S09

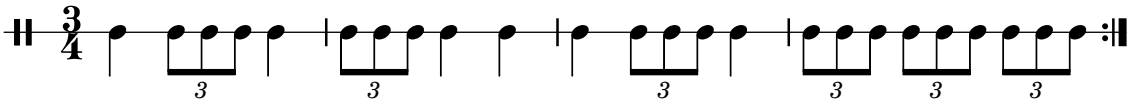
Propagation d'un signal

Partie I

Signaux de la vie de tous les jours

1 Quelques exemples[1]

On commence par écouter le boléro de Ravel que les mélomanes devraient reconnaître dès les premières secondes du fait du rythme caractéristique « Noire, triolet noire, triolet noire noire noire, triolet noire, triolet triolet triolet ». Cette information (ou ce signal) suffit presque à identifier le morceau qui va suivre.



On continue avec « Dans ma cabane sous terre » qui correspond à la propagation d'une impulsion mécanique (on se tape dans la main) le long d'une chaîne de transmission. Dans le même esprit, une « Ola » (voir « La ola du stade de france » sur YouTube) participe à la conduction d'un signal sans qu'il y ait un mouvement matériel dans la direction de propagation du signal.

Les signaux acoustiques sont les plus communs dans notre environnement immédiat et sont plus complexes qu'il n'y paraît. Si la classe se met à chanter un accord, l'oreille le reconnait comme tel, mais un instrument de mesure peut aussi le détecter en faisant un spectre de Fourier qui permet de reconnaître les différentes fréquences (donc les différentes notes) constitutives de l'accord. Autres signaux communs, les signaux lumineux, que ce soit pour donner la position d'une bonne affaire ou indiquer que les voitures peuvent passer.

La télévision, les informations circulant sur internet via les différents protocoles possibles, mais aussi sur le réseau domestique (CPL : Courant Porteur en Ligne ou WiFi) constituent d'autres signaux auxquels on est constamment confrontés[2].

2 Quelques ordres de grandeur

L'audition humaine « standard » permet d'entendre des sons dont les fréquences sont entre 20 Hz et 20 kHz, sachant qu'à partir de 16 kHz, tout le monde n'est pas capable de percevoir les sons (cf. bruit des vieilles télés par exemple). Avec l'âge, on perd dans les aigüe (on parle de presbyacousie), à partir de 2 kHz. La plus haute note du piano est aux alentours de 4 kHz, la plus basse aux alentours de 25 Hz et le « La » dit « La 440 » du milieu du clavier est à ... 440 Hz.

Les ondes lumineuses visibles ont des longueurs d'ondes λ comprises entre 400 nm (bleu) et 800 nm (rouge). On montrera plus tard le lien entre célérité de l'onde, longueur d'onde et fréquence, mais pour des ondes lumineuses, cette relation s'écrit $c = \lambda\nu$, de sorte que les fréquences ν vont de $7{,}5.10^{14}$ Hz (bleu) à $3{,}8.10^{14}$ Hz (rouge). Vos fours « microondes », WiFi et Bluetooth fonctionnent tous aux alentours de 2,4 GHz,

1. *Notions à connaître* : Exemples de signaux, spectre
2. Sans compter les signaux comme ceux de la maman dans la bande annonce de Vice Versa : `http://tinyurl.com/zs827jp`

ce qui correspond à des ondes *centimétriques* et non micrométriques ($\lambda = 13$ cm). Les lignes téléphoniques « classiques » fonctionnent elles entre 0,9 et 1,8 GHz.

EXERCICE *S9*.1 Ondes micrométriques ?

Calculer la fréquence correspond à des ondes lumineuses de longueur d'onde micrométrique. Inversement, calculer la longueur d'onde associée au four « microondes » qui marche à une fréquence de 2,4 GHz.

Partie II

Notion d'onde progressive[3]

1 De droite à gauche ou de gauche à droite

Faire le coup de la corde ou du tuyau d'arrosage
Voir le début de la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=tsNmQ9Utn9M` qui donne une autre manière de voir les choses.

Supposons pour simplifier que l'on dispose du profil de la corde à l'instant $t = 0$ sous la forme $y = f_0(x)$ et que de plus le maximum de ce profil se trouve en $x = 0$. Les questions que l'on se posent sont « Quel sera le profil à un instant t quelconque ? » et « Comment peut-on représenter cela mathématiquement ? ». Commençons par réprésenter le profil de la corde à $t = 0$ ainsi qu'à un instant $t > 0$ en supposant que le déplacement s'opére vers la droite.

SCHEMA

On remarque que le maximum se trouve à présent en $x_{\max} = ct$ en supposant que l'onde se propage à célérité constante c. Le profil $f_t(x)$ à l'instant t est une translation vers la droite du profil $f_0(x)$. Remarquons que f_t est maximale en $x = x_{\max} = ct$ alors que f_0 l'était en $x = 0$. On a donc $f_t(x_{\max}) = f_0(0)$, ce que l'on peut généraliser sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_t(x) = f_0(x - ct)}$$

On est donc passé d'une fonction $f_t(x)$ de deux variables distinctes x et t à une fonction f_0 d'une unique variable $x - ct$. On peut donc énoncer la propriété suivante[4]

> Si à $t = 0$, une onde se propageant à célérité c constante vers la droite est représentée spatialement par la fonction $y = f(x)$, alors à n'importe quel moment t, le profil de l'onde est donné par $y = f(x - ct)$.

À noter ici que la notion de propagation « vers la droite » (il est plus exact de dire propagation vers les x croissants, car ce n'est que par habitude que l'on met les x croissants vers la droite) est codée dans les signes contraires des dépendances spatiales et temporelles (ce qui permet de dire que quand l'argument de la fonction est nul, x et t sont forcément de même signe donc quand t augmente, $x_{\max}$ augmente aussi).

Considérons à présent le même profil $f_0(x)$ à $t = 0$ mais supposons que l'onde se déplace vers les x décroissant (donc vers la gauche). À un instant t ultérieur, la position du maximum est maintenant $x_{\max} = -ct$ (puisqu'on part de $x = 0$ et qu'on va vers les négatifs). Le profil $f_t(x)$ est à nouveau une translation du profil initial $f_0(x)$, toujours de la quantité $x_{\max}$, d'où $f_t(x) = f_0(x - x_{\max}) = f_0(x + ct)$.

3. *Notions à connaître* : Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimentionnelle linéaire non dispersive
4. *Notions à connaître* : Célérité, retard temporel

Si à $t = 0$, une onde se propageant à célérité c constante vers la gauche est représentée spatialement par la fonction $y = f(x)$, alors à n'importe quel moment t, le profil de l'onde est donné par $y = f(x + ct)$.

De même que précédemment, la notion de propagation « vers la gauche » (il est plus exact de dire propagation vers les x décroissants, car ce n'est que par habitude que l'on met les x croissants vers la droite) est codée dans les signes communs des dépendances spatiales et temporelles (ce qui permet de dire que quand l'argument de la fonction est nul, x et t sont forcément de signes opposés donc quand t augmente, $x_{\max}$ diminue car $x_{\max} = -ct$).

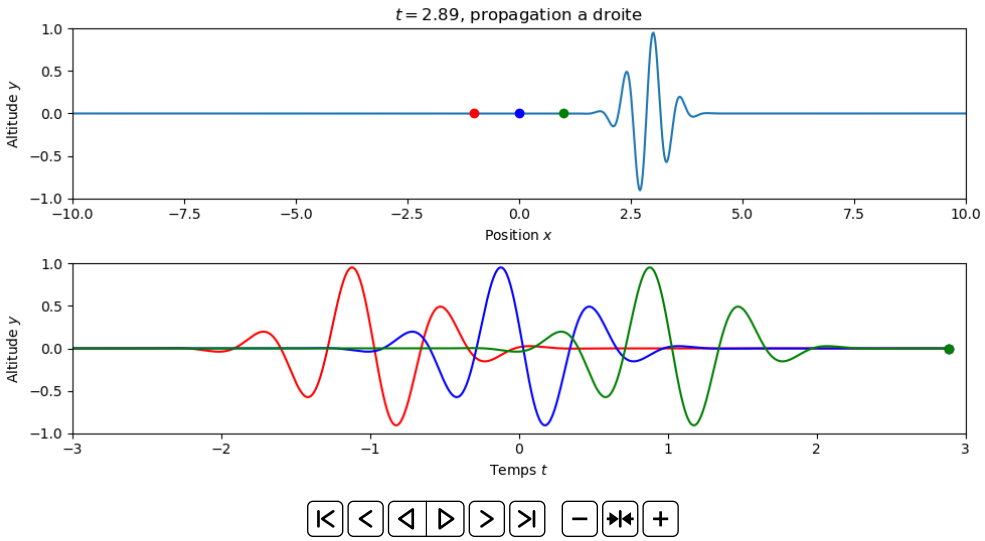
EXERCICE *S92* Propagation d'un profil spatial

On donne le profil $f(x)$ suivant à $t = 0$: $f(x) = \cos(kx) \times e^{-(x/\delta)^2}$. En déduire le profil $y(x,t)$ à tout instant t dans le cadre

1. d'une onde se propageant sans déformation à la célérité c vers les x croissants ;
2. d'une onde se propageant sans déformation à la célérité v vers les x décroissants.

2 Ce que l'on voit du haut de la vague

Considérons à présent un baigneur à quelques mètres de la côte qui mesure son altitude changeante au gré des vagues passant sous lui. L'évolution temporelle de l'altitude de ce baigneur (que l'on place à l'origine $x = 0$ du système de coordonnées) est donnée par le profil $y = g_0(t)$. On voudrait connaître le profil temporel expérimenté par un autre baigneur situé à un emplacement x différent suivant que les vagues se propagent vers les x croissants ou vers les x décroissants.

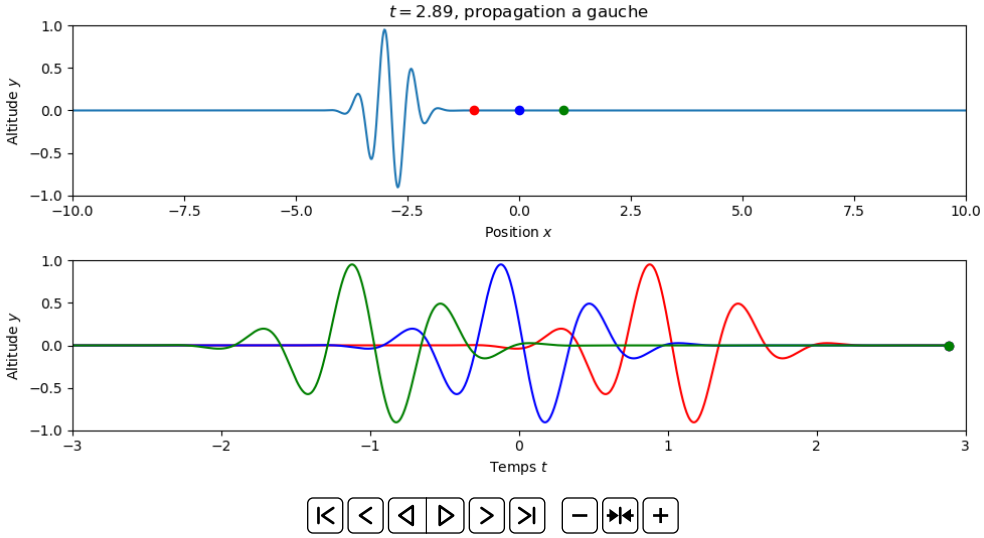


Considérons d'abord le cas des x croissants. Si la vague est à son maximum à $t = 0$ en $x = 0$, alors en x, elle passera à son maximum à l'instant $t_{\max} = x/c$, le temps qu'il lui aura fallu pour parcourir la distance x à la vitesse constante c. Ainsi, le profil temporel $g_x(t)$ au point x est une translation horizontale du profil $g_0(t)$ en $x = 0$ de la quantité $t_{\max}$. De la sorte,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad g_x(t) = g_0(t - t_{\max}) = g_0(t - x/c)$$

En résumé,

Si en $x = 0$, une onde se propageant à célérité c constante vers les x croissants est représentée temporellement par la fonction $y = g(t)$, alors à n'importe quelle position x, le profil temporel de l'onde est donné par $y = g(t - x/c)$.



Si l'on considère à présent une onde se propageant vers les x décroissant, alors si on place un second baigneur en un point $x > 0$, celui-ci aura connu le maximum de la vague *avant* le baigneur situé en $x = 0$, donc à un temps $t_{\max} = -x/c$ (car $x > 0$ et on doit avoir $t < 0$). Remarquez que le raisonnement tient toujours si on prend $x < 0$, alors le haut de la vague atteindra le baigneur *après* le baigneur de l'origine donc à $t_{\max} = -x/c$ (on a bien $t_{\max} > 0$ puisque $x < 0$).

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad g_x(t) = g_0(t - t_{\max}) = g_0(t + x/c)$$

En résumé,

Si en $x = 0$, une onde se propageant à célérité c constante vers les x décroissants est représentée temporellement par la fonction $y = g(t)$, alors à n'importe quelle position x, le profil temporel de l'onde est donné par $y = g(t + x/c)$.

On retrouve qu'une propagation vers les x croissants fait intervenir des signes opposés des dépendances spatiales et temporelles alors qu'une propagation vers les x décroissants fait intervenir un même signe dans les deux dépendances.

EXERCICE *S9***3** Propagation d'une évolution temporel

On donne le profil $g(t)$ suivant en $x = 0$: $g(t) = \cos(\omega t) \times \mathrm{e}^{-t/\tau}$. En déduire le profil $y(x,t)$ en tout point x à l'instant t dans le cadre

1. d'une onde se propageant sans déformation à la célérité c vers les x croissants ;
2. d'une onde se propageant sans déformation à la célérité v vers les x décroissants.

3 Dualité des représentations spatiale et temporelle

Le représentation temporelle et spatiales d'une onde sont équivalentes. En effet, voir le profil spatial d'une corde et savoir dans quel sens se propage l'onde permet d'imaginer ce que ressent une fourmi située à un endroit donné de la corde au cours du temps. Réciproquement, enregistrer les variations temporelles d'altitudes d'un baigneur permet de reconstituer le profil spatial de la vague associée (connaissant à nouveau le sens de propagation de la vague). Il existe des formules mathématiques permettant de passer automatiquement de l'une à l'autre, mais globalement il n'y a pas de secret, il est nécessaire de s'imaginer les choses pour comprendre comment cela marche et réfléchir à chaque fois pour retrouver dans quel sens cela fonctionne

Partie III

Onde progressive sinusoïdale[5]

1 Une onde particulière

On a considéré jusqu'à présent des ondes de profil f quelconque, mais il y a des ondes que l'on rencontre plus souvent que d'autres, du moins en première approximation : il s'agit des ondes sinusoïdales, c'est-à-dire des ondes dont la fonction caractéristique f est proportionnelle à une fonction sinusoïdale. Par exemple, le profil d'une corde (ou d'une vague) sinusoïdale de longueur d'onde λ peut s'écrire à l'instant $t = 0$ comme

$$\boxed{f(x) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right)}$$

SCHEMA

On a bien avec cette écriture que lorsque x augmente de λ, l'argument du cosinus augment de 2π donc λ est la « période spatiale », c'est-à-dire la plus petite distance telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+\lambda) = f(x)$$

Considérons une onde sinusoïdale progressive vers les x croissants, alors sa formulation générale est $f(x-ct)$, d'où

$$\boxed{y(x,t) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi\frac{x-ct}{\lambda} + \varphi\right) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{ct}{\lambda} + \varphi\right)}$$

2 Relation fréquence/longueur d'onde

Partant de l'expression précédente de $y(x,t)$, on reconnaît aussi une fonction sinusoïdale du temps dont on définit la période comme le plus petit réel strictement positif tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(x, t+\mathrm{T}) = y(x,t)$$

ce qui est équivalent à dire que $2\pi\, c\mathrm{T}/\lambda$ est égal à 2π, soit

$$\boxed{\lambda = c\mathrm{T}}$$

La longueur d'onde correspond aussi à la distance parcourue par l'onde durant une période temporelle ! En utilisant cela, on peut réécrire l'expression générale de l'onde sous la forme

$$\boxed{y(x,t) = \mathrm{A}\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}} + \varphi\right) = \mathrm{A}\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)}$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ le « nombre d'onde » et $\omega = 2\pi/\mathrm{T}$ la pulsation. À noter que pour une onde qui se propage vers les x décroissants, il suffit de changer le signe devant la dépendance temporelle.

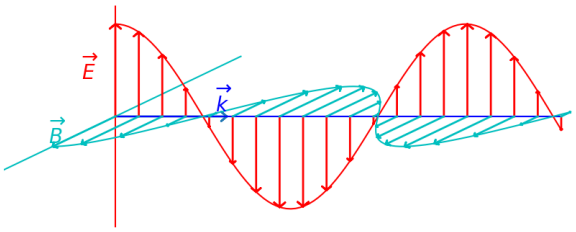
5. *Notions à connaître* : Onde progressive sinusoïdale : déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.

3 Staying on the beach (in Hawai'i!)

Utilisons ces nouvelles connaissances pour essayer de déterminer la vitesse des vagues aux alentours d'Hawaii (sur Waikiki et sur la North Shore). D'une part, l'écoute de « fond sonore relaxant » sur youtube permet de mesurer une période de vague entre 5 et 10 s environ. D'autre part, GoogleEarth permet de regarder au large de Waikiki beach et sur la Northshore la distance entre deux crêtes de vagues, ce qui devrait donner une estimation de la longueur d'onde correspondante. On trouve environ 35 m sur Waikiki et 60 à 70 m sur la NorthShore. En prenant 10 s de période (plus simple), on trouve des vitesses de 3,5 à 7 m/s (ou 7 à 14 m/s en prenant une période de 5 s), ce qui fait déjà une vingtaine de km/h. La vitesse est plus importante sur la NorthShore (en supposant que les périodes soient les mêmes) car la pente n'évolue pas de la même manière à l'approche de la plage : sur Waikiki, la montée est lente alors qu'elle est bien plus impressionnante sur la NorthShore.

4 Notion de polarisation[6]

Les ondes dites « transverses », c'est-à-dire telles que la direction du mouvement est perpendiculaire à la direction de propagation, ont une certaine « polarisation ». Les plus simples à reconnaître sont les polarisations rectilignes (l'oscillation se fait dans un plan fixe qui contient l'axe Ox de propagation et qui peut être Oxy, Oxz ou tout plan intermédiaire). Toute polarisation rectiligne pourra s'écrire comme la somme d'une polarisation verticale (selon Oxz) et d'une polarisation horizontale (selon Oxy). En fait, toute polarisation peut même s'écrire ainsi si on permet de jouer sur le déphasage entre les polarisations verticale et horizontale.



La lumière est aussi une onde transverse, même si elle n'a rien à « déplacer » (on verra plus tard que quelque chose appelé « champ électrique » oscille perpendiculairement à l'axe de propagation). On a donc pu construire des « polariseurs » qui sélectionne une unique direction de polarisation (par exemple la verticale) en tuant la composante qui lui est orthogonale (la composante horizontale dans notre exemple). Une loi (importante) appelée « loi de Malus ». Celle-ci stipule que l'intensité lumineuse I en sortie du polariseur est proportionnelle à l'intensité I_0 qui y pénètre multipliée par le cosinus carré de l'angle de la polarisation initiale, ce qui s'écrit

$$\boxed{I = I_0 \cos^2 \theta}$$

où θ est l'angle que fait le signal polarisé rectilignement en entrée avec l'axe de polarisation du polariseur.

Une conséquence directe est que l'on peut entièrement annihiler un rayon lumineux non polarisé à la base (c'est-à-dire dont la polarisation est aléatoire selon les photons considérés) en plaçant sur son chemin deux polariseurs dont les axes sont perpendiculaires entre eux. En effet, après passage dans le premier polariseur (vertical par exemple), les rayon lumineux qui passent sont tous polarisés rectilignement suivant la verticale (on a tué environ la moitié de l'intensité totale puisque le signal était non polarisé à la base). Au passage du second polariseur (horizontal), aucun rayon ne peut passer puisqu'ils sont polarisés à $\theta = \pi/2$ de l'axe horizontal.

6. *Notions à connaître* : Polarisation rectiligne de la lumière, loi de Malus.

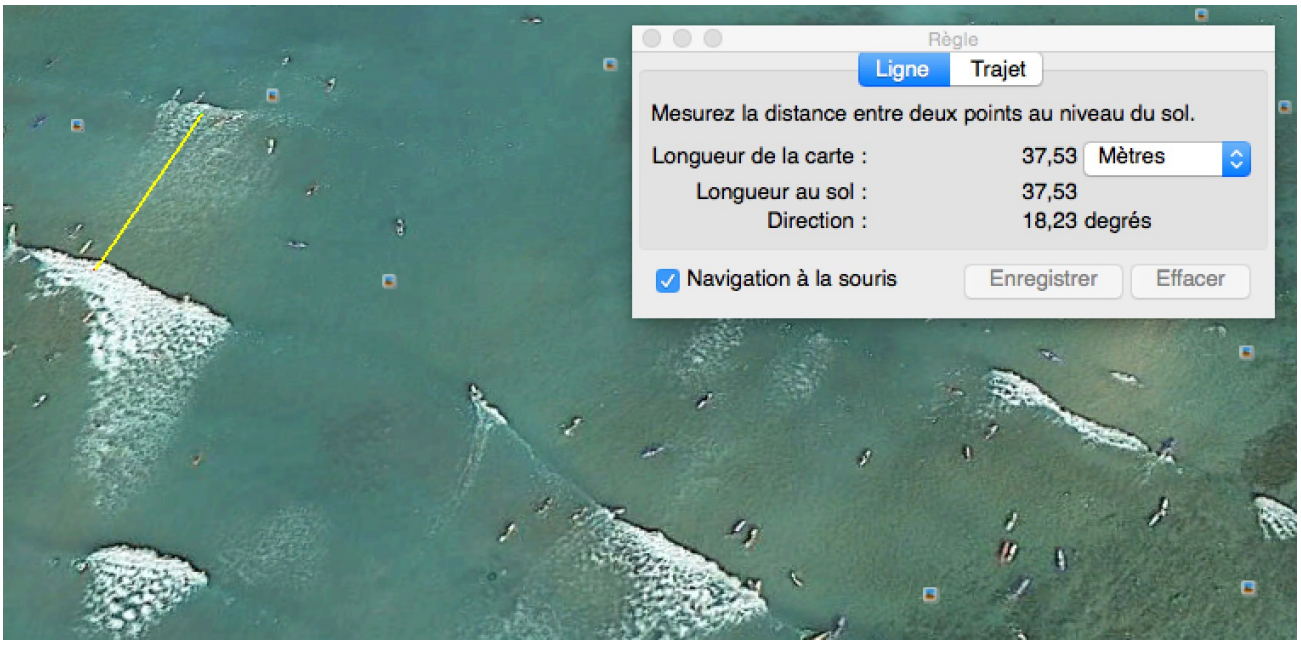


FIGURE 9.1 : Déferlement des vagues sur Waikiki beach

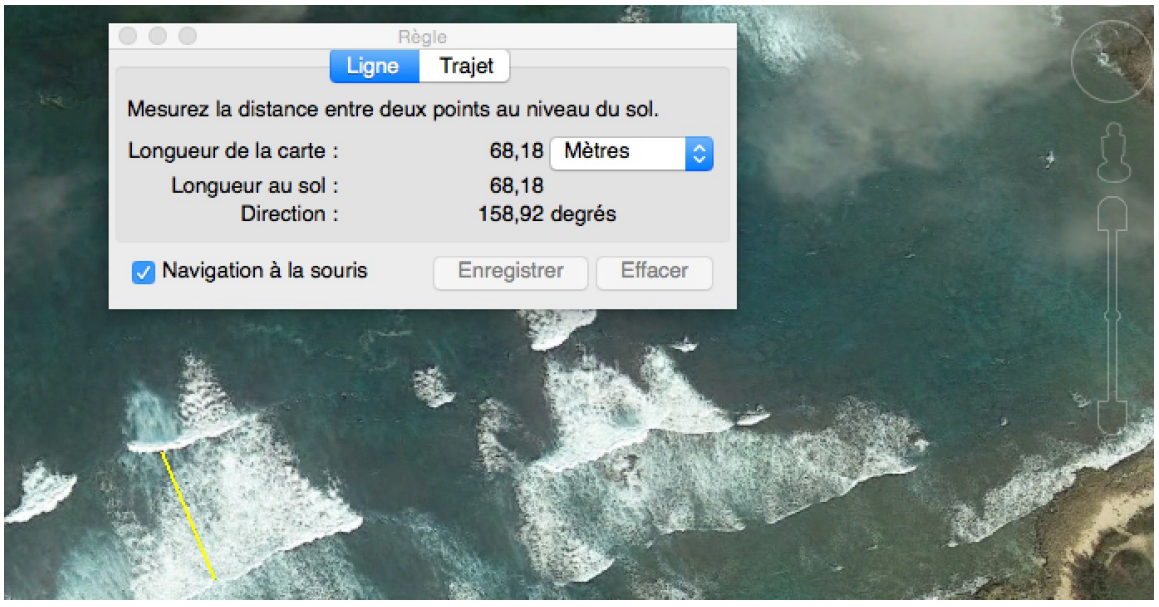


FIGURE 9.2 : Déferlement des vagues sur la NorthShore

EXERCICE *S9.4* Verres polarisés

Quel est l'intérêt d'utiliser des verres polarisés dans les lunettes de Soleil ?

CORRECTION *S9*.1 Ondes micrométriques ?

Si $\lambda = 1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m, alors $\boxed{\nu = \dfrac{c}{\lambda} = 3.10^{14}\ \text{Hz}}$

Inversement, si la fréquence vaut $\nu = 2{,}4.10^{9}$ Hz, alors

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{\nu} = 0{,}13\ \text{m} = 13\ \text{cm}}$$

CORRECTION *S9*.2 Propagation d'un profil spatial

1. Avec une onde se déplaçant dans le sens des x croissants, on a

$$\boxed{y(x,t) = f(x-ct) = \cos(kx - kct) \times \text{e}^{-\left(\frac{x-ct}{\delta}\right)^2}}$$

2. Avec une onde se déplaçant dans le sens des x décroissants, et en notant qu'on utilise v et non c d'après l'énoncé, on a

$$\boxed{y(x,t) = f(x+vt) = \cos(kx + vct) \times \text{e}^{-\left(\frac{x+vt}{\delta}\right)^2}}$$

CORRECTION *S9*.3 Propagation d'une évolution temporel

1. Avec une onde se déplaçant dans le sens des x croissants, on a

$$\boxed{y(x,t) = g(t-x/c) = \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right) \times \text{e}^{-\frac{t-x/c}{\tau}}}$$

2. Avec une onde se déplaçant dans le sens des x décroissants, et en notant qu'on utilise v et non c d'après l'énoncé, on a

$$\boxed{y(x,t) = g(t+x/v) = \cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{v}\right) \times \text{e}^{-\frac{t+x/v}{\tau}}}$$

CORRECTION *S9*.4 Verres polarisés

Utiliser des verres polarisés permet déjà d'atténuer d'un facteur 2 une lumière incidente non polarisées (c'est-à-dire telles que la lumière soient polarisée dans toutes les directions à la fois). En outre, le ciel diffuse la lumière solaire avec une certaine polarisation : si les verres sont orientés à la perpendiculaire de cette polarisation, le ciel est d'autant plus assombri, d'où un éblouissement moindre.