0 de celui de u_1. Ainsi, on a que

$$u_2(t) = A_2 \cos(\omega(t - t_0) + \varphi_1) = A_2 \cos(\omega t - \omega t_0 + \varphi_1)$$

Or, on peut réécrire u_2 sous la forme

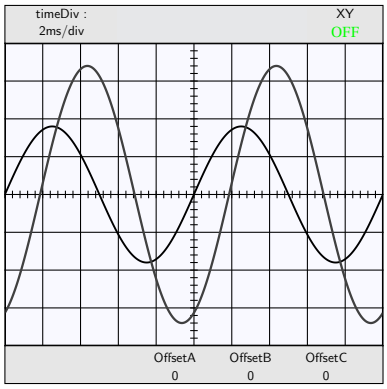
$$u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1) = A_2 \cos(\omega t + \varphi + \varphi_1)$$

En identifiant les deux écritures, on obtient l'égalité (à 2π près comme toujours en trigonométrie)

$$\boxed{\varphi = -\omega t_0 = -2\pi \frac{t_0}{T}}$$

où l'on remarque que φ est positif *ssi* $t_0 < 0$, c'est-à-dire si le signal 2 est en *avance* sur le premier, alors qu'au contraire il est négatif si le signal 2 est en *retard* sur le signal 1. On remarque aussi que déphasage φ et décalage temporel t_0 sont relié. En particulier, si le décalage temporel est (en valeur absolue) de T/2, on est en opposition de phase et le déphasage vaut π (soit $2\pi/2$). Si le décalage temporel est de T, on est de nouveau en phase et le déphasage vaut 2π (modulo 2π, donc 0 en fait). Si on est décalé de T/4, alors le déphasage est de $2\pi/4$, etc.. Bref, mesurer t_0 en unités de T permet de trouver φ mesuré en unités de 2π.

EXERCICE *S10*.1 Mesure de déphasage



Quel est le déphasage de la courbe de plus grande amplitude par rapport à celle de plus petite amplitude?
Questions auxiliaires : mesurer les amplitudes et les périodes des deux courbes.

4 Représentation de Fresnel

a) Principe

La représentation de Fresnel permet de visualiser géométriquement la somme de fonctions sinusoïdales en passant par ce que l'on connait sur les complexes et notamment la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Commençons par quelques rappels : tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous forme trigonométrique

$$z = r\,e^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$$

donc à tout signal sinusoïdal qui s'écrit $u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, on peut associer un nombre complexe

$$\underline{u}_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + i A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

tel que $\boxed{u_1(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}_1)}$

L'avantage de cette « notation complexe » est que l'on peut facilement faire une représentation graphique dans le plan complexe en dessinant une flèche partant de l'origine dont la longueur vaut l'amplitude A_1 et dont l'angle par rapport à l'horizontale vaut $\omega t + \varphi_1$.

SCHEMA

> Quand on fera de l'électricité, on utilisera les mêmes notations complexes en remplaçant le i du mathématicien par un j car les courants électriques se notent nativement par des i.

b) Application

Fresnel n'a pas tellement d'intérêt pour représenter un unique signal sinusoïdal. En revanche, il devient fort utile quand il s'agit de les sommer car on peut faire une résolution purement graphique au problème : obtenir la flèche représentant le complexe représentatif de la somme et en déduire l'amplitude du signal résultant ainsi que son déphasage.

Ainsi, si l'on a deux signaux respectivement $u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ associés aux complexes $\underline{u}_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}$ et $\underline{u}_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$ alors la partie réelle de la somme $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ vaut naturellement $u_1(t) + u_2(t)$ (car la partie réelle d'une somme vaut la somme des parties réelles, la partie réelle est une fonction dite linéaire). Il suffit donc de déterminer le module et l'argument de $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ pour avoir accès respectivement à l'amplitude et à la phase de l'onde résultante.

SCHEMA

En pratique, on dessine les deux flèches associées à $\underline{u_1}$ et $\underline{u_2}$ lorsque $t = 0$ (car le terme en ωt se contentera de faire tourner toutes les flèches « en bloc ») et on regarde où pointe la flèche qui démarre à l'origine, va au bout de $\underline{u}_1$ puis suit $\underline{u_2}$ comme si on l'avait accrochée directement à la suite de $\underline{u}_1$. Bien sûr, comme la somme est commutative, on doit retrouver la même chose si on suit d'abord $\underline{u_2}$ puis $\underline{u}_1$. Le résultat est alors donné par la règle dite « du parallèlogramme » et il suffit de mesurer à la règle la longueur de la flèche résultante ou d'appliquer le théorème d'Al Kashi pour obtenir

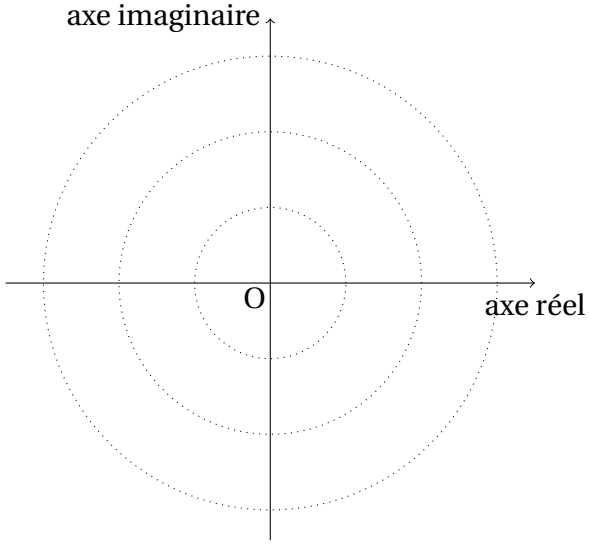
$$\boxed{A_{tot} = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\varphi}}$$

Dans le cas de la lumière, l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude, d'où $I = \alpha A^2$. On peut alors écrire la formule précédente en fonction des intensités, appelée « formule de Fresnel », et on obtient

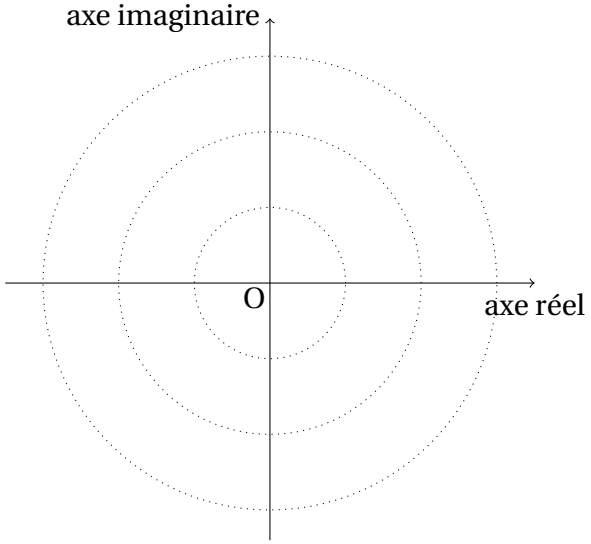
$$\boxed{I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi}$$

EXERCICE *S10***2** Représentation de Fresnel

Sommer les signaux $-3\cos(\omega t + 3\pi/4)$ et $3\cos(\omega t - 4\pi/3)$.



Sommer les signaux $-2\cos(\omega t - 10\pi/6)$ et $2\sin(\omega t - 4\pi/3)$.



5 Interférences constructives et destructives

a) Définition

Dans la formule précédente, on se rend compte que A_{tot} est maximum quand $\cos\varphi$ est maximum, c'est-à-dire pour $\varphi = 0$ modulo 2π. A_{tot} vaut alors $A_1 + A_2$, les signaux sont dits « en phase » et les amplitudes se somment simplement. On parle d'interférences *constructives*.

Au contraire, A_{tot} sera minimum lorsque $\cos\varphi$ est minimum, donc $\varphi = \pi$ modulo 2π. A_{tot} vaut alors $|A_1 - A_2|$, les signaux sont dits en « opposition de phase », les amplitudes se soustraient. On parle d'interférences destructives : l'amplitude totale peut même être nulle dans le cas où les deux signaux étaient d'égales amplitude.

EXERCICE *S10***3** Identités remarquables

Démontrer que $A_{tot}(\varphi = 0) = A_1 + A_2$ et $A_{tot}(\varphi = \pi) = |A_1 - A_2|$.

Certains casques « anti-bruit » prennent avantage de cette propriété : ils enregistrent le son extérieur et l'incorpore à celui émis dans les écouteur de sorte qu'il ait même amplitude et soit en opposition de phase au moment de toucher le tympan. De la sorte, seul le signal que l'on veut vraiment entendre nous parvient alors que le reste s'annihile avec son « anti-alter-ego »

b) Caractérisation pour deux sources

Lorsqu'on dispose de deux sources S_1 et S_2 en phase à l'émission, les interférences seront constructives si l'une des ondes a parcouru un nombre entier de longueurs d'onde supplémentaires de sorte qu'au point M de réception, elles se retrouvent bien en phase. Bien sûr, l'effet sera d'autant plus important que l'on pourra négliger l'atténuation.

Interférences constructives $\boxed{S_2M - S_1M = n\lambda \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{Z}}$

Au contraire, les interférences seront destructives (et le signal final d'amplitude nulle si les amplitudes des deux sources sont bien accordées) à condition qu'au point M d'observation, les deux sources soient en opposition de phase, c'est-à-dire qu'une des ondes ait eu à parcourir une demi-longueur d'onde de plus que l'autre (modulo λ)

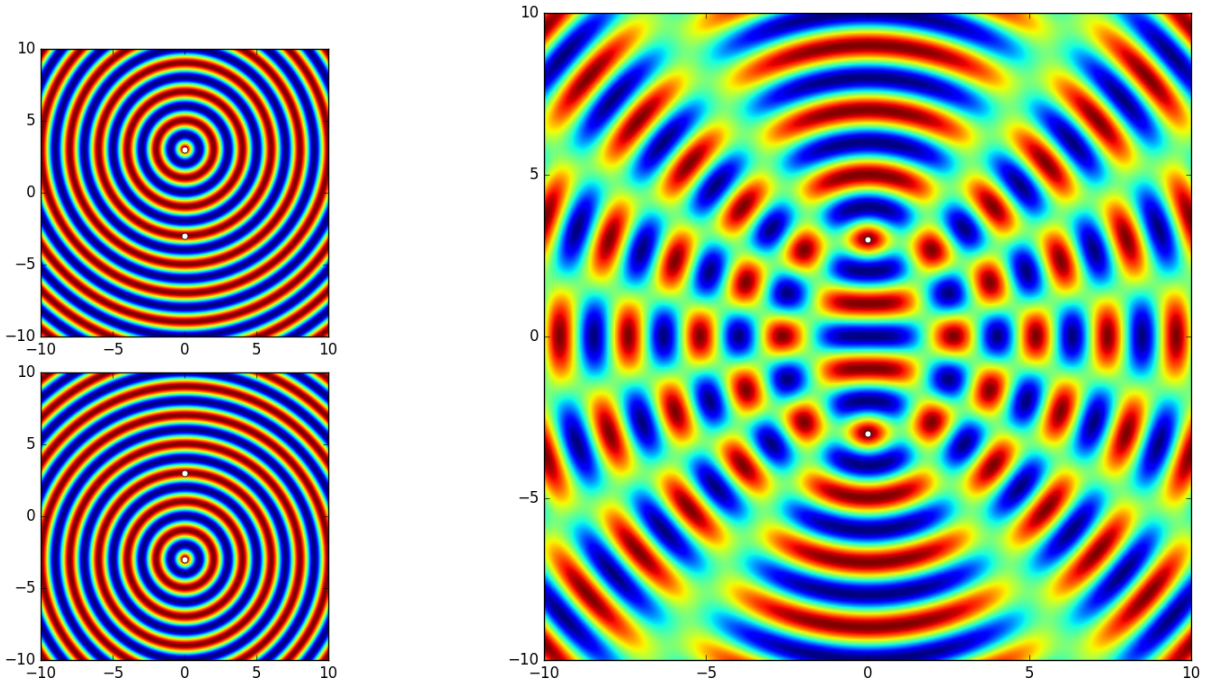
Interférences destructives $\boxed{S_2M - S_1M = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{Z}}$

SCHEMA

NB : la quantité $\delta = S_2M - S_1M$ s'appelle la « différence de marche ». C'est la quantité primordiale qu'il faut réussir à calculer correctement dans tout problème d'interférence.

c) Simulation numérique

L'animation de la page `http://pcsi.kleber.free.fr/IPT/doc/S03_interferences_animation.mp4` permet de se faire une idée de ce qui se passe. La figure ci-dessous correspond à l'instant $t = 0$ de la simulation :



Les deux sources sont placées sur la ligne centrale verticale. On se rend compte que les directions prises par les zones d'interférences respectivement destructives et constructives restent globalement les même lorsqu'on s'éloigne vers la droite[2]. C'est ce aspect que l'on va plus particulièrement étudier dans le dispositif des fentes d'Young

d) Dispositif d'Young : interfrange à l'infini

On place les deux sources à une distance de a l'une de l'autre autour de l'origine O selon l'axe Oy. On va placer un écran à droite des sources à une distance D selon l'axe Ox. En prenant une distance D bien supérieure à la fois à a et à la longueur d'onde λ, on pourra par la suite supposer l'écran placé à l'infini dans cette

2. ou vers la gauche, d'ailleurs.

direction. Mais du coup, comment calculer la différence de deux longueurs infinies ? La réponse se trouve la figure placée plus haut dans ce document et dans une application généralisée du principe de retour inverse de la lumière[3] : en effet, si on imagine une seule source placée très loin de nous, alors deux rayons « proches » issus de la source sont quasi-parallèles et la surface équiphase (c'est-à-dire telle que les deux ondes ont parcouru la même distance) est directement perpendiculaire à la direction (quasi-commune) des deux rayons. Si c'est le cas dans un sens, alors c'est aussi le cas dans l'autre sens, et il suffit de regarder le décalage au départ comme on le voit dans le schéma suivant

SCHEMA

La différence de marche δ pour les deux rayons partant interférer à l'infini dans une direction faisant un θ avec l'horizontale vaut donc

$$\boxed{\delta = a\sin\theta}$$

Les directions θ_n telles que les interférences sont constructives avec nos deux sources en phases initialement sont donc telles que

$$\sin\theta_n = \frac{n\lambda}{a} \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N}$$

D'autre part, en reconsidérant à présent l'écran à une distance finie et en notant y le décalage vertical du point M que l'on regarde sur l'écran, on a la relation

$$\tan\theta = \frac{y}{D}$$

L'écran étant tout de même « loin », les angles sont certainement suffisamment petits pour que l'on puisse assimiler sinus et tangente de sorte que les positions y_n d'interférences constructives sont données par

$$y_n = \frac{n\lambda}{a} D \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Finalement, ce qui nous intéresse usuellement le plus est l'interfrange (noté i), c'est-à-dire l'espacement entre deux franges brillantes consécutives, c'est-à-dire

$$\boxed{i = y_n - y_{n-1} = \frac{\lambda D}{a}}$$

EXERCICE *S10***4** Application directe

Une onde lumineuse bleue (λ = 420 nm) passe dans deux trous d'Young espacés de 0,25 mm. On observe sur un écran situé à 85 cm de distance.

1. Quelle est la distance séparant deux franges brillantes ?
2. Si on observe un interfrange valant i = 5,0 mm, quelle est la longueur d'onde de la radiation incidente ? Est-elle visible à l'œil ?

3. La lumière étant une onde sans grand chose de particulier (si ce n'est sa célérité), si le principe de retour inverse s'y applique, il devrait aussi s'appliquer à une onde quelconque, dans une certaine mesure.

EXERCICE *S10***5** Généralisation avec développement limité (plus dur)

Les sources sont placées aux points de coordonnées respectifs $S_1 = (0, a/2)$ et $S_2 = (0, -a/2)$. Le point M quant à lui a pour coordonnées (D, y). Calculer la différence de marche $\delta = S_2M - S_1M$ en fonction de y et déterminer l'interfrange en simplifiant l'expression obtenue en développant au premier ordre en a/D et y/D.

Partie II

Battements[4]

1 Origine

Superposition d'ondes de pulsations proches. Lorsque deux ondes de pulsations proches se superposent, on n'obtient pas exactement un signal sinusoïdal (d'amplitude constante), mais un signal quasi-sinusoïdal dont l'amplitude varie lentement au cours du temps. À l'oreille, on entend un son dont l'intensité varie périodiquement, la période de ces variations étant d'autant plus grande que les deux signaux sont proches en pulsation.

2 Visualisation mathématique

a) Cas de signaux d'égales amplitudes

Considérons deux signaux sinusoïdaux de même amplitude $u_1 = A\cos(\omega_1 t)$ et $u_2 = A\cos(\omega_2 t)$). On rajoutera le cas de phases arbitraires φ_1 et φ_2 après coup car cela ne fait que compliquer les calculs sans en changer le fond. Alors, le signal résultant $u = u_1 + u_2$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} u &= A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) \\ &= A\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \qquad \text{avec } a = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t \text{ et } b = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t \\ &= A \times 2\cos(a)\cos(b) \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t\right) \times \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{u = 2A\cos(\overline{\omega}\,t) \times \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\,t\right)}$$

On se retrouve avec un signal qui comporte un terme de variations rapides à la pulsation moyenne $\overline{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ modulé par un terme à variations lente de pulsation $\Delta\omega/2$.

SCHEMA

Il est intéressant de remarquer que le temps passé entre deux ventres ou deux creux de l'oscillation nous renseigne sur l'écart $\Delta\omega$ entre les deux pulsations des signaux. En effet, entre deux creux (des nœuds dans le cas particulier où l'on s'est placé), l'argument du cosinus à variations lentes a évolué de π, de sorte que le temps mesuré $T_{\text{nœuds}}$ vérifie

4. *Notions à connaître* : Battements

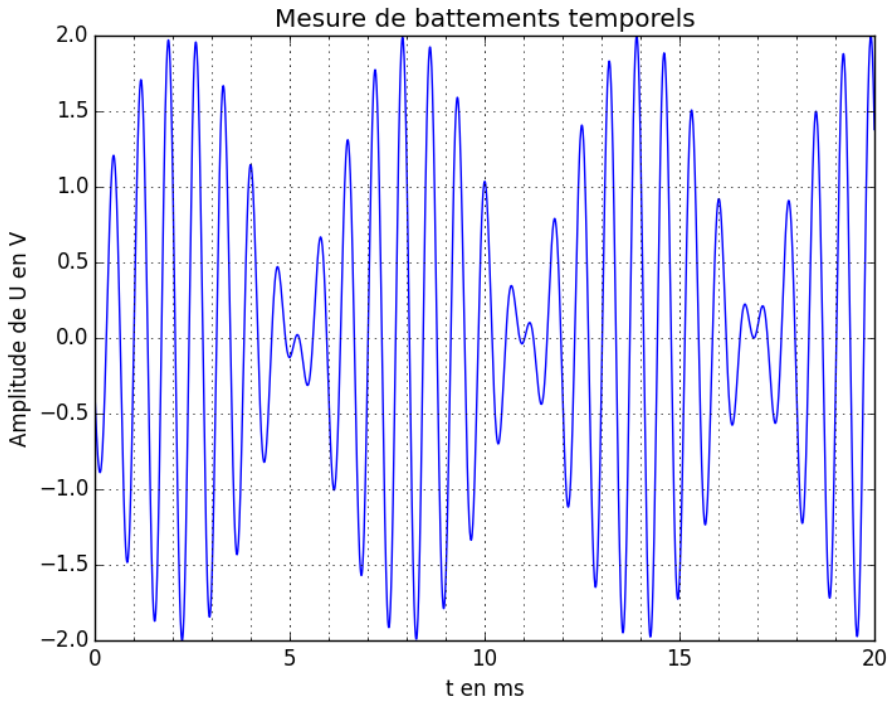
$$\frac{\Delta\omega}{2}T_{\text{nœuds}} = \pi \qquad \text{soit} \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{nœuds}}} \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\Delta f = \frac{1}{T_{\text{nœuds}}}}$$

On a donc un accès direct à la différence de fréquence entre les deux signaux qui est d'autant plus faible que la période $T_{\text{nœuds}}$ des battements est grande.

> Tous les calculs précédents restent similaires si on rajoute des phases φ_1 et φ_2 aux deux signaux de départ
>
> $$u_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
>
> On obtient alors $$u = u_1 + u_2 = 2A\cos\left(\overline{\omega}t + \overline{\varphi}\right) \times \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$
>
> Les conclusions concernant la mesure de Δf restent identiques.

EXERCICE *S10.6* Battements entre ondes d'égales amplitudes

On donne $f_1 = 1{,}50$ kHz, trouver f_2



b) Cas des signaux d'amplitudes différentes

Supposons à présent que les deux signaux sont d'amplitudes différentes mais de phases initialement nulles pour simplifier (là aussi, cela ne change pas le propos). Ainsi,

$$u_1 = A_1\cos(\omega_1 t) \qquad \text{et} \qquad u_2 = A_2\cos(\omega_2 t)$$

On peut réécrire ces deux signaux comme deux signaux globalement de même pulsation $\overline{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ avec chacun une phase $\varphi_i(t)$ évoluant « lentement » dans le temps[5],

5. « Lentement » signifie que $\dfrac{d\varphi_i}{dt} \ll \overline{\omega}$.

$$u_1 = A_1 \cos\left(\overline{\omega} t + \overbrace{\frac{\Delta\omega}{2} t}^{\varphi_1(t)}\right) \qquad \text{et} \qquad u_2 = A_2 \cos\left(\overline{\omega} t \overbrace{- \frac{\Delta\omega}{2} t}^{\varphi_2(t)}\right)$$

La méthode de Fresnel nous a permis de découvrir que dans un tel cas, l'amplitude du signal résultant s'écrivait

$$A_{tot} = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\varphi} \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = -\Delta\omega\, t$$

qui évolue donc périodiquement (même si pas franchement sinusoïdalement) en fonction du déphasage $\varphi(t)$ qui dépend du temps puisqu'il vaut $-\Delta\omega\, t$. L'amplitude totale varie entre $A_1 + A_2$ et $|A_1 - A_2|$ et la période T_{creux} entre deux passages par un creux d'amplitude est telle que $\Delta\omega\, T_{creux} = 2\pi$ puisque la phase φ a dû évoluer de 2π pour retrouver la même valeur minimale de l'amplitude. On retrouve comme précédemment

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_{creux}} \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\Delta f = \frac{1}{T_{creux}}}$$

La mesure de la période T_{creux} des battements permet donc de remonter directement à la différence de fréquence entre les deux signaux.

> En fait la fréquence du signal à variation rapide se rapproche de plus en plus de la fréquence du signal dont l'amplitude est prédominante.

SCHEMA

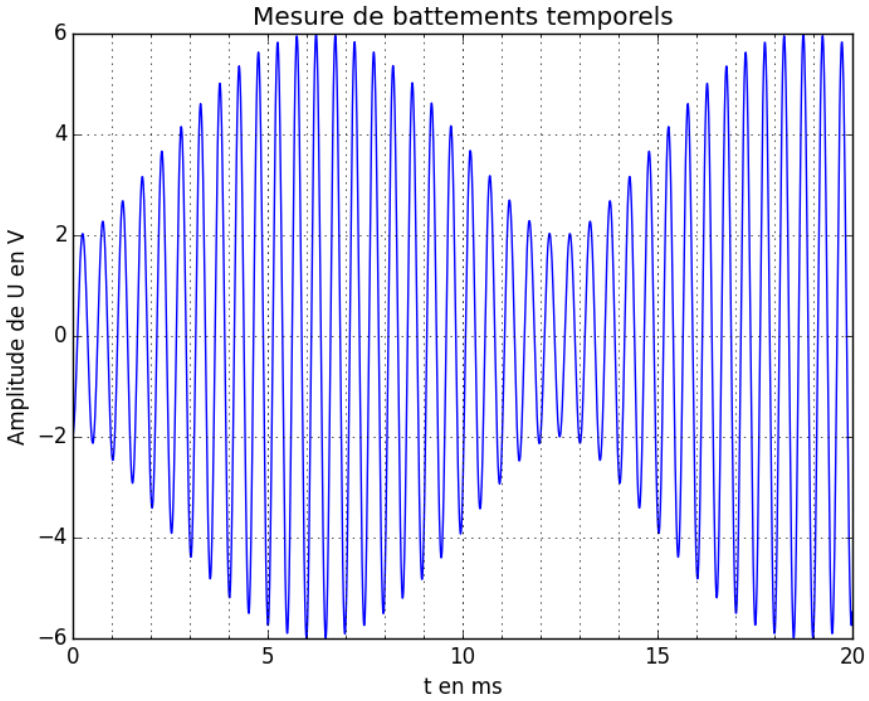
3 Applications

Une application directe du phénomène est l'accord d'instruments à cordes, notamment quand plusieurs cordes servent à produire le même son. En particulier, sur un piano, il y a deux à trois cordes à partir du milieu du clavier. L'accordeur règle une corde en immobilisant les autres à l'aide de sortes de pinces puis, une fois satisfait, relâche une pince après l'autre et fait sonner deux cordes en même temps : si les deux cordes sont légèrement désaccordées, l'intensité sonore fluctue (phénomène de battements) et l'accordeur règle la nouvelle corde de sorte que la période des fluctuations soit la plus grande possible.

On peut utiliser le même phénomène pour accorder une guitare : une fois une corde choisie comme accordée (a priori celle produisant la fréquence la plus basse), on produit sur cette corde un son de même fréquence que sa voisine à vide et on ajuste la tension pour faire disparaître les battements en faisant tendre leur période vers l'infini.

EXERCICE *S10.7* Battements entre ondes d'amplitudes différentes

On donne $f_1 = 2{,}00$ kHz, trouver f_2



Partie III

Onde stationnaire[6]

1 Observations

On considère une corde accrochée d'un côté à un vibreur et de l'autre à une masse pendant dans le vide après une poulie. On met le vibreur en marche, on se débrouille pour qu'il y ait des oscillations visibles à l'œil et on approche une lumière stroboscopique : la corde semble « s'arrêter »! Voir la vidéo

`https://www.youtube.com/watch?v=4BoeATJk7dg`

On observe, outre ce phénomène d'arrêt ou de mouvement ralenti lorsque la fréquence du stromboscope est accordée à la fréquence du vibreur, une répartition en ventre et nœuds qui semble directement dépendre à la fois de la longueur de la corde et de la masse accrochée dessus.

SCHEMA

6. *Notions à connaître* : Ondes stationnaires mécaniques

2 Caractérisation mathématique

De manière générale, on définit une onde stationnaire comme une onde dont les dépendances mathématiques temporelles et spatiales sont disjointes :

$$\boxed{y(x,t) = f(t) \times g(x)}$$

où $f(t)$ est une fonction périodique. En particulier, cela implique que les points où $g(x)$ est nulle restent toujours en place et ne bougent pas au cours du temps : c'est ce qu'on appelle des nœuds. Inversement, les points où $g(x)$ est extrémale correspondent aux ventres.

EXERCICE *S108* Ondes stationnaires ou pas ?

Parmi les expressions suivantes, lesquelles correspondent à des ondes stationnaires ? (où sont les nœuds et les ventres ?) lesquelles à des ondes progressives ? (vers la droite ou la gauche ?) lesquelles ne rentrent dans aucune des deux catégories ?

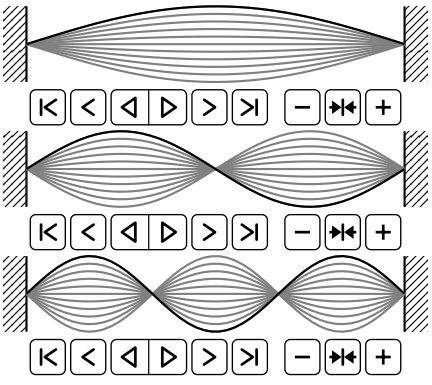
1. $\cos(\omega t - kx)$
2. $\cos(\omega t)\cos(kx)$
3. $\cos(\omega t)\sin(kx)$
4. $\cos(kx)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$
5. $\cos(\omega t - kx^2/\lambda)$
6. $\exp\left[-(\omega t + kx)^2\right]$
7. $\ln\left(\dfrac{1}{1+kx+\omega t}\right)$
8. $\left(1-\dfrac{1}{1+kx}\right)\cos(\omega t + \Psi)$

Dans le cas particulier d'une onde sinusoïdale qui se superpose à sa réflexion (de même amplitude), on va voir que la longueur d'onde de l'onde progressive se retrouve dans l'onde stationnaire. Calculons,

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathrm{A}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right) + \mathrm{A}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right) \\ &= \mathrm{A}\left[\left(\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right) + \left(\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} - \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right)\right] \\ \boxed{y(x,t)} &\boxed{= 2\mathrm{A}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}} \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une expression de la forme $g(x) \times f(t)$ avec $g(x)$ une fonction périodique de période spatiale λ : on retrouve dans l'onde stationnaire la longueur d'onde de l'onde progressive, donc en particulier, on a la même relation $\lambda = c\mathrm{T}$ que pour l'onde progressive. Accessoirement, la période temporelle du terme en $f(t)$ est aussi la même que pour le cas progressif.

3 Modes propres



On observe que pour certaines longueurs de cordes, on observe des « résonances » appelées « modes propres » de la corde. Ces résonances (que l'on va numéroter avec un entier n) apparaissent quand il y a tout juste la place pour une nombre entier de ventres entre les deux extrémités qui sont des nœuds, c'est-à-dire quand

$$\mathrm{L} = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad \text{soit} \qquad \lambda_n = \frac{2\mathrm{L}}{n}$$

puisqu'il y a une distance $\lambda/2$ entre deux nœuds consécutifs. L'entier n compte le nombre de ventres présents sur la corde. Comme on a montré précédemment que l'on a toujours $\lambda = c\mathrm{T}$ pour une onde stationnaire, les fréquences $f = 1/\mathrm{T}$ correspondantes vérifient

$$\boxed{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2\mathrm{L}/n} = n\frac{c}{2\mathrm{L}} = n f_1}$$

Le mode $n = 1$ est appelé le « fondamental » et tous les autres sont ses « harmoniques » qui sont toutes un multiple entier du fondamental.

EXERCICE *S10***.9** Modes propres, approche mathématique

Démontrer la relation $L = n\lambda_n/2$ de manière plus mathématique en supposant que l'onde stationnaire peut s'écrire de manière générale

$$y(x,t) = A\cos(kx+\varphi)\cos(\omega t+\psi)$$

et en lui imposant les conditions aux limites adéquates.

4 Musique, musique!

Une somme d'ondes stationnaires n'est plus forcément stationnaire, c'est-à-dire ne peut plus forcément se factoriser en $f(t) \times g(x)$. Par exemple l'onde progressive $\cos(kx-\omega t)$ s'écrit comme la somme des deux ondes stationnaires $\cos kx \cos \omega t$ et $\sin kx \sin \omega t$. On peut donc reconstruire, toutes les ondes progressives envisageables comme somme d'ondes stationnaires. En outre, seules les ondes progressives correspondant aux modes propres peuvent continuer à exister dans une corde accrochées aux deux extrémités après un grand nombre de réflexion car si ce n'est pas le cas, les interférences entre l'onde et la réflexion de sa réflexion vont petit à petit devenir destructives avec pour effet l'annihilation de l'onde résultante. Ainsi, les seules ondes qui peuvent exister sur le long terme dans une corde accrochées aux deux boût sont des superpositions d'ondes progressives de longueurs d'ondes λ_n et fréquences f_n, donc une superposition des modes propres stationnaires correspondants.

SCHEMA

> On retrouvera cette notion de superposition de modes propres dans le chapitre sur la mécanique quantique.

Remarque : en fait, une déformation quelconque de la corde sur une distance L peut se voir comme un signal périodique de période spatiale 2L. L'analyse de Fourier nous dit alors que ce signal, quel qu'il soit, peut se décomposer en une somme de sinusoïdes dont les longueurs d'ondes sont justement les λ_n calculés précédemment, ce qui permet de ne même pas invoquer l'argument d'interférences destructives précédent.

Sur un violon, l'archet déforme la corde en lui imprimant une forme initialement non sinusoïdale. Cette forme peut se décomposer comme une somme de modes propres qui vont chacun vibrer à leur fréquence correspondante. Comme la déformation n'est pas purement sinusoïdale au départ, le son n'est pas purement le fondamental mais est accompagné de tout un tas d'harmoniques dont les fréquences sont des multiples entiers du fondamental.

Chaque instrument possède un « timbre » particulier dont la décomposition harmonique (et l'importance des différents harmonique) est caractéristique. Néanmoins, ce n'est pas toujours aussi simple, comme en témoigne les difficultés pour les synthétiseurs d'imiter les timbres des différents instruments : même si on reconnaît clairement l'instrument imité, on reconnaît en général aussi qu'il s'agit d'une imitation...

On verra une partie de ce procédé en action dans le TP sur le Ukulélé... À suivre.

Partie IV

Diffraction à l'infini[7]

1 Définition

La diffraction est la capacité qu'a une onde à « tourner » après le passage d'un obstacle lorsque cet obstacle a une dimension de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de l'onde considérée.

La diffraction à l'infini est l'observation de se phénomène « loin » de l'obstacle dans la direction globale de propagation de l'onde. Loin signifie que l'on se place à une distance D telle que la taille de l'obstacle et la longueur d'onde de l'onde soient négligeable devant D.

SCHEMA

2 Conditions d'observation

`http://tinyurl.com/diffraction-cuve-a-ondes`

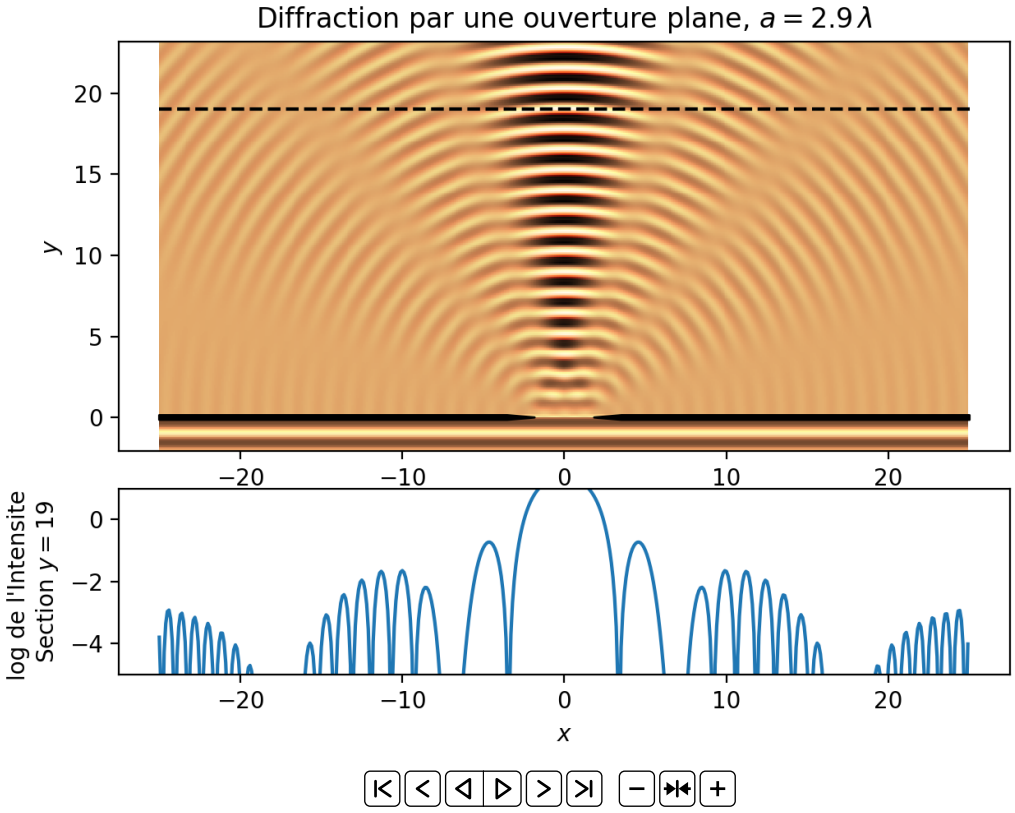
Le phénomène est d'autant plus remarquable que la taille de l'ouverture est proche voire inférieure à la longueur d'onde. En optique, l'écran doit être suffisamment éloigné pour que le phénomène soit reconnaissable.

3 Relation échelle angulaire/taille de l'ouverture

SCHEMA

On cherche à déterminer la largeur angulaire de la tache principale de diffraction. On a vu avec l'animation, que les bords de cette tache correspondaient à des zones où toutes les ondes issues de l'ouverture interféraient globalement destructivement. Pour arriver à ce résultat, il suffit que les points soient mis en paires et interfèrent destructivement deux à deux. Associons donc à chaque point de l'ouverture l'unique point de l'ouverture situé à une distance $d/2$ de lui (seul le point central admet deux points de l'ouverture à une distance $d/2$ de chaque côté, mais on va pouvoir le négliger). Pour que les rayons issus de ces deux points avec un angle θ par rapport à la direction de propagation de l'onde puissent interférer destructivement, ils faut qu'ils arrivent à l'infini avec un décalage d'une demi-période, c'est-à-dire qu'un des deux points ait eu à parcourir une distance $\lambda/2$ en plus de l'autre. C'est le cas si

7. *Notions à connaître* : Diffraction à l'infini



$$\frac{d}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{\lambda}{d}}$$

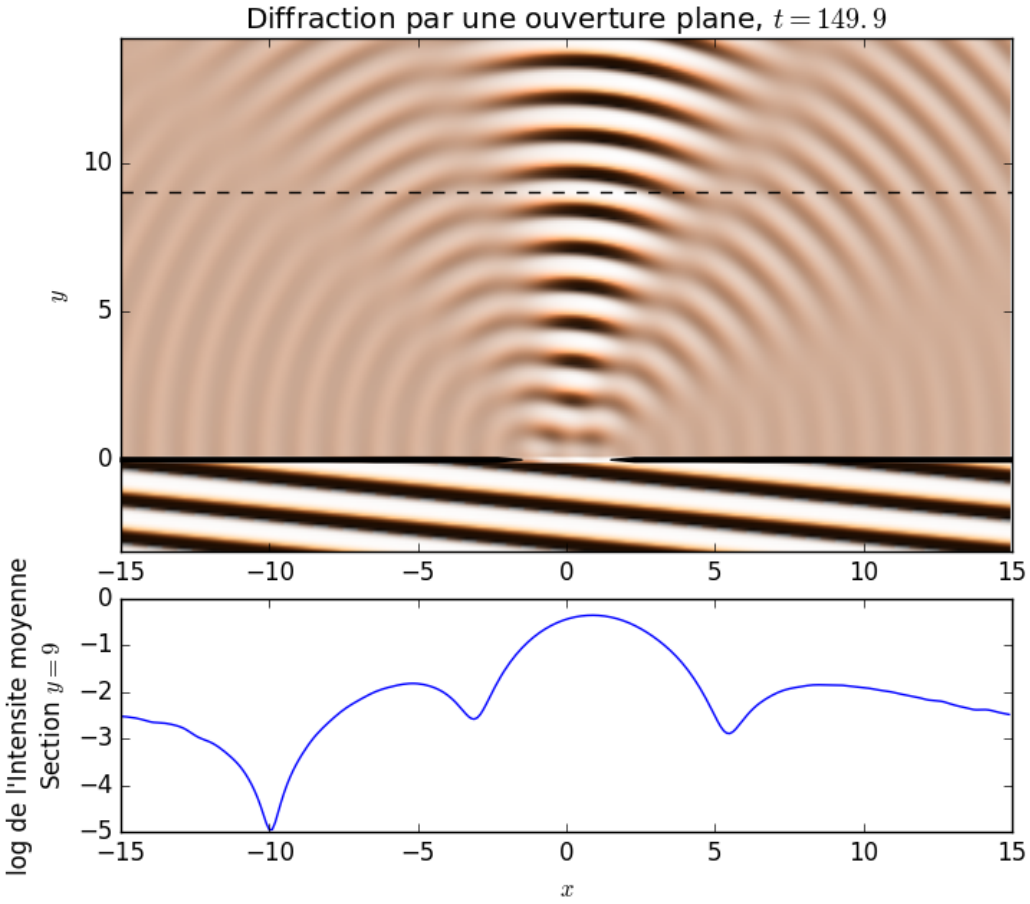
4 Implications

La diffraction est une limite intrinsèque aux instruments d'optique car on ne peut jamais avoir stigmatisme à mieux que la tache de diffraction causée par l'ouverture du système optique. Ainsi, la « limite de diffraction » correspond à la meilleure résolution que l'on peut obtenir et qui est donc visée par les constructeur. Pour le Keck, par exemple, dont le diamètre du miroir principal est de 10 m, la résolution angulaire ne pourra jamais être meilleure que $\theta = \lambda/d = 6{,}0.10^{-8}$ rad = 0,012 secondes d'arc = 12 milliarcsecondes.

EXERCICE *S10***.10** Limite de diffraction de l'œil

Déterminer la taille sur la rétine de la tache de diffraction pour l'observation d'un objet ponctuel situé à l'infini à l'œil. Commenter le fait que les photorécepteurs sur la rétines sont écartés les uns des autres d'environ 2 µm.

Dans le même ordre d'idée, le faisceau d'un laser est quasi unidirectionnel à sa sortie, mais est soumis à la diffraction de sorte qu'il ne puisse être que divergent (même si on essaie de le reconverger après un système optique). Si on prend un pointeur laser de diamètre de sortie d'environ $d = 5{,}0$ mm et une longueur d'onde $\lambda = 632$ nm (laser Hélium-Néon), l'angle de diffraction sera de l'ordre $\theta = \lambda/d = 1{,}3.10^{-4}$ rad.



EXERCICE *S10***.11** Diffraction d'un laser

Sur quelle rayon s'étend la tache de diffraction d'un laser que vous pointez

1. sur l'immeuble d'en face à 100 m de distance ?
2. sur la Lune ?

CORRECTION *S10*.1 Mesure de déphasage

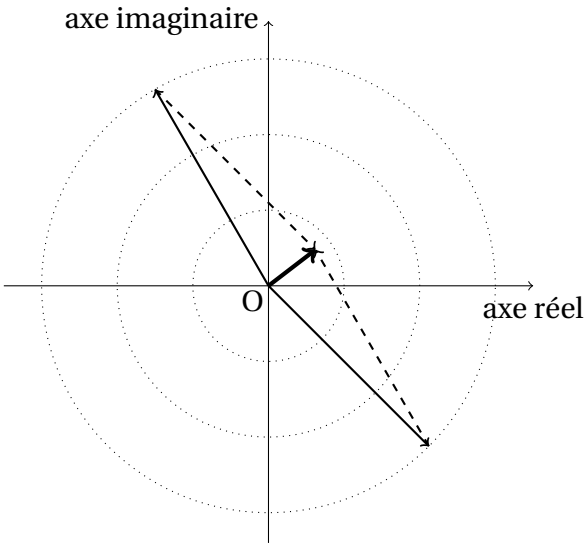
Travailler sur les maxima ne sera pas très précis ici, mieux vaut travailler sur les passages par 0 dans le même sens. On remarque que la courbe de plus grande amplitude passe par 0 en sens montant environ 0,9 carreau après l'autre (elle est donc en retard et on aura $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$). La période est quant à elle de 5 carreaux. On a donc

$$\boxed{\varphi = -2\pi \frac{0{,}9}{5} = -1{,}1 \text{ rad} = -65°}$$

Les amplitudes valent respectivement 1,8 carreaux et 2,4 carreaux (échelle non précisée dans l'oscillogramme) pour une période commune de 10 ms (5 carreaux à 2 ms/carreau).

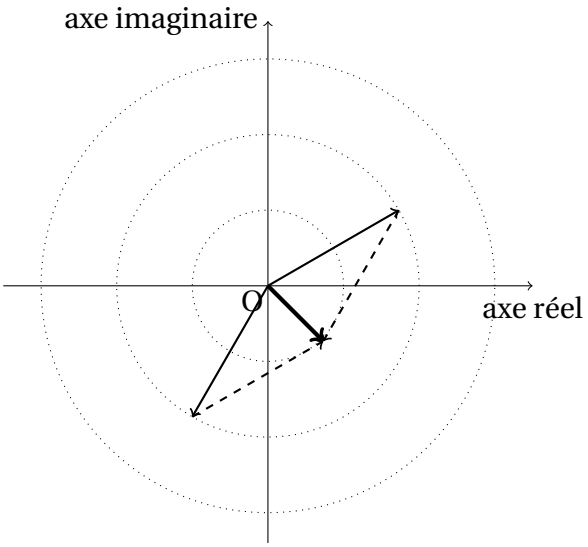
CORRECTION *S10*.2 Représentation de Fresnel

Amplitude : 0,78
Phase : 37°



On a que $-\cos(\omega t + 3\pi/4) = \cos(\omega t - \pi/4)$ et $\cos(\omega t - 4\pi/3) = \cos(\omega t + 2\pi/3)$.

Amplitude : 1,04
Phase : $-44°$



On a que $-2\cos(\omega t - 10\pi/6) = 2\cos(\omega t - 2\pi/3)$ et

$$\begin{aligned} 2\sin(\omega t - 4\pi/3) &= 2\cos(\omega t - 4\pi/3 - \pi/2) \\ &= 2\cos(\omega t - 11\pi/6) \\ &= 2\cos(\omega t + \pi/6). \end{aligned}$$

CORRECTION *S10*.3 Identités remarquables

On a $$\boxed{A_{tot}(\varphi = 0) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2}$$

et $$\boxed{A_{tot}(\varphi = \pi) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|}$$

CORRECTION *S10***4** Application directe

1. L'interfrange est donné par $\boxed{i = \dfrac{\lambda D}{a} = 1{,}4 \text{ mm}}$
2. Pour avoir la longueur d'onde connaissant l'interfrange, il suffit d'inverser la relation précédente

$$\boxed{\lambda = \frac{i\,a}{D} = 1{,}5 \text{ µm}}$$

On voit qu'il est difficile d'observer des interférences dans le spectre visible, ce qui explique que cette propriété mis du temps à être découverte (l'expérience des trous d'Young date de 1801).

CORRECTION *S10***5** Généralisation avec développement limité (plus dur)

Les distances S_1M et S_2M s'obtiennent soit par théorème de Pythagore (faire un dessin), soit par calcul vectoriel classique (sera revu avant le cours de mécanique). Il vient alors

$$S_1M = \|\overrightarrow{S_1M}\| = \sqrt{D^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \|\overrightarrow{S_2M}\| = \sqrt{D^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2}$$

En posant

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{1}{D}\left(y - \frac{a}{2}\right)\right]^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \left[\frac{1}{D}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right]^2$$

il vient

$$S_1M = D\sqrt{1+\varepsilon_1} \approx D\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \quad \text{et} \quad S_2M = D\sqrt{1+\varepsilon_2} \approx D\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)$$

de sorte que, en utilisant le fait qu'une différence de deux carrés se factorise bien gentiment (ou en développant simplement lesdits carrés)

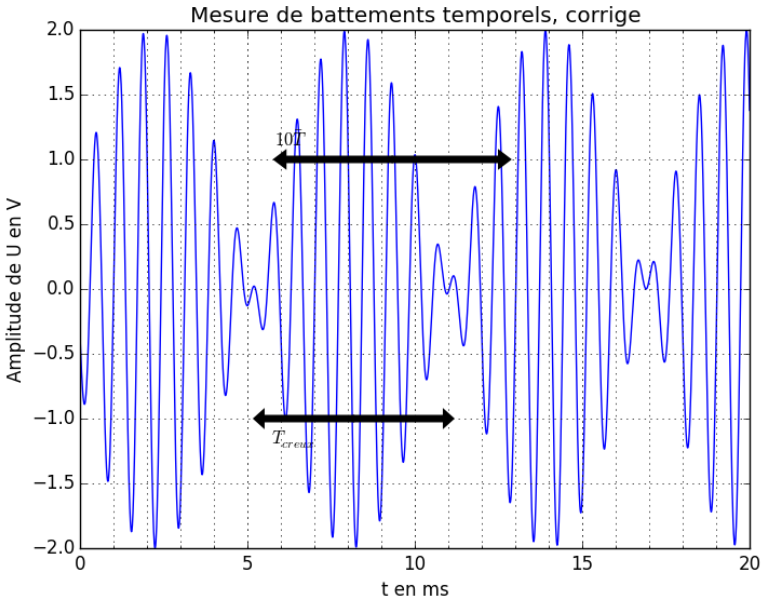
$$\delta(y) = S_2M - S_1M \approx D \times \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} = \frac{D}{2D^2}\left[\left(y + \frac{a}{2}\right) - \left(y - \frac{a}{2}\right)\right] \times \left[\left(y + \frac{a}{2}\right) + \left(y - \frac{a}{2}\right)\right] = \frac{ay}{D}$$

La condition d'interférences constructives, c'est-à-dire les positions y_n telles que $\delta(y_n) = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{N}$ permet de retrouver comme dans le cours l'expression de l'interfrange

$$\boxed{i = y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda D}{a}}$$

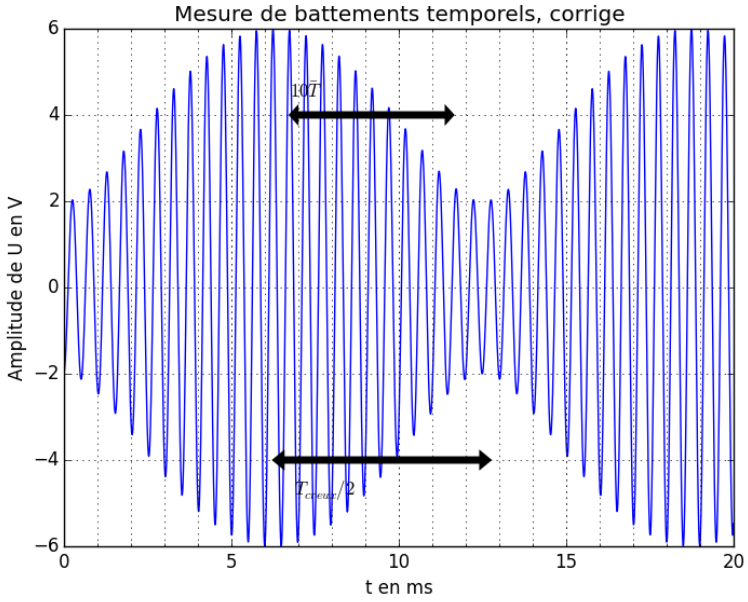
CORRECTION *S10*.6 Battements entre ondes d'égales amplitudes

On trouve T_{creux} = 5,9 ms puis $\Delta f = 1/T_{creux}$ = 0,17 kHz et comme $10\bar{T}$ = 7,1 ms, on en déduit que $\bar{f}$ = 1,42 kHz < f_1 = 1,50 kHz, et donc $f_2 = f_1 - \Delta f$ = 1,33 kHz



CORRECTION *S10*.7 Battements entre ondes d'amplitudes différentes

On trouve T_{creux} = 12,5 ms puis $\Delta f = 1/T_{creux}$ = 0,08 kHz et comme $10\bar{T}$ = 4,9 ms, on en déduit que $\bar{f}$ = 2,04 kHz > f_1 = 2,00 kHz, et donc $f_2 = f_1 + \Delta f$ = 2,08 kHz



CORRECTION *S10***.8** Ondes stationnaires ou pas?

1. Onde progressive vers les x positifs
2. Onde stationnaire (nœuds en $kx = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$, ventres en $kx = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$)
3. Onde stationnaire (nœuds en $kx = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$, ventres en $kx = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$)
4. S'écrit $f(t) \times g(x)$ mais $f(t)$ n'est pas périodique
5. Non catégorisable.
6. Onde progressive vers les x décroissants.
7. Onde progressive vers les x décroissants (mais non définie pour tout x et tout t, il y a des restrictions sur x dépendant de t).
8. Onde stationnaire (nœud en $x = 0$), définie uniquement sur $\left]-\dfrac{1}{k};+\infty\right[$

CORRECTION *S10***.9** Modes propres, approche mathématique

L'onde stationnaire que l'on observe est ici sinusoïdale, donc s'écrit de manière la plus générale possible

$$y(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx+\varphi)\cos(\omega t+\psi)$$

On veut imposer des conditions aux limites telles qu'à tout instant t, on ait un nœud à chaque extrémité de la corde, soit

$$y(0,t) = 0 \quad \text{soit} \quad \cos(\varphi) = 0 \qquad \text{et} \qquad y(\mathrm{L},t) = 0 \quad \text{soit} \quad \cos(k_n\mathrm{L}+\varphi) = 0$$

La première condition impose que φ vaille $\pi/2$ modulo π, c'est-à-dire que l'on ait un sinus plutôt qu'un cosinus. La seconde condition s'écrit alors $\sin(k_n\mathrm{L}) = 0$, soit $k_n\mathrm{L} = n\pi$ avec n un entier non nul ($k_n = 0$, soit une corde au repos, est toujours une solution possible, mais non intéressante...). Comme $k_n = 2\pi/\lambda_n$, on en déduit bien

$$\boxed{\mathrm{L} = n\frac{\lambda_n}{2}}$$

CORRECTION *S10***.10** Limite de diffraction de l'œil

Dans le cours d'optique on a approximé la taille de l'œil à D = 12,5 mm (distance cristallin-rétine). En se regardant dans le miroir, on peut prendre une ouverture pupillaire à environ $d = 5$ mm. En prenant un rayonnement « moyenne » à $\lambda = 600$ nm, on trouve une tache de rayon

$$\boxed{\mathrm{R} = \mathrm{D}\tan\theta \approx \mathrm{D}\sin\theta = \mathrm{D}\frac{\lambda}{d} = 1{,}5.10^{-6}\ \mathrm{m} = 1{,}5\ \mu\mathrm{m}}$$

On remarque que l'œil s'est déjà adapté pour mettre autant de récepteurs que la limite de diffraction lui permettait, puisqu'il ne servirait à rien de multiplier le nombre de détecteurs si, quoiqu'il arrive, l'image d'un point est étalée sur une tache dont la taille excède celle d'un détecteur.

CORRECTION *S10***.11** Diffraction d'un laser

On a calculé que l'angle de diffraction serait de l'ordre de $\theta = \lambda/d = 1{,}3.10^{-4}$ rad. Ainsi, pour une observation à une distance D, le rayon de la tache vaut $R = D\theta$, soit

$$\boxed{R_{immeuble} = 0{,}013 \text{ m} \qquad \text{et} \qquad R_{Lune} = 1{,}3.10^{-4} \times 380\,000 \text{ km} = 48 \text{ km}}$$

Même si ce n'est pas aussi impressionnant sur l'immeuble d'en face (on passe tout de même à une tache de diamètre 2,5 cm soit 5 fois plus grande), la divergence au niveau de la Lune est phénoménale et explique pourquoi, pour mesurer la distance Terre-Lune par réflexion sur des cubes rétroréflecteurs posés à sa surface par les missions Apollo, cela nécessite des lasers de très forte puissance puisqu'il y a dilution de la puissance par un facteur $(2R_{Lune}/d)^2 = 3{,}7.10^{14}$...