S06

L'oscillateur harmonique

Partie I

L'expérimentation : base de toute théorie physique

1 Description du système

On considère une masse suspendue à un ressort vertical.

2 Observations

Observations diverses :

- La période des oscillations ne dépend pas de leur amplitude.
- La période est une fonction croissante de la masse.
- La période est une fonction décroissante de la raideur du ressort.

Partie II

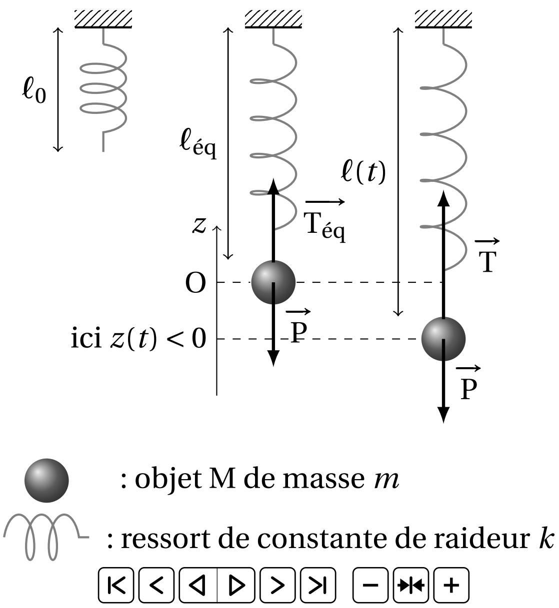
Modèle d'évolution

1 Modélisation des composants du système

En prenant la masse en main, on se rend compte que la force à exercer dessus est d'autant plus grande que l'on s'éloigne de la position d'équilibre du système (là où la masse reste au repos si on l'y laisse). On va donc modéliser le système comme n'étant soumis qu'à une unique force (qui est en fait le résultat de l'effet conjugué du poids et de la tension du ressort) proportionnelle à l'écart à la position d'équilibre. On note z l'altitude mesurée par rapport à la position d'équilibre. Alors, la force peut s'écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} = -kz\overrightarrow{e_z}$$

Ainsi, si on est au-dessus de la position d'équilibre ($z > 0$), la force est exercée vers le bas (selon $-\overrightarrow{e_z}$), alors que si on est en dessous ($z < 0$), la force est exercée vers le haut (selon $+\overrightarrow{e_z}$). À noter que si on avait orienté $\overrightarrow{e_z}$ vers le bas plutôt que vers le haut, l'expression vectorielle de la force serait restée la même puisque z change aussi de signe.



2 Relation fondamentale de la dynamique

La relation fondamentale de la dynamique (que l'on réintroduira plus particulièrement en mécanique) dit que $m\,\vec{a} = \sum \vec{F}$. Ici, comme la force est unique et que le problème est entièrement selon $\vec{e_z}$, la projection sur $\vec{e_z}$ donne

$$m\,\vec{a}\cdot\vec{e_z} = \vec{F}\cdot\vec{e_z} \qquad \text{soit} \qquad m\frac{d^2 z}{dt^2} = -kz$$

que l'on peut réécrire $$m\frac{d^2 z}{dt^2} + kz = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m}\,z = 0}$$

3 Une équation différentielle plus générale qu'on ne le croit

Cette équation se nomme en fait « équation de l'oscillateur harmonique » et peut s'écrire sous forme générique

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + {\omega_0}^2\, z = 0} \qquad \text{avec } ici\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

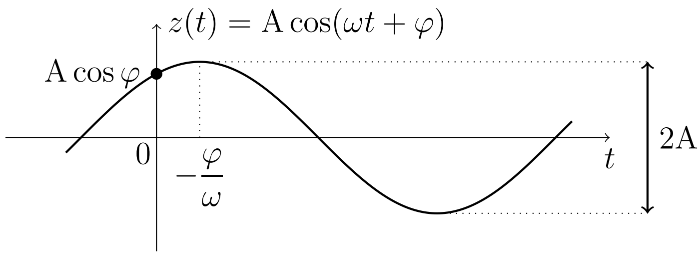
On voit que cette équation ne dépend en fait que d'un seul paramètre réel (ω_0) et que le carré assure que le terme en z est positif une fois ramené du même côté que le terme en $\dfrac{d^2 z}{dt^2}$. Cette équation se retrouve dans de multiples parties de la physique (mécanique, électricité, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), même si c'est parfois au prix d'une petite approximation, ce qui en fait une équation qu'il faut absolument savoir résoudre les yeux fermés.

EXERCICE *S6*.**1** Reconnaissance harmonique

Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations d'oscillateurs harmoniques?

1. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}\,x = 0$
2. $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + \alpha\dfrac{dy}{dt} + {\omega_0}^2\, y = 0$
3. $\dfrac{dx}{dt} + {\omega_0}^2\, x = 0$
4. $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \alpha\, z = 0$ avec $\alpha < 0$
5. $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \alpha\, z = 0$ avec $\alpha > 0$
6. $m\dfrac{d^2 u}{dt^2} + k\, u = 0$
7. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} - {\omega_0}^2\, x = 0$
8. $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{RC} = 0$
9. $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + \dfrac{i}{LC} = 0$

4 Résolution « rapide »



On voit bien que physiquement, la solution est oscillante. Alors essayons une fonction mathématique que l'on sait osciller périodiquement entre deux positions, à savoir

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

C'est une fonction sinusoïdale avec un certain déphasage φ qui peut la rendre soit semblable à un cosinus ($\varphi = 0$), soit à un sinus ($\varphi = -\pi/2$), soit toute autre solution sinusoïdale légèrement décalée. On va bien voir si cela fonctionne. Avec un tel $z(t)$, on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\big(-A\omega\sin(\omega t + \varphi)\big) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2\, z(t)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve

$$-\omega^2\,z(t)+{\omega_0}^2\,z(t) \qquad \text{soit} \qquad \left({\omega_0}^2-\omega^2\right)z(t)=0$$

Comme on recherche une solution $z(t)$ qui n'est pas identiquement nulle, cela signifie qu'obligatoirement $\omega=\omega_0$ (on prend par convention ω et ω_0 positifs) et donc

$$\boxed{z(t)=\mathrm{A}\cos(\omega_0\,t+\varphi) \text{ est solution de l'équation différentielle } \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+{\omega_0}^2\,z=0.}$$

Vous montrerez dans le cours de maths que la donnée de l'amplitude A et du déphasage φ suffisent pour trouver *toutes* les solutions de cette équation différentielle (avec $(\mathrm{A},\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times[-\pi\,;\pi[$). On a donc à notre disposition la solution la plus générale possible pour cette équation.

À retenir !

À partir de maintenant, si vous reconnaissez une équation différentielle d'oscillateur harmonique, vous pouvez directement *affirmer* que la solution s'écrit sous la forme $\mathrm{A}\cos(\omega_0\,t+\varphi)$ (en ayant correctement identifié ω_0 dans l'équation différentielle).

Prenons comme condition initiales un cas *particulier* simple tel que $z(0)=\mathrm{Z}_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)=0$ (départ d'une altitude Z_0 sans vitesse initiale). Alors, comme on a l'expression de z et de $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ à tout instant t, on peut remplacer $t=0$ dans ces expressions et obtenir les deux équations

$$\mathrm{A}\cos(0+\varphi)=\mathrm{Z}_0 \qquad \text{et} \qquad -\mathrm{A}\omega_0\sin(0+\varphi)=0$$

soit

$$\mathrm{A}\cos\varphi=\mathrm{Z}_0 \qquad \text{et} \qquad -\mathrm{A}\omega_0\sin\varphi=0$$

Comme A ne peut pas être nul (sinon $\mathrm{Z}_0=0$ aussi), alors $\sin\varphi=0$, soit $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$. Dans le premier cas, on trouve $\mathrm{A}=\mathrm{Z}_0$, dans le second $\mathrm{A}=-\mathrm{Z}_0$, mais dans les deux cas, la solution totale est la même, à savoir

$$\boxed{z(t)=\mathrm{Z}_0\cos\omega_0\,t} \qquad \text{car } \cos(x+\pi)=-\cos(x)$$

Néanmoins, cette forme de solution n'est pas forcément la plus facile à manipuler dans le cas général où la vitesse initiale n'est pas non plus nulle et vaut v_0. On se retrouve avec une expression à base d'arctangente fort peu sympathique.

EXERCICE $\mathcal{S}6$.**2** Application des conditions initiales, cas général

Supposons que $z(t)$ s'écrive de manière générale $\mathrm{A}\cos(\omega_0\,t+\varphi)$. On impose les conditions initiales $z(0)=\mathrm{Z}_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)=v_0$. Trouver les expressions de A et φ en fonction de Z_0 et v_0.

On va donc essayer d'écrire cette solution sous une forme légèrement différente qui a le défaut de ne pas explicitement faire apparaître l'amplitude et la phase de la fonction oscillante mais qui se comporte mieux vis à vis de la résolution de l'équation différentielle. Commençons par rappeler que

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

De la sorte

$$\cos(\omega_0\,t+\varphi)=\cos\omega_0\,t\cos\varphi-\sin\omega_0\,t\sin\varphi$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle peut se réécrire

$$z(t)=\mathrm{A}\cos\varphi\,\cos\omega_0\,t+(-\mathrm{A}\sin\varphi)\,\sin\omega_0\,t=\mathrm{B}\cos\omega_0\,t+\mathrm{C}\sin\omega_0\,t$$

où B et C sont deux nouvelles constantes réelles qu'il faudra déterminer à l'aide des conditions initiales.

À retenir !

À partir de maintenant, si vous reconnaissez une équation différentielle d'oscillateur harmonique, vous pouvez directement *affirmer* que la solution s'écrit sous la forme $A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ ou $B\cos(\omega_0 t)+C\sin(\omega_0 t)$ selon la forme la plus adaptée aux conditions initiales prodiguées par l'énoncé.

Avec cette expression, on a $$\frac{dz}{dt}(t) = -B\omega_0 \sin\omega_0 t + C\omega_0 \cos\omega_0 t$$

de sorte que $$z(0) = B \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{dt}(0) = C\omega_0$$

L'application des conditions initiales $z(0) = Z_0$ et $\dfrac{dz}{dt}(0) = v_0$ permet directement d'en conclure que $B = Z_0$ et $C = v_0/\omega_0$, de sorte que la solution recherchée pour le problème correspondant s'écrit

$$\boxed{z(t) = Z_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t}$$

5 Un peu de vocabulaire

Nous en avons déjà un peu parlé, mais précisons encore divers points de vocabulaire. Supposons que notre solution s'écrive

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec une *unique*[1] fonction sinusoïdale. Alors

- A (ce qui est en facteur devant le cosinus) est nommée l'amplitude (par convention, l'amplitude est prise positive) ;
- ω est la pulsation du signal (elle aussi prise positive par convention) ;
- φ est la phase (peut être positive ou négative) qui est reliée au « retard » que notre fonction a par rapport à un cosinus pur.

À partir de ces notions, on peut en définir d'autres :

- La période T des oscillations est le temps minimum nécessaire pour repasser au même endroit en se déplaçant dans le même sens. La connaissance de la fonction cosinus nous dit que c'est le cas, à chaque fois que l'argument du cosinus a augmenté de 2π. Donc par rapport à $t = 0$, on est à $t = T$ quand $\omega T = 2\pi$, de sorte que

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

- La fréquence f des oscillations est le nombre d'oscillations que l'on peut faire en une seconde. Si chaque oscillation dure un temps T, alors le nombre d'oscillations par secondes vaut $1/T$, de sorte que

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ou de manière plus simple} \quad \omega = 2\pi f}$$

  f est le nombre de tours par seconde, or comme il y a 2π radians dans un tours, ω correspond au nombre de radians parcourus par seconde. Ainsi, il est facile de retenir qu'on a toujours $\omega > f$ puisqu'il y a plusieurs radians dans un tours, donc pour un même nombre de tours par secondes, on doit parcourir plus de radians par seconde, ce qui permet de placer le facteur 2π au bon endroit.

  ω est la pulsation de l'oscillation, mais on verra qu'elle pourra aussi être associée par la suite à une vitesse angulaire de rotation.

EXERCICE S6.3 Période, fréquence et pulsation

Un oscillateur fait 50 oscillations par secondes. Déterminer la période, la fréquence et la pulsation correspondante.

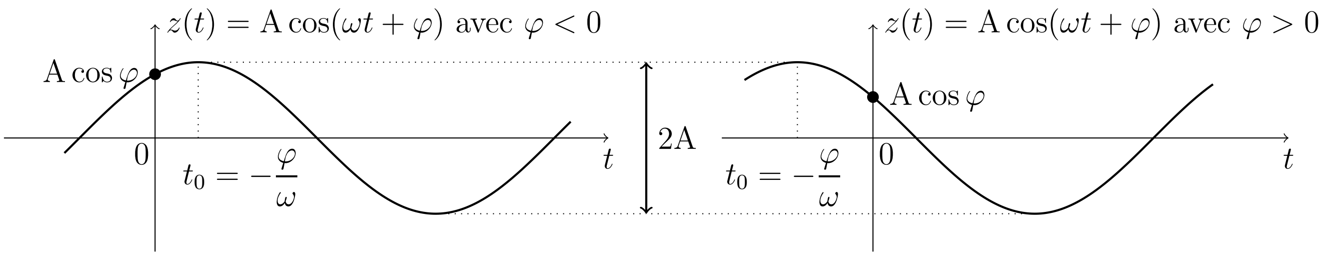
Une dernière remarque (pour vos relectures futures) concernant la phase φ. Supposons que l'on regarde la fonction $A\cos(\omega(t-t_0))$. Cette fonction est similaire à un cosinus pur à condition de la représenter en fonction de $t-t_0$ plutôt qu'en fonction de t. Elle passe donc par son maximum en $t-t_0=0$, soit $t=t_0$. On remarque que si $t_0>0$ (tout en gardant $t_0<T/2$ la demi-période), alors il nous semble que le signal est en *retard* sur le cosinus pur $\cos(\omega t)$ puisqu'il passe par son maximum après. Au contraire, si $t_0<0$ (tout en gardant $t_0>-T/2$), le signal semble en *avance* sur le cosinus pur puisqu'il est passé par son maximum avant le cosinus pur. Or, en jouant un peu sur la formule, on a que

$$A\cos(\omega(t-t_0)) = A\cos(\omega t-\omega t_0)) = A\cos(\omega t+\varphi) \qquad \text{avec} \qquad \varphi=-\omega t_0$$

On a donc des oscillations en *retard* si $\varphi<0$ (car $t_0>0$) et en avance si $\varphi>0$ (soit $t_0<0$) et cela donne une manière pratique de calculer φ en mesurant l'instant t_0 où l'on passe par un maximum

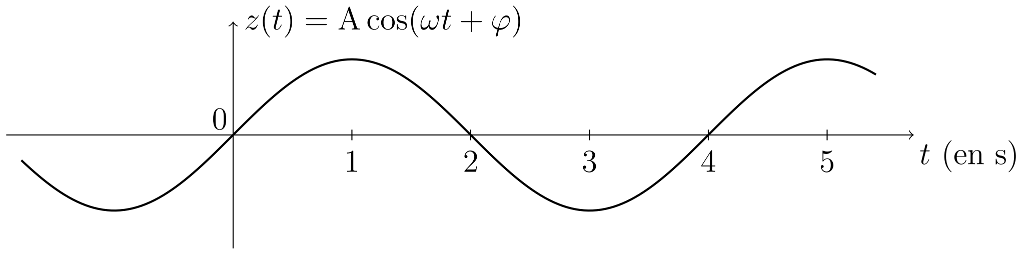
$$\boxed{\varphi=-\omega t_0=-2\pi\,\frac{t_0}{T}}$$

Cas en retard **Cas en avance**



EXERCICE S6.4 Déphasage sinus/cosinus

Calculer φ dans le cas ci-dessous. Quelle relation trigonométrique retrouve-t-on ? (à retenir...)



1. C'est-à-dire qu'on ne somme pas deux fonctions sinusoïdales, qu'on ne les multiplie pas non plus, etc.

Partie III

Confrontation Théorie/Expérience

1 Observations expérimentales satisfaites ?

À partir de notre étude, on a obtenu la forme générale

$$\boxed{z(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

de période

$$\boxed{\mathrm{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

On retrouve bien les constatations expérimentales, à savoir que

— La période des oscillations ne dépend pas de l'amplitude des oscillations. NB : le terme « harmonique » décrit très exactement cet état de fait.

— La période des oscillations est plus grande quand la masse est plus grande (plus forte inertie, on met plus de temps à changer les choses).

— La période des oscillations est plus petite quand la raideur k du ressort est plus grande (la force est plus grande pour une même inertie donc les choses changent plus vite).

Conclusion : tout est conforme aux observations !

EXERCICE *S6*.**5** Pèse-astronaute

Une navette spatiale en orbite est en chute libre : la gravité *apparente* à l'intérieur de la navette est nulle. Par conséquent, les balances ordinaires sont inopérantes. Pour suivre l'évolution de leur masse pendant la mission, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissent osciller et mesurent la période naturelle d'oscillation. Assise dans un dispositif dont la constante de rappel est de $500{,}0\ \mathrm{N/m}$, une astronaute prend $2{,}310\ \mathrm{s}$ pour effectuer une oscillation complète : on désire déterminer sa masse, sachant que le dispositif lui-même a une masse de $10{,}00\ \mathrm{kg}$.

2 Conservation de l'énergie

Dernière notion importante qui sera étudiée cette année : celle de conservation de l'énergie. Cela va revenir dans toutes les parties abordées (électricité, mécanique, thermodynamique et induction). Vous connaissez déjà la notion d'énergie cinétique

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\,m v^2$$

En rajoutant la constatation intuitive que le ressort « stocke » de l'énergie quand il est soit comprimé (il cherche à la libérer en s'étirant), soit étiré (il cherche à retrouver sa longueur naturelle en se compressant), on affirme ici que la force résultante $-kz\overrightarrow{e_z}$ est associée à une énergie dite « potentielle élastique »

$$\boxed{\mathrm{E_p} = \frac{1}{2}\,k z^2}$$

alors on peut définir l'énergie totale du système, dite « énergie mécanique » comme la somme de ces deux contributions

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p} = \frac{1}{2}\,m v^2 + \frac{1}{2}\,k z^2$$

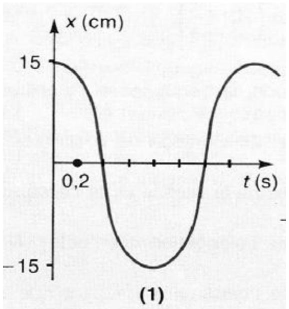
On va vérifier que l'énergie mécanique du système se conserve, c'est-à-dire qu'elle ne change pas au cours du temps pour un mouvement où $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. En effet, on a

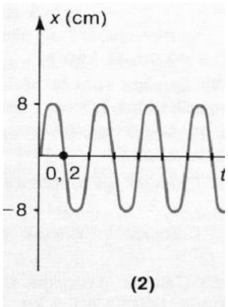
$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}\,m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,kz^2 \\
&= \frac{1}{2}\,m\,\omega_0{}^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}\,kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\
&= \frac{1}{2}\,kA^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\right] && \text{car } \omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \\
&\boxed{E_m = \frac{1}{2}\,kA^2 = C^{te}} && \text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1
\end{aligned}$$

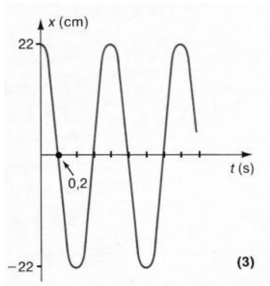
On a bien conservation de l'énergie mécanique pour n'importe quelle solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

EXERCICE *S6*.**6** Oscillateur à masses différentes

On considère un pendule élastique idéalisé. On accroche au ressort de raideur k des masses m_1, m_2 et m_3 (respectivement schéma 1, 2, 3).



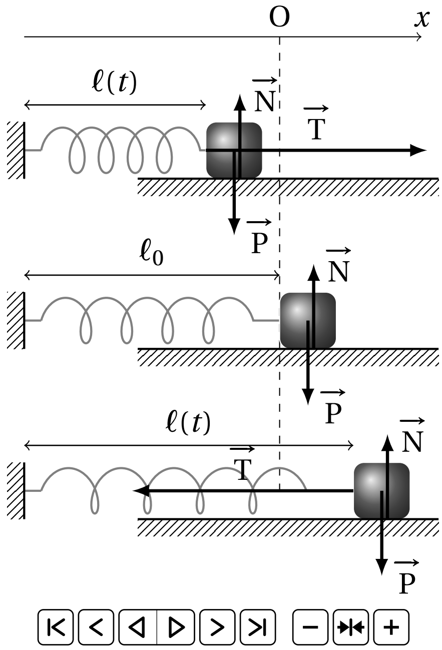




1. Indiquer le schéma correspondant à :
   — la plus grande amplitude
   — la plus grande fréquence
   — la plus grande énergie.
2. Classer les masses par ordre croissant.

Partie IV

Pour plus tard...



1 Ressort horizontal [2]

Le programme officiel stipule que l'on doit en fait se placer dans le cadre d'un oscillateur horizontal pour établir l'équation différentielle. Cela conduit à un traitement un tantinet plus simple (voir la section suivante pour ce qui a été mis sous le tapis) mais cela se heurte aux problèmes de réalisation expérimentale [3] que l'on a privilégié ici. Voici donc la version horizontale sans frottement. L'inventaire des forces sur le système est le suivant :

— le poids $\overrightarrow{P}$;

— la réaction normale du support $\overrightarrow{N}$;

— la tension du ressort : $\overrightarrow{T} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x} = -kx\,\overrightarrow{e_x}$

Les vecteurs $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{N}$ étant verticaux, la projection suivant $\overrightarrow{e_x}$ de la relation fondamentale de la dynamique donne simplement

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0}$$

On retrouve bien l'équation d'oscillateur harmonique qu'on a étudié dans tout ce chapitre.

2 Position d'équilibre [4], ressort vertical

Reprenons à présent la version verticale et traitons correctement le cas de la position d'équilibre que l'on a prudemment écarté dans une première approche. Pour la masse attachée au ressort vertical, seules deux forces s'exercent : le poids $\overrightarrow{P}$ et la tension du ressort $\overrightarrow{T}$. En prenant $\overrightarrow{e_z}$ vers le haut comme dans le schéma du début du chapitre, on a

$$\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{T} = -k(\ell - \ell_0) \times (-\overrightarrow{e_z}) = k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_z}$$

La RFD projetée suivant le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ peut alors s'écrire $\quad m\,\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg + k(\ell - \ell_0)$

La position d'équilibre est telle que le système puisse y rester sans bouger, donc avec une accélération nulle. Elle doit donc vérifier $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0$ et par définition, quand on y est, $\ell = \ell_{\text{éq}}$, de sorte que l'équation précédente se réécrive

$$0 = -mg + k\left(\ell_{\text{éq}} - \ell_0\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

Comme le ressort est étiré à l'équilibre, on doit bien trouver ici une valeur supérieur à la valeur ℓ_0 à vide et d'autant plus grande que la masse accrochée est importante et que le ressort est peu raide. À présent, on peut revenir à la définition de z par rapport à la position d'équilibre. D'après le schéma, on s'est imposé *ici* que si le ressort est plus court que sa longueur à vide ($\ell < \ell_0$), alors son altitude z est positive. On doit donc poser

$$z(t) = \ell_{\text{éq}} - \ell(t) \qquad \text{ou de manière équivalente} \qquad \ell(t) = \ell_{\text{éq}} - z(t)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg + k\left(\ell_{\text{éq}} - z - \ell_0\right) = -\cancel{mg} + k\left(\cancel{\ell_0} + \cancel{\frac{mg}{k}} - z - \cancel{\ell_0}\right) = -kz$$

On retrouve bien l'équation différentielle obtenue par un savant effet de manche au début du cours.

2. *Notions a connaitre* : Mouvement horizontal sans frottement d'une masse accrochée à un ressort linéaire sans masse.

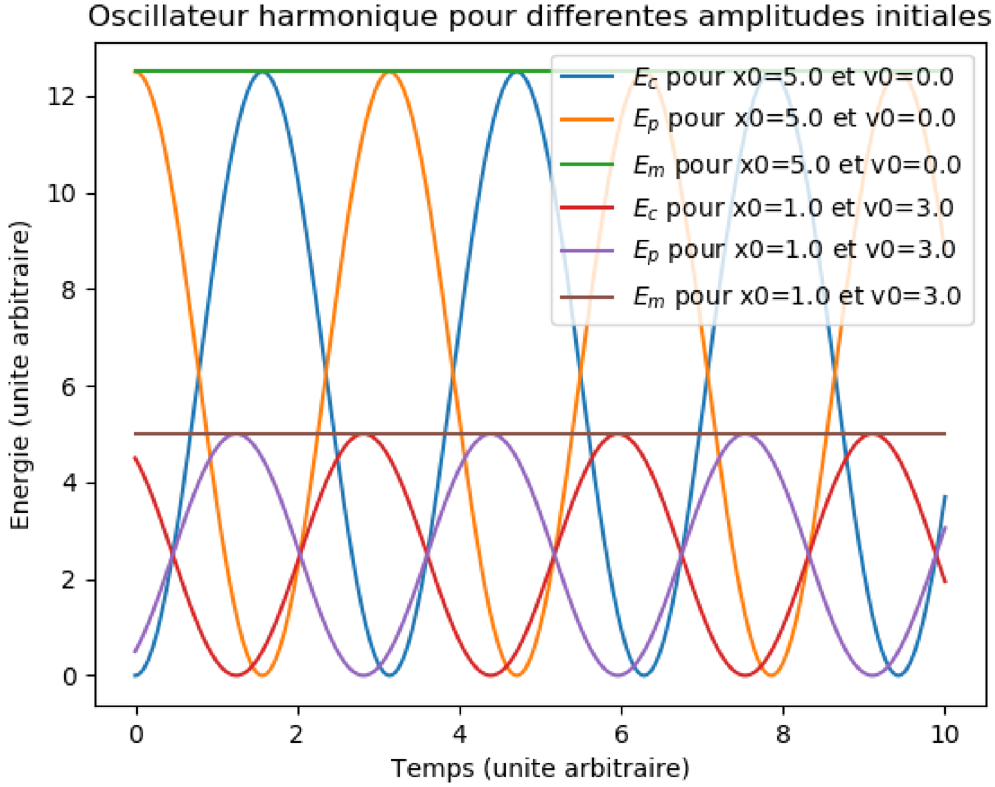
3. Notamment la difficulté de s'affranchir des frottements.

4. *Notions a connaitre* : Position d'équilibre

3 Simulations numériques

Vérifions numériquement qu'il y a bien conservation de l'énergie mécanique comme affirmé plus haut.

```python
'''
Illustration numérique de la conservation de l'énergie mécanique pour
une équation d'oscillateur harmonique.
'''

import numpy as np                    # Pour np.linspace
import scipy as sp                    # Simple alias usuel
import scipy.integrate                # Pour l'intégration
import matplotlib.pyplot as plt       # Pour les dessins

m = 1                                 # Masse du mobile
k = 1                                 # Constante de raideur du ressort
omega0 = (k/m)**0.5                   # On définit la pulsation propre

def equadiff(y,t):
    '''Renvoie l'action du système dx/dt = vx et dvx/dt = -omega0**2 * x
    soit bien l'oscillateur harmonique x'' + omega0**2 * x = 0'''
    x,vx = y                          # y contient position et vitesse
    return [vx,- omega0**2 * x]       # On renvoie un doublet pour [dx/dt,dvx/dt]

nb_CI = 2 # Nombre de conditions initiales explorées

t = np.linspace(0,10,1000)            # Le temps total d'intégration
x0= np.linspace(5,1,nb_CI)            # Les positions initiales choisies
v0= np.linspace(0,3,nb_CI)            # Les vitesses  initiales choisies

for i in range(nb_CI):                # Pour chaque condition initiale
    # L'intégration proprement dite
    sol = sp.integrate.odeint(equadiff,[x0[i],v0[i]],t)
    x = sol[:,0]                      # Récupération de la position
    v = sol[:,1]                      # et de la vitesse
    Ec = 0.5*m*v**2                   # Energie cinétique
    Ep = 0.5*k*x**2                   # Energie potentielle
    Em = Ec + Ep                      # Energie mécanique
    lab = ' pour x0={} et v0={}'.format(round(x0[i],1),round(v0[i],1))
    plt.plot(t,Ec,label='$E_c$'+lab)# Affichage Ec
    plt.plot(t,Ep,label='$E_p$'+lab)# Affichage Ep
    plt.plot(t,Em,label='$E_m$'+lab)# Affichage Em

# Il ne reste que le traitement cosmétique

plt.title('Oscillateur harmonique pour differentes amplitudes initiales')
plt.ylabel('Energie (unite arbitraire)')
plt.xlabel('Temps (unite arbitraire)')
plt.legend()
plt.savefig('PNG/S01_oscillateur_harmonique_energie.png')
```


Oscillateur harmonique pour differentes amplitudes initiales
E_c pour x0=5.0 et v0=0.0
E_p pour x0=5.0 et v0=0.0
E_m pour x0=5.0 et v0=0.0
E_c pour x0=1.0 et v0=3.0
E_p pour x0=1.0 et v0=3.0
E_m pour x0=1.0 et v0=3.0
Energie (unite arbitraire)
Temps (unite arbitraire)
0
2
4
6
8
10
12

CORRECTION S6.1 Reconnaissance harmonique

1. Oui, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
2. Non, car le terme en $\alpha\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ va introduire des amortissements dans les oscillations (si $\alpha > 0$).
3. Non, car il s'agit d'une dérivée première et non seconde (ω_0 n'est donc pas homogène ici à une pulsation : ne vous laissez pas abuser par les notations !).
4. Non car le terme devant z est négatif.
5. Oui, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\alpha}$ (d'où la nécessité d'avoir $\alpha > 0$).
6. Oui, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
7. Non, car le terme devant x est négatif.
8. Non, car il ne s'agit que d'une dérivée première et non seconde.
9. Oui, de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$.

CORRECTION S6.2 Application des conditions initiales, cas général

On a
$$z(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{soit} \qquad z(0) = \mathrm{A}\cos\varphi$$
et
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{A}\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = -\mathrm{A}\omega_0\sin\varphi$$
On se retrouve donc avec le système
$$\begin{cases} \mathrm{A}\cos\varphi = \mathrm{Z}_0 & (\mathbf{1}) \\ -\mathrm{A}\omega_0\sin\varphi = v_0 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$
On va profiter du fait que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ quoi qu'il arrive et on calcule donc $(\mathbf{1})^2 + ((\mathbf{2})/\omega_0)^2$, ce qui donne
$$\mathrm{A}^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = {\mathrm{Z}_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{A} = \sqrt{{\mathrm{Z}_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}$$
où l'on a choisi $\mathrm{A} > 0$, ce qui permettra de déterminer φ en prenant directement l'arctangente. Inversement, le rapport $(\mathbf{2})/(\mathbf{1})$ permet de s'affranchir de l'amplitude A et fait apparaître $\tan\varphi$, ce qui permet d'obtenir
$$\tan\varphi = -\frac{v_0}{\mathrm{Z}_0\omega_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{-v_0}{\mathrm{Z}_0\omega_0}\right)}$$
Où la prise directe de l'arctangente est directement liée (comme vous le verrez plus tard en math) au fait que l'on a bien choisit la solution positive pour A. On peut vérifier que c'est correct en retrouvant le cas où la vitesse initiale v_0 était nulle, ce qui donne avec les formules précédentes $\mathrm{A} = \mathrm{Z}_0$ et $\varphi = 0$, c'est-à-dire bien ce qu'on a trouvé plus haut dans le cours.

CORRECTION S6.3 Période, fréquence et pulsation

S'il y a 50 oscillations par secondes, c'est qu'une oscillation se fait en 1/50e de seconde, soit

$$\boxed{T = \frac{1}{50} = 20\ \text{ms} \qquad f = \frac{1}{T} = 50\ \text{Hz} \qquad \text{et} \qquad \omega = 2\pi f = 3,1.10^2\ \text{rad.s}^{-1}}$$

NB : le nombre d'oscillations par seconde donne directement la fréquence en Hz...

CORRECTION S6.4 Déphasage sinus/cosinus

Le maximum se trouve en $t_0 = 1$ s et on note une période de T = 4 s. Ainsi, le déphasage vaut

$$\boxed{\varphi = -2\pi\frac{t_0}{T} = -\frac{\pi}{2}}$$

On retrouve la relation $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$ qui peut aussi s'écrire $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$ et s'interpréter en disant que dériver une fonction trigonométrique revient à rajouter une phase de $\pi/2$ (à retenir!).

CORRECTION S6.5 Pèse-astronaute

On a la constante de raideur du ressort et la période (donc la pulsation) propre. Connaissant la masse du dispositif, on peut écrire

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{disp}} + m_{\text{astr}}}} = \frac{2\pi}{T_0} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{m_{\text{astr}} = \frac{k{T_0}^2}{4\pi^2} - m_{\text{disp}} = 57,58\ \text{kg}}$$

CORRECTION S6.6 Oscillateur à masses différentes

1. a) Le système ayant la plus grande amplitude est celui du schéma 3 (22 cm contre 15 cm pour le 1 et 8 cm pour le 2).
   b) Le schéma de plus grande fréquence (donc de plus faible période) est celui du schéma 2 (période de 0,4 s contre 1,6 s pour le 1 et 0,8 s pour le 3)
   c) Le schéma correspondant à la plus grande énergie est aussi celui de plus grande amplitude puisque c'est le même ressort (donc la même constante de raideur) à chaque fois et que l'énergie peut s'écrire $\frac{1}{2}k{X_0}^2$ avec X_0 l'amplitude des oscillations, donc celle du schéma 3.
2. Plus la masse est grande, plus la période d'oscillation est longue (ou la fréquence faible), d'où

$$\boxed{m_2 < m_3 < m_1}$$