

## 1 Décomposition de Fourier

On a déjà signalé dans le chapitre précédent que toute fonction sinusoïdale pouvait se décomposer comme somme de fonctions sinusoïdales. Détaillons un petit peu... Prenons  $f$  une fonction périodique de période  $T$ . Alors, la théorie de Fourier de décomposition des fonctions périodiques nous assure qu'il existe deux suites infinies de termes  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que à tout instant  $t$ , on ait

$$f(t) = \chi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

où  $\omega = 2\pi/T$  est la pulsation du « fondamental » de la décomposition. Mis à part la valeur moyenne  $\chi_0$ , le signal est constitué du fondamental à la pulsation  $\omega$  et de ses différents harmoniques dont les pulsations sont des multiples entiers du fondamental à  $\omega$ .

<http://tinyurl.com/decomposition-fourier>

## 2 Valeur moyenne, valeur efficace

### a) Fonctions quelconques

Pour une fonction  $f$  quelconque, on définit la valeur moyenne sous la forme

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

Cette expression est à rapprocher de la manière « naturelle » de faire une moyenne, par exemple pour calculer la moyenne des notes d'un semestre : on fait une somme (ici une intégrale) de toutes les valeurs des notes ( $f(t)$ ) pondérées par le nombre de fois où on a eu cette note ( $dt$ ) et on divise par le nombre total de notes sur le semestre ( $\tau = \int_0^\tau dt$ ). Comme on ne connaît rien sur le comportement global de la fonction en question, on est obligé de faire la somme jusqu'à l'infini pour obtenir un résultat sensé.

La valeur efficace d'une fonction est utile pour caractériser le comportement des fonctions de valeurs moyennes nulles<sup>1</sup>. En particulier, savoir si la fonction s'écarte sensiblement de zéro ou non. Pour la connaître, on prend la racine de la moyenne du carré de la fonction. Cela s'écrit

1. C'est très différents de se prendre des chatouillis en 20 V de tension efficace et de s'électrocuter sur du 220 V alors que les deux signaux ont tous deux une valeur moyenne nulle

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f^2(t) dt}$$

### 💡 À retenir!

La définition précédente correspond au mode AC+DC des multimètres de TP. Lorsqu'on se met en mode AC, on se ramène de surcroît à un signal de valeur moyenne nulle, donc on calcule

$$f_{\text{eff,AC}} = \sqrt{\langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (f(t) - \langle f \rangle)^2 dt}$$

soit la (racine de la) moyenne du carré des écart à la moyenne, ce qui correspond à un écart-type en statistique et mesure de combien le signal s'écarte de sa moyenne en plus ou en moins.

### b) Fonctions périodiques

Comme une fonction périodique répète indéfiniment les même chose, il suffit de calculer la moyenne sur une période pour avoir « la » moyenne. C'est la même chose concernant le calcul de la valeur efficace. Ainsi,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{et} \quad f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$

La démonstration rigoureuse n'est pas très difficile et constitue un bon exercice de mathématique, notamment en ce qui concerne la mise en forme. Néanmoins, cela n'a pas trop d'intérêt pour un cours de physique.

---

#### EXERCICE S8.1 Valeurs moyennes et efficaces

---

Déterminer les valeurs moyennes et efficaces des signaux suivants :

1. rectangulaire entre  $-U_0$  et  $U_0$  ;
  2. rectangulaire entre 0 et  $U_0$  ;
  3. triangulaire entre  $-U_0$  et  $U_0$  ;
  4. triangulaire entre 0 et  $U_0$ .
- 

### 3 Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

---

#### EXERCICE S8.2 Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

---

Montrer que la valeur efficace d'un signal sinusoïdal de la forme  $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$  vaut

$$u_{\text{eff}} = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$$


---

## 4 Valeur efficace d'un signal périodique

Un signal périodique s'écrit de manière générique

$$f(t) = \chi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

en le décomposant sur chacune de ses harmoniques. On peut montrer que le carré de la valeur efficace de  $f$  est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacune des harmoniques (la valeur constante vaut sa propre valeur efficace, ce qui s'écrit

$$f_{\text{eff}}^2 = \chi_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\chi_n}{\sqrt{2}} \right)^2$$

---

### EXERCICE S&B Valeur efficace d'un signal périodique (exo optionnel)

---

Démontrer le résultat précédent (le résultat est à connaître, mais la démo est optionnelle).

---

Partie II

## Notion de filtrage linéaire

### 1 Filtrage

#### a) En électricité : notion de quadripôle

Un quadripôle est une partie de circuit électrique avec 4 pôles : deux pour la tension d'entrée (notée de manière générique  $u_e$ ) et deux pour la tension de sortie (notée  $u_s$ ). Le but d'un filtrage électrique est de sélectionner certaines caractéristiques de la tension d'entrée et de les récupérer dans la tension de sortie en ayant partiellement effacé les caractéristiques non voulue.

SCHEMA

#### b) En mécanique

En mécanique, la définition de l'entrée et de la sortie est moins claire et peut revêtir divers habillages selon les problèmes considérés. Le plus simple est de se figurer un signal d'entrée sous la forme du secouage de l'extrémité « fixe » du ressort vertical et de regarder l'évolution de la position de la masse comme signal de sortie pour voir ce qu'il reste du secouage initial.

D'un point de vue plus imagé, prenons l'exemple d'une voiture sur une route. Dans un tel système, on voudrait que le châssis de la voiture suive peu ou prou les variations lentes d'altitude de la route lors de l'avancée de la voiture. Les amortisseurs (qui sont à peu de chose près de gros ressorts...) doivent donc « laisser passer » les mouvements à basses fréquences. En revanche, on voudrait

être le moins enquiné possible par les « nids de poule » qui pourraient exister sur la route. En d'autres termes, quand la voiture roule dans un nid de poule, on voudrait que l'amortisseur « compense » en projetant la roue au fond du nid puis en lui permettant de remonter après impact sans que le châssis n'expérimente de mouvement vertical. Un nid de poule pris à grande vitesse étant une perturbation à haute fréquence, le système dans l'ensemble doit « filtrer » les hautes fréquences de sorte que le châssis en soit le moins impacté possible.

## 2 Fonction de transfert

### a) Définition

On a vu que tout signal périodique pouvait se ramener à une somme de sinusoides et que, si le système est linéaire, l'effet sur une somme vaut la somme des effets. On va donc poser les expressions suivantes pour les signaux d'entrée et de sortie

$$u_e = u_{e0} \cos(\omega t + \varphi_e) \quad \text{et} \quad u_s = u_{s0} \cos(\omega t + \varphi_s)$$

Maintenant que l'on a des expressions sinusoidales, on peut leur associer leurs notations complexes

$$\underline{u}_e = u_{e0} e^{j\varphi_e} e^{j\omega t} = \underline{u}_{e0} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}_s = u_{s0} e^{j\varphi_s} e^{j\omega t} = \underline{u}_{s0} e^{j\omega t}$$

Le rôle de la fonction de transfert  $\underline{H}$  est de faire le lien entre l'entrée et la sortie

$$\underline{u}_s = \underline{H} \underline{u}_e \quad \text{soit} \quad \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{u}_{s0}}{\underline{u}_{e0}} = \frac{u_{s0}}{u_{e0}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

On peut en déduire directement le coefficient d'amplification en amplitude  $A(\omega) = u_{s0}/u_{e0}$  ainsi que le déphasage  $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$  de la sortie comparée à l'entrée à partir de  $\underline{H}$

$$A(\omega) = \frac{u_{s0}}{u_{e0}} = |\underline{H}| \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H})$$

### b) Diagramme de Bode, définition

Il est courant d'utiliser une fonction de transfert dans des domaines de fréquences qui peuvent différer de plusieurs ordre de grandeur. De ce fait, une représentation simplement linéaire de  $A(\omega)$  en fonction de  $\omega$  n'est pas suffisante pour apprécier ces différents régimes. C'est pourquoi, on passe en échelle logarithmique, c'est-à-dire que l'on représente  $A(\omega)$  en fonction de  $\log \omega$  de sorte qu'une multiplication de la pulsation par un facteur 10 entraîne à chaque fois un décalage constant vers la droite.

Pour les mêmes raisons, le comportement de  $A(\omega)$  peut être très différent de plusieurs ordres de grandeur selon la zone de fréquences étudiée. Aux mêmes maux, les mêmes remèdes, on va donc non pas représenter  $A(\omega)$  mais  $\log[A(\omega)]$  pour ne pas favoriser outre mesure les zones où l'amplitude est la plus grande. Néanmoins, historiquement, ce n'est pas  $\log A$  que l'on utilise mais  $20 \log A$  que l'on appelle « gain en décibel » souvent noté  $G_{dB}$  et définit de sorte que

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$$

Finalement, on va donc appeler « diagramme de Bode en amplitude » le graphique représentant  $G_{dB}$  en fonction de  $\log \omega$  (ou en échelle logarithmique de  $\omega$ ) et « diagramme de Bode en phase » le graphique représentant  $\varphi$  en fonction de  $\log \omega$  (ou en échelle logarithmique de  $\omega$ ).

## SCHEMA

### c) Utilisation pratique

Prenons un signal d'entrée sinusoïdal  $u_e = u_{e0} \cos(\omega t + \varphi_e)$ . Alors, après passage par le système linéaire et connaissant sa fonction de transfert  $\underline{H}$ , on peut en déduire l'expression de la tension de sortie

$$u_s(t) = |\underline{H}| u_{e0} \cos(\omega t + \varphi_e + \arg(\underline{H}))$$

À partir des graphiques mis à notre disposition donnant  $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H})$  et  $G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}|$ , on obtient finalement

$$u_s(t) = 10^{G_{dB}/20} u_{e0} \cos(\omega t + \varphi_e + \varphi(\omega))$$

Prenons à présent un signal  $u_e(t)$  qui est la somme de plusieurs sinusoïdes de pulsations distinctes (on en prend deux pour l'exemple, mais cela se généralise à un nombre  $n$  quelconque). Si le signal d'entrée s'écrit

$$u_e(t) = u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{e1}) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{e2})$$

alors le signal de sortie sera

$$\begin{aligned} u_s(t) &= |\underline{H}(\omega_1)| u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{e1} + \arg(\underline{H}(\omega_1))) + |\underline{H}(\omega_2)| u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{e2} + \arg(\underline{H}(\omega_2))) \\ &= 10^{G_{dB1}/20} u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{e1} + \varphi_1) + 10^{G_{dB2}/20} u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{e2} + \varphi_2) \end{aligned}$$

Remarque : on peut très bien avoir des sinus plutôt que des cosinus puisque cela revient juste à modifier la valeur de la phase  $\varphi_e$  initiale.

Pour une somme finie de  $n$  signaux différents

$$u_e(t) = \sum_{k=1}^n u_k \cos(\omega_k t + \varphi_{e,k})$$

on obtient

$$u_s(t) = \sum_{k=1}^n 10^{G_{dB,k}/20} u_k \cos(\omega_k t + \varphi_{e,k} + \varphi_k)$$

où les  $G_{dB,k}$  et  $\varphi_k$  sont lus sur les diagrammes en amplitude et en phase à la position correspondant à  $\omega_k$ .

Pour finir, on peut aussi appliquer le même principe à la décomposition de Fourier d'un signal périodique  $f$  de période  $T$  et de pulsation fondamentale  $\omega = 2\pi/T$ . En entrée,

$$f(t) = \chi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_{e,n})$$

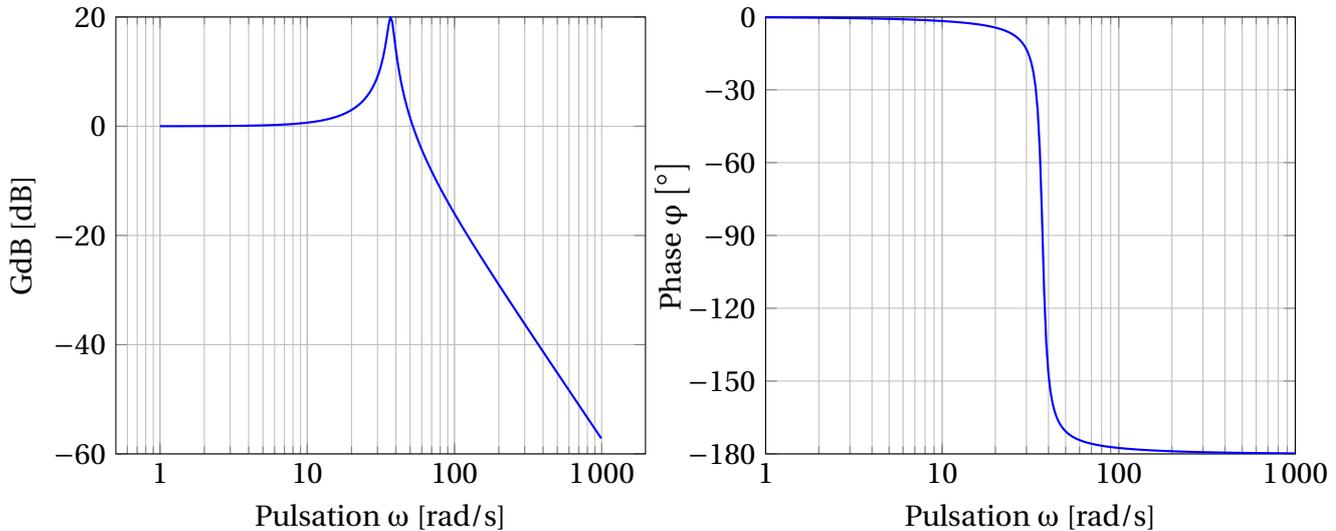
En sortie,

$$f_s(t) = |\underline{H}(\omega \rightarrow 0)| \cos(\varphi(\omega \rightarrow 0)) \chi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(n\omega)| \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_{e,n} + \varphi(n\omega))$$

Remarque : je ne crois pas avoir jamais rencontré de cas pratique où l'on ait  $\cos(\varphi(\omega \rightarrow 0)) \neq 1$  sans que dans le même temps  $|\underline{H}(\omega \rightarrow 0)| = 0...$

**EXERCICE S&A** Passage par un filtre

Trouver l'expression du signal en sortie du filtre défini par les diagrammes de Bode suivants



$$u_e(t) = 2 \cos(30 \times t) + 10 \sin(250 \times t)$$

$$u_s(t) = ? \cos(30 \times t + ?) + ? \sin(250 \times t + ?)$$

**d) Construction du diagramme de Bode**

**Exemple d'un passe-bas du premier ordre** Prenons un simple circuit RC. On supposera pour les calculs qu'il n'y a aucun courant de fuite, c'est-à-dire que ce sur quoi est branché le filtre est de résistance d'entrée quasi-infinie (comme un oscilloscope) par rapport à la résistance R du filtre. Alors, un simple diviseur de tension donne le lien entre  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_e$ .

$$\underline{u}_s = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{u}_e = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_C} \underline{u}_e = \overbrace{\frac{1}{1 + jRC\omega}}^{\underline{H}} \underline{u}_e \quad \text{soit} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$$

La phase s'obtient facilement par la prise de l'argument de la fonction de transfert

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Pour le gain en décibel, il faut en passer par la norme et  $20 \log$

$$G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}\right)$$

Au passage, on peut signaler la définition de la pulsation de coupure  $\omega_c$  qui correspond à la pulsation pour laquelle l'amplification maximale (ici  $|\underline{H}|_{\max} = 1$ ) a été divisée par  $\sqrt{2}$  (ici quand  $\omega = \omega_c$ , d'où la notation...). Cette division par  $\sqrt{2}$  se ramène en gain en décibel à une chute de 3 dB par rapport au gain maximal, d'où le nom plus complet de « fréquence de coupure à -3 dB ».

Regardons les comportements lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$  en prenant les équivalents de la fonction de transfert complexe dans ces domaines. On a alors

$$\underline{H}(\omega) \underset{0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{j\omega/\omega_c} = \frac{\omega_c}{j\omega}$$

On en déduit

$$\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$$

et aussi  $G_{\text{dB}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$  et  $G_{\text{dB}} \underset{\infty}{\sim} 20 \log \frac{1}{\omega/\omega_c} = -20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)$

On voit que l'asymptote est horizontale (valeur constante) à gauche, mais descend à  $-20$  dB/decade du côté droit, comportement caractéristique d'un filtre passe-bas du premier ordre.

## SCHEMAS

**Lois de puissance en diagramme log-log** Les diagrammes log-log sont particulièrement utiles pour repérer des lois de puissances dans les phénomènes mesurés ou modélisés, que ce soit en physique (diagramme de Bode) ou en informatique (étude de complexité d'un algorithme). En effet, supposons qu'une quantité  $y$  soit reliée à un quantité  $x$  via une loi de puissance :  $y = \alpha x^\beta$ . Alors, si on applique le logarithme de part et d'autre de cette égalité, on obtient

$$\log(y) = \log(\alpha x^\beta) = \log(\alpha) + \log(x^\beta) = \log(\alpha) + \beta \log(x)$$

ce qui correspond à une droite en échelle log-log puisque  $\log(y)$  dépend de manière affine de  $\log(x)$  avec pour coefficient directeur la puissance à laquelle  $x$  était porté.

Les droites en diagrammes log-log correspondent à des lois de puissance

**Identification visuelle d'un filtre** Comme les lois de puissances donnent des droites et que dans les filtres que l'on va croiser, il y a des constantes, des  $\omega$  et des  $\omega^2$ , tôt ou tard, l'un deux va dominer au numérateur ou au dénominateur, menant à des asymptotes rectilignes pour le diagramme de Bode en amplitude dont les valeurs des pentes seront caractéristiques du filtre étudié. On peut alors faire le tableau 8.1 de correspondances

Bien sûr, toute multiplication de la fonction de transfert par un nombre constant  $H_0$  se contente de décaler le diagramme en gain vers le haut ( $H_0 > 1$ ) ou vers le bas ( $H_0 < 1$ ) mais ne change pas la nature globale du filtre.

### 3 Gabarit d'un filtre

Dans la vie réelle, on ne vous donnera pas un filtre pour en étudier les caractéristiques, on vous donnera plutôt un cahier des charges de ce que le filtre doit savoir faire et ce sera à *vous* de le construire. Par exemple, supposons que vous ne supportiez pas les « cokes<sup>2</sup> » qui passe en voiture en bas de chez vous avec le caisson de basse à fond. On désire un filtre qui amortisse les fréquence inférieures à 10 Hz d'au moins un facteur 100 en ne touchant presque pas les fréquence supérieures à 300 Hz. Le gabarit du filtre se dessine alors de la sorte

## SCHEMA

---

2. Prononcer à l'alsacienne

Pente $\omega \rightarrow 0$	Pente $\omega \rightarrow \infty$	Type de filtre	Fonction de transfert	Diagramme
0 dB/décade	-20 dB/décade	Passe-bas 1 <sup>er</sup> ordre	$\frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$	
20 dB/décade	0 dB/décade	Passe-haut 1 <sup>er</sup> ordre	$\frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c}$	
0 dB/décade	-40 dB/décade	Passe-bas 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{1}{1 + j\omega/Q\omega_0 - (\omega/\omega_0)^2}$	
20 dB/décade	-20 dB/décade	Passe-bande 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - (\omega/\omega_0)^2}$	
40 dB/décade	0 dB/décade	Passe-haut 2 <sup>e</sup> ordre	$\frac{-(\omega/\omega_0)^2}{1 + j\omega/Q\omega_0 - (\omega/\omega_0)^2}$	

TABLE 8.1 – Tableau des correspondances entre types de filtres, fonctions de transfert et représentation graphique.

On voit tout de suite que l'on cherche à créer un filtre passe-haut, mais peut-il être du premier ordre? La réponse est non : si l'on part d'une atténuation d'un facteur 100 à 10 Hz (donc de  $-40$  dB) pour arriver à un signal de gain nul entre une et deux décades après, on ne peut pas le faire à  $+20$  dB/dec, ce qui nous amènerait jusqu'à 1000 Hz. Il faudra donc utiliser passe-haut du deuxième ordre, pour lequel on aura du coup un peu plus de choix car une certaine variété de jeux de paramètres conviennent.

#### 4 Usages « détournés »

Un filtre sert bien sûr à filtrer, mais il peut aussi avoir des usages quelques peu détournés pour appliquer une certaine opération mathématique sur un signal analogique sans avoir besoin de faire le moindre calcul.

**Moyennage** Prendre la moyenne d'un signal périodique revient à récupérer le facteur  $\chi_0$  de la décomposition de Fourier puisque tous les termes sinusoïdaux sont chacun de moyenne nulle. Or, le terme en  $\chi_0$  peut être considéré comme un signal sinusoïdal particulier de période infini (il change sur un temps extrêmement long comparé à la durée de l'expérience) c'est-à-dire de pulsation nulle. Ainsi, si on applique un filtre passe-bas de pulsation de coupure bien inférieure à la pulsation du fondamental du signal, on récoltera en sortie un signal fluctuant très légèrement autour de la valeur moyenne du signal d'entrée (inchangée par le filtre).

**Dérivation** Dériver un signal sinusoïdal revient à le multiplier par  $j\omega$  en notation complexe. Or pour un passe-haut du premier ordre, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} \frac{j\omega}{\omega_c}$$

de sorte que 
$$\underline{u}_s = \underline{H}\underline{u}_e \approx \frac{j\omega}{\omega_c} \times \underline{u}_e \quad \text{soit} \quad u_s(t) \approx \frac{1}{\omega_c} \frac{du_e}{dt}$$

À un facteur multiplicatif près, on obtient bien en sortie approximativement la dérivée du signal d'entrée. L'inconvénient est que l'on travaille à basse fréquence pour un passe-haut, donc que l'amplitude globale du signal s'effondre (ce qui est plus ou moins le cas anyway quand on regarde la dérivée dans un tel régime).

**Intégration** Intégrer un signal sinusoïdal revient à le diviser par  $j\omega$  en notation complexe. Or on a vu qu'un passe bas du premier ordre se comporte en  $\frac{1}{j\omega/\omega_c}$  à haute fréquence, ce qui revient à diviser par  $j\omega$  (au prix d'une perte sèche en amplitude). On a alors

$$\underline{u}_s = \underline{H}\underline{u}_e \approx \frac{\underline{u}_e}{j\omega/\omega_c} \quad \text{soit} \quad \frac{du_s}{dt} \approx \omega_c u_e$$

ce qui indique bien que  $u_s$  sera une primitive de  $u_e$  à un facteur multiplicatif près. L'inconvénient est que l'on travaille à haute fréquence pour un passe-bas, donc que l'amplitude globale du signal s'effondre (ce qui est aussi normal compte tenu de l'opération mathématique appliquée).

#### 5 Impédances d'entrée et de sortie : mise en cascade

Dans l'exemple que l'on a traité et les autres que l'on va faire en TD, la détermination de la fonction de transfert se fait toujours par application de la formule du diviseur de tension qui, pour être applicable, doit se faire en l'absence de tout courant de fuite. Or, le but d'un filtre est généralement d'avoir quelque chose d'autre de branché dessus, donc nécessairement un courant de fuite... Pour s'assurer de la bonne marche du système, il faut donc que lors du branchement de la charge, la résistance de charge soit bien plus importante que les impédances du circuit pour éviter toute fuite.

## SCHEMA

En particulier, cela impose que si l'on met plusieurs filtres à la suite les uns des autres pour combiner leur caractéristiques (par exemple un passe-bas suivi d'un passe-haut pour faire un passe bande), l'impédance d'entrée du second filtre (c'est-à-dire l'impédance sous laquelle il est vu depuis le premier filtre) soit bien supérieure à l'impédance de sortie du premier filtre (c'est-à-dire l'impédance sous laquelle il est vu depuis le second filtre).

## SCHEMAS

Partie III

**Pour aller plus loin...**

## 1 Amortisseur de voiture

On considère le châssis d'une voiture montée sur quatre roues (qui seront modélisées par une seule) via quatre ressorts (modélisés par un seul) munis de dispositif à frottements fluides. Cette voiture roule sur une route de profil sinusoïdal  $Z_0 \cos(2\pi x/\lambda)$  à vitesse constante  $v$ . On s'intéresse aux variations de l'altitude  $z_M$  du châssis au cours du temps en fonction de la vitesse de la voiture sur la route.

## SCHEMA

L'inventaire des forces s'exerçant sur le châssis est le suivant :

- le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$ ;
- la tension du ressort  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z = -k(z_M - z_A - \ell_0) \vec{e}_z$ ;
- la force de frottement fluide, qu'il faut prendre avec la vitesse par rapport à la roue car c'est cette différence de vitesse que subit l'huile responsable du frottement :  $\vec{f} = -h \left( \frac{dz_M}{dt} - \frac{dz_A}{dt} \right) \vec{e}_z$

Dans le référentiel (galiléen) du sol, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit en projection sur  $\vec{e}_z$

$$m \frac{d^2 z_M}{dt^2} = -mg - k(z_M - z_A - \ell_0) - h \left( \frac{dz_M}{dt} - \frac{dz_A}{dt} \right)$$

soit

$$\frac{d^2 z_M}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dz_M}{dt} + \frac{k}{m} z_M = \overbrace{\frac{k}{m} \left( \ell_0 - \frac{mg}{k} \right)}^{= \frac{k}{m} z_{\text{éq}}} + \frac{k}{m} z_A(t) + \frac{h}{m} \frac{dz_A}{dt}$$

Le terme constant peut aisément disparaître en redéfinissant l'origine des  $z$  en posant  $Z_M = z_M - z_{\text{éq}}$ . La côte  $Z_M$  vérifie alors l'équation différentielle

$$\frac{d^2 Z_M}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dZ_M}{dt} + \frac{k}{m} Z_M = \frac{k}{m} z_A(t) + \frac{h}{m} \frac{dz_A}{dt}$$

ou encore

$$\frac{d^2 Z_M}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ_M}{dt} + \omega_0^2 Z_M = \omega_0^2 z_A(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz_A}{dt}$$

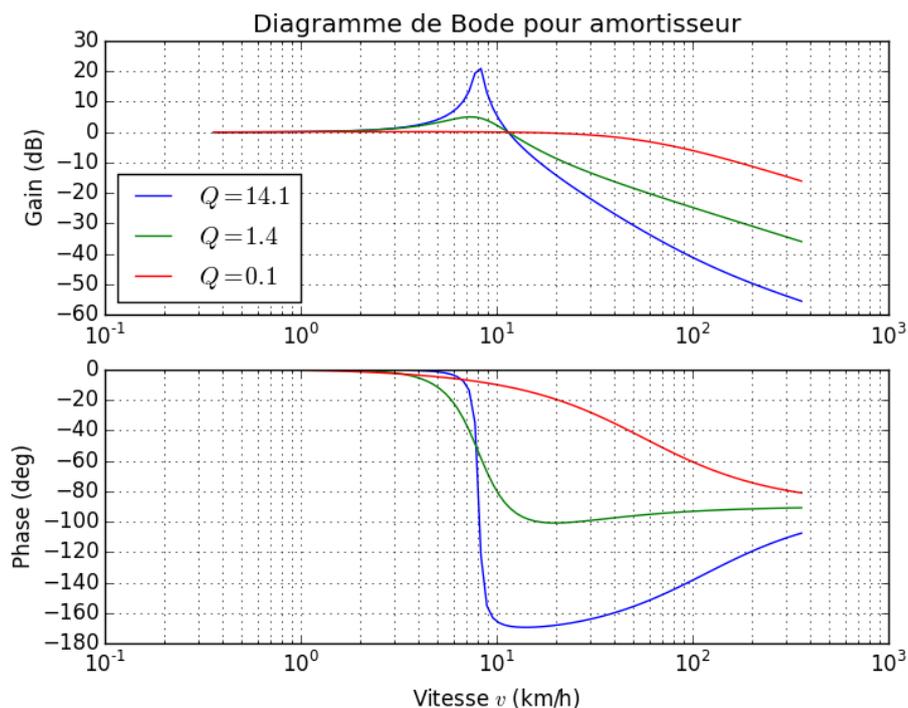
Passons en notations complexes en supposant que  $z_A(t) = A \cos(\omega t + \varphi_A)$ . On a alors

$$\left( -\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \underline{Z}_M = \left( \omega_0^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \right) \underline{z}_A$$

soit

$$\underline{Z}_M = \frac{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}} \underline{z}_A$$

Posons que la longueur d'onde spatiale des variations routières soient de l'ordre de  $\lambda = 1$  m (par exemple si l'appatisseuse était légèrement excentrée), à quelle vitesse doit-on rouler pour ne presque pas les sentir? Comme la voiture voyage avec une position  $x = vt$  et que  $z_A = A \cos(2\pi x/\lambda) = A \cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda} t\right)$ , soit  $\omega = 2\pi v/\lambda$ . Si l'on trace alors le diagramme de Bode en fonction de la vitesse de la voiture, on obtient ceci pour



On voit qu'avec cette fonction de transfert particulière, le comportement est très différent selon le facteur de qualité choisi. Si l'on veut que le défaut de la route (par exemple une autoroute) ne soit pas du tout décelable, il faut un grand facteur de qualité, donc un amortissement plutôt faible pour que les mouvements des

roues ne se répercutent pas tout de suite sur le mouvement du châssis. Néanmoins, avec cette configuration, il y a une zone de résonance qui fait que les vibrations sont grandement amplifiées aux alentours de 8 km/h avec une opposition de phase qui se comprend bien : quand la roue est au plus bas, le châssis est au plus haut et se fait fortement tiré vers le bas et le temps qu'il soit au plus bas, la roue est au plus haut, donc le ressort est grandement comprimé et pousse maintenant fortement vers le haut. Dans ces conditions, même de petites oscillations de la roue peuvent entraîner de grandes oscillations du châssis et un certain inconfort pour les passagers du véhicule.

En revanche, si le facteur de qualité est trop faible, le véhicule suit entièrement les fluctuations de la route avec seulement une faible atténuation à 100 km/h (il faudrait rouler à 300 km/h pour qu'on commence à ne plus les sentir...)

## 2 Sismomètre, accéléromètre

Un sismomètre fonctionne sur le même principe que l'amortisseur, sauf qu'on ne veut pas mesurer l'écart de position par rapport au référentiel galiléen de référence (le sol dans l'exemple précédent) mais par rapport au solide qui déclenche les mouvements (la roue dans l'exemple précédent). On s'intéresse donc à la variable  $Y = Z_M - z_A$  (soit  $Z = Y_M + z_A$ ) qui va par exemple noter l'écart de la longueur du ressort par rapport à sa longueur à l'équilibre. L'équation différentielle sur  $Y$  s'écrit donc

$$\frac{d^2Y + z_A}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dY + z_A}{dt} + \frac{k}{m} (Y + z_A) = \frac{k}{m} z_A(t) + \frac{h}{m} \frac{dz_A}{dt}$$

soit

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = -\frac{d^2 z_A}{dt^2}$$

C'est là que les comportements du sismomètre et de l'accéléromètre diffèrent. Le sismomètre veut mesurer les déplacements effectifs du sol (enfin, de la roue dans notre exemple précédent) alors que l'accéléromètre veut que les déplacements du capteur (qui seront directement traduits en tension par la suite) soient proportionnels peu ou prou à l'accélération du support (ici la roue). On va donc définir deux fonctions de transferts différentes selon le but choisi et essayer de s'arranger pour que ces fonctions de transfert soient le plus proche possible de 1 en module pour que la quantité effectivement mesurée reflète correctement la quantité visée. En particulier,

$$\underline{H}_{\text{sismomètre}} = \frac{Y}{z_A} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{alors que} \quad \underline{H}_{\text{accéléromètre}} = \frac{Y}{\frac{d^2 z_A}{dt^2}} = \frac{-\frac{1}{\omega_0^2}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On remarque au passage que la fonction de transfert de l'accéléromètre n'est plus sans dimension et c'est normal puisqu'on veut une conversion depuis l'accélération en entrée vers un déplacement en sortie. On peut refaire une étude graphique, mais on reconnaît globalement tout de suite que le sismomètre fonctionne en passe-haut, c'est-à-dire qu'il va falloir régler correctement  $\omega_0$  pour être bien plus faible que les pulsations des plus petites pulsations à mesurer<sup>3</sup> et adapter  $Q$  de manière à maximiser la zone où le module de la fonction de transfert est proche de 1 tout en minimisant le temps passé dans le régime transitoire<sup>4</sup>. En revanche, l'accéléromètre fonctionne en passe-bas, c'est-à-dire qu'il reproduira d'autant mieux les accélérations que leur fréquence sera basse.

3. Il est par exemple illusoire de vouloir mesurer l'élévation journalière du sol due aux effets de marée avec un sismomètre « usuel ».

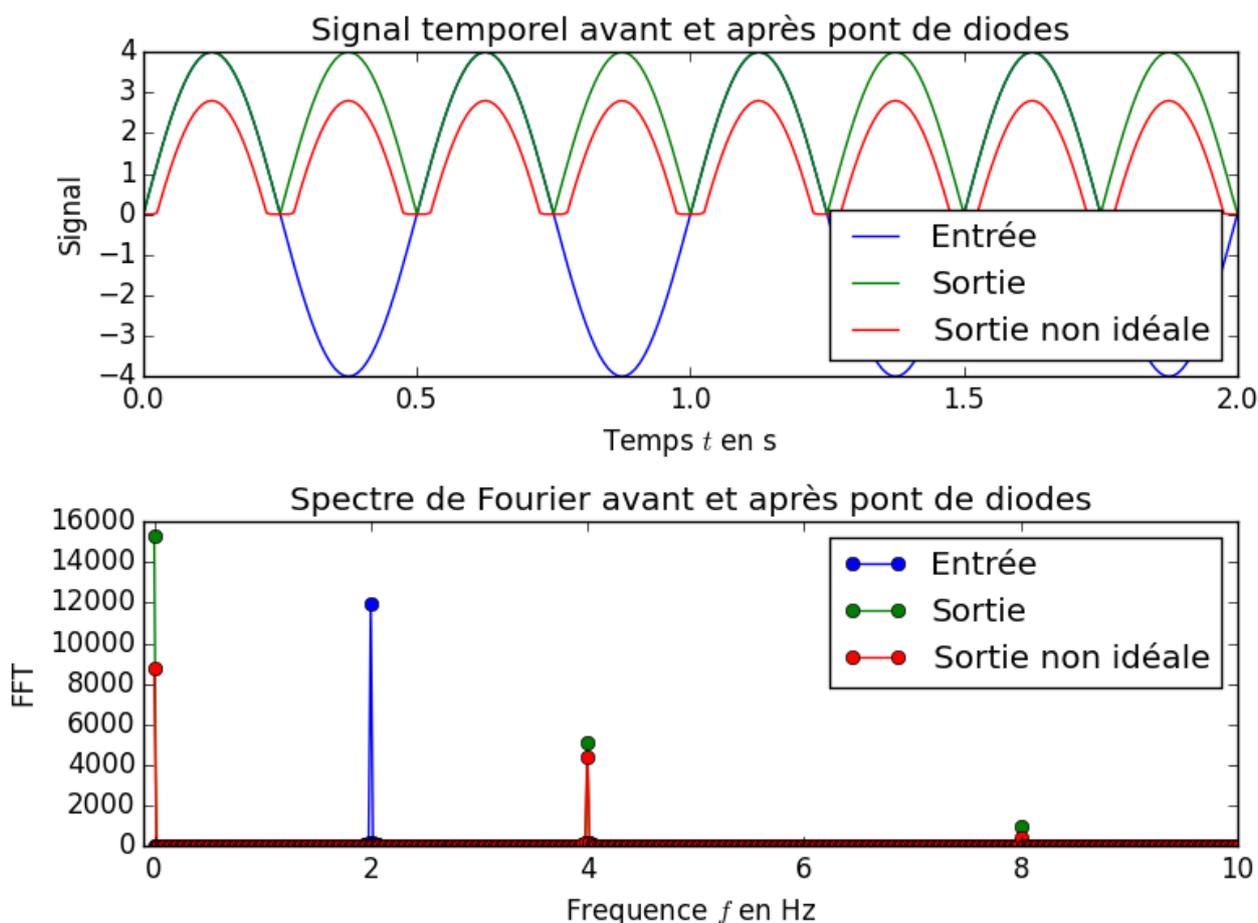
4. Ben oui, un tremblement de terre, généralement, ça ne va pas gentiment attendre que le transitoire soit terminé pour se laisser mesurer correctement...

### 3 Système non linéaire, exemple d'un pont de diodes idéal

Un pont de diode se présente sous la forme suivante

SCHEMA

Avec un tel système, la tension aux bornes de la charge se retrouve être, si les diodes sont idéales (c'est-à-dire avec une tension seuil nulle), la valeur absolue de la tension du générateur. On passe ainsi d'un signal de période globale  $T$  à un signal de période globale  $T/2$  dont la décomposition de Fourier est bien moins évidente que la décomposition (triviale) initiale. L'introduction d'un composant non linéaire comme la diode induit naturellement l'apparition de nouvelles fréquences. On parle de « taux de distorsion harmonique » quand on veut essayer de quantifier ce phénomène.



**CORRECTION 3&I Valeurs moyennes et efficaces**

1. Valeur moyenne  $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} -U_0 dt + \int_{T/2}^T U_0 dt \right) = 0$

Ici  $f^2(t) = U_0^2 = C^{te}$ , soit  $f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt} = U_0$

2. Même calcul  $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} 0 dt + \int_{T/2}^T U_0 dt \right) = \frac{U_0}{2}$

et aussi  $f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} 0 dt + \int_{T/2}^T U_0^2 dt \right)} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

3. Cette fois, il faut ajuster le triangle en deux droites. On a donc  $f(t) = -U_0 + 4U_0 t/T$  pour  $t \in [0; T/2]$  (qui vérifie bien  $f(0) = -U_0$  et  $f(T/2) = U_0$ ) et  $f(t) = U_0 - 4U_0(t - T/2)/T$  pour  $t \in [T/2; T]$  (qui vérifie bien  $f(T/2) = U_0$  et  $f(T) = -U_0$ ). La valeur moyenne est assez clairement nulle, même si le calcul permet de le confirmer facilement

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} \left( -U_0 + 4U_0 \frac{t}{T} \right) dt + \int_{T/2}^T \left( U_0 - 4U_0 \frac{t - T/2}{T} \right) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \int_0^{T/2} \left( -U_0 + 4U_0 \frac{t}{T} \right) dt + \int_0^{T/2} \left( U_0 - 4U_0 \frac{t'}{T} \right) dt' \right) \quad (\text{via } t' = t - \frac{T}{2}) \\ \langle f \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Pour la valeur efficace, le même changement de variable permet de se ramener au double de l'intégrale sur une demi-période (le signe étant cette fois absorbé par la mise au carré). Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \times 2 \int_0^{T/2} \left( -U_0 + 4U_0 \frac{t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \left[ U_0^2 t - 8U_0^2 \frac{t^2}{2T} + 16U_0^2 \frac{t^3}{3T^2} \right]_0^{T/2}} \\ &= U_0 \sqrt{\frac{2}{T} \left( \frac{T}{2} - T + 2 \frac{T}{3} \right)} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

4. La dernière fonction peut s'écrire  $f(t) = U_0 2t/T$  sur  $[0; T/2]$  et  $f(t) = 2U_0 - U_0 2t/T$  soit aussi  $f(t) = 2U_0(T - t)/T$  sur  $[T/2; T]$ . Le changement de variable  $t' = T - t$  permet de se ramener à la première demi-période dans les deux cas intéressants. Ainsi,

$$\langle f \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_0 \frac{2t}{T} dt = \frac{2}{T} \left[ U_0 \frac{t^2}{T} \right]_0^{T/2} = \frac{U_0}{2}$$

et  $f_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left( U_0 \frac{2t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \left[ U_0^2 \frac{4t^3}{3T^2} \right]_0^{T/2}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$

**CORRECTION S82** Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

La valeur efficace s'écrit 
$$u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt}$$

Calculons plutôt le carré de la valeur efficace pour ne pas traîner toutes ces racines

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T u_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt && \text{car } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{u_0^2}{T} \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi) \right]_0^T \\ &= \frac{u_0^2}{T} \left( \frac{T}{2} + \overbrace{\frac{\sin(2\omega T + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\omega}}^{=0} \right) && \text{car } 2\omega T = 4\pi \\ u_{\text{eff}}^2 &= \frac{u_0^2}{2} \end{aligned}$$

En passant à la racine

$$u_{\text{eff}} = \frac{u_0}{\sqrt{2}}$$

pour un signal *sinusoïdal*

**CORRECTION S83** Valeur efficace d'un signal périodique (exo optionnel)

Commençons par remarquer que  $\chi_0 = \langle f \rangle$  et que

$$\langle (f(t) - \chi_0)^2 \rangle = \langle f^2(t) - 2\chi_0 f(t) + \chi_0^2 \rangle = \langle f^2(t) \rangle - 2\chi_0 \langle f(t) \rangle + \chi_0^2 = f_{\text{eff}}^2 - \overbrace{2\chi_0 \times \chi_0 + \chi_0^2}^{=-\chi_0^2}$$

Ainsi,

$$f_{\text{eff}}^2 = \chi_0^2 + \langle (f(t) - \chi_0)^2 \rangle$$

Il ne reste donc qu'à calculer  $\langle (f(t) - \chi_0)^2 \rangle$ . Quand on soustrait  $\chi_0$  à  $f(t)$ , il reste

$$f(t) - \chi_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

La mise au carré va entraîner l'apparition des produits  $\chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \times \chi_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$  dont il va falloir à chaque fois calculer la valeur moyenne (puisque la valeur moyenne d'une somme est la somme des valeurs moyennes). Ainsi, pour  $(k, n) \in \llbracket 1; +\infty \rrbracket$ , il faut calculer

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_0^T \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \times \chi_k \cos(k\omega t + \varphi_k) dt \\ &= \frac{\chi_n \chi_k}{T} \int_0^T \frac{\cos[(n-k)\omega t + \varphi_n - \varphi_k] + \cos[(n+k)\omega t + \varphi_n + \varphi_k]}{2} dt \\ &= \frac{\chi_n \chi_k}{2T} \left[ \underbrace{\int_0^T \cos[(n-k)\omega t + \varphi_n - \varphi_k] dt}_{=T \text{ si } n=k, 0 \text{ sinon}} + \underbrace{\int_0^T \cos[(n+k)\omega t + \varphi_n + \varphi_k] dt}_{=0} \right] \end{aligned}$$

Au final,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \chi_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \times \chi_k \cos(k\omega t + \varphi_k) dt = \begin{cases} \frac{\chi_n^2}{2} & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Seul le produit d'une harmonique avec elle-même contribue à la valeur efficace globale en ajoutant exactement sa propre valeur efficace, cqfd.

---

**CORRECTION S&A** Passage par un filtre

---