S05

Oscillateurs amortis : régime libre

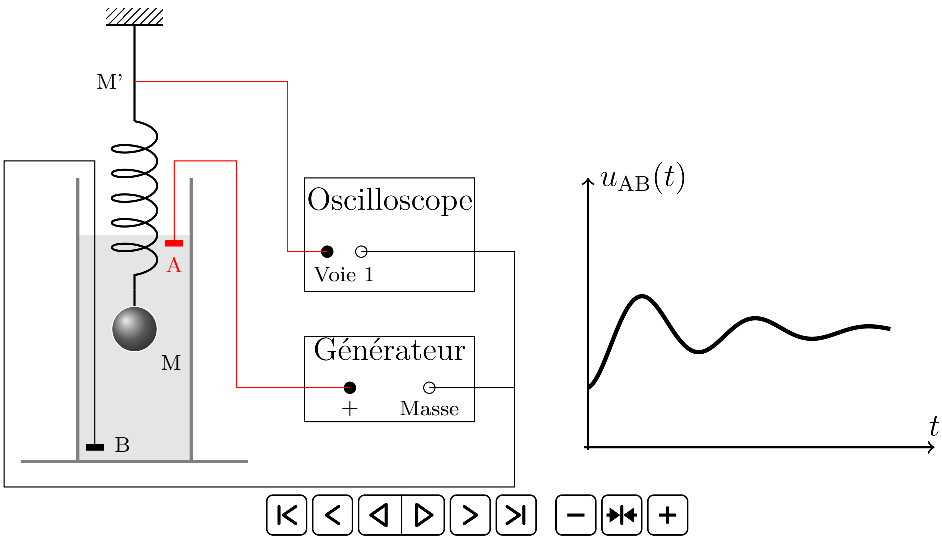
Partie I

Électrique ou mécanique ?

1 Approche expérimentale

Prendre un oscillateur mécanique et un oscillateur électrique. Comparer les courbes et voir qu'il s'agit du même type. On continuera sur un oscillateur électrique pour voir ce qui change quand on varie les paramètres.

Expliquer le montage électrique, mettre des capteurs différentiels pour ne pas être handicapé par les soucis de masses.



2 Observations

Différents régimes possibles selon la valeur de la résistance.

Différentes fréquences en fonction des valeurs de L et C. Mesures en direct lorsqu'on multiplie les valeurs de L ou C par 10.

Modification de R en régime sinusoïdal : peu de changement au niveau de la fréquence mais passage d'un régime apériodique à un régime sinusoïdal amorti (ou réciproquement)

3 Analyse qualitative énergétiques

Se baser sur le système mécanique et les pertes d'énergie par frottement pour en déduire le comportement oscillant amorti.

4 Équations différentielles

Considérons d'abord le cas mécanique. Deux forces s'appliquent sur la masse :

— la résultante des forces de tension du ressort et du poids dont l'expression se ramène, comme dans le chapitre sur l'oscillateur harmonique, à $-kz\,\overrightarrow{e_z}$ en définissant z par rapport à la position d'équilibre du système ;

— la résultante des forces de frottement sur la masse m qui, en tant que force de frottement fluide, est proportionnelle à la vitesse : $-h\dot{z}\overrightarrow{e_z}$.

L'application de la RFD à la masse en projection sur $\overrightarrow{e_z}$ donne alors l'équation différentielle

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -kz - h\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,z = 0}$$

Concernant le système électrique, on considère un circuit RLC série lorsque la tension est fixée à 0. La loi des mailles appliqué à ce circuit s'écrit

$$u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R} + u_\mathrm{C} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}i + u_\mathrm{C} = 0$$

Il ne reste qu'à utiliser que $i = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$ pour obtenir

$$\mathrm{LC}\,\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{LC}}\,u_\mathrm{C} = 0}$$

Exercice *S5*.1 Équation différentielle

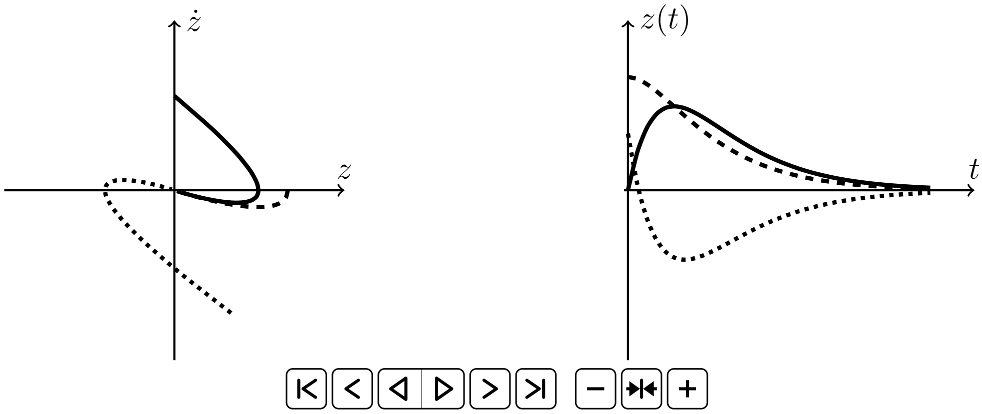
Trouver l'équation différentielle vérifiée par la tension u_L aux bornes de la bobine.

5 Portrait de phase

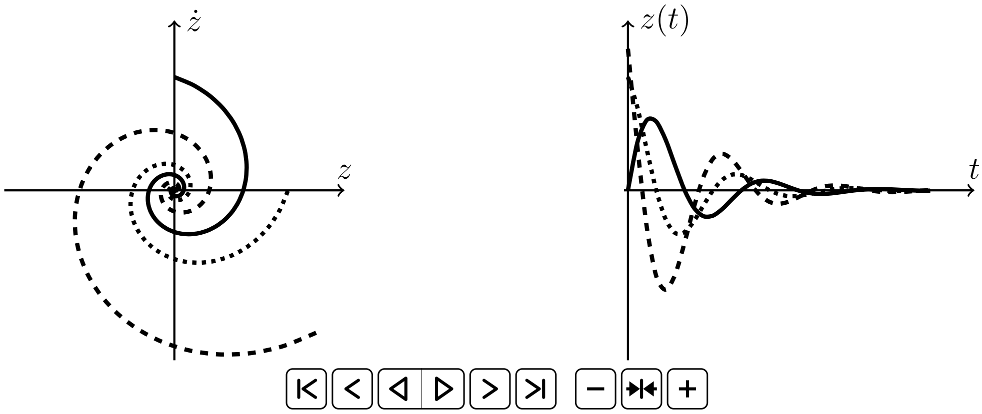
Les équations différentielles précédentes présentent (lorsque tous les paramètres en présence sont positifs [1]) un portrait de phase sous la forme soit d'un retour direct au point d'équilibre (cas fortement amorti), soit d'une spirale qui s'enroule toujours dans le sens horaire progressivement jusqu'au point d'équilibre (cas faiblement amorti). Toujours est-il que l'on peut déduire de la trajectoire le point d'équilibre (qui est le point de convergence de la spirale, non nul selon l'axe des abscisses si le second membre est non nul, mais toujours nul sur l'axe des ordonnées car la vitesse tend toujours vers zéro si on converge vers un équilibre).

Cas fortement amorti

1. Ce qu'ils sont effectivement...

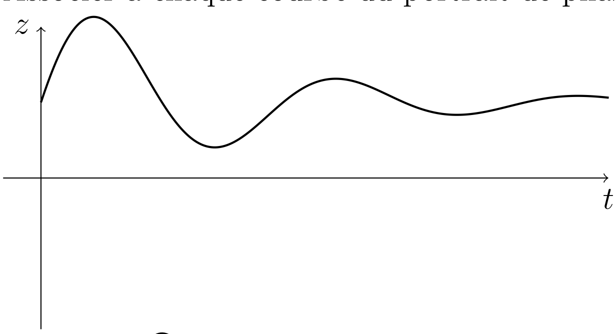


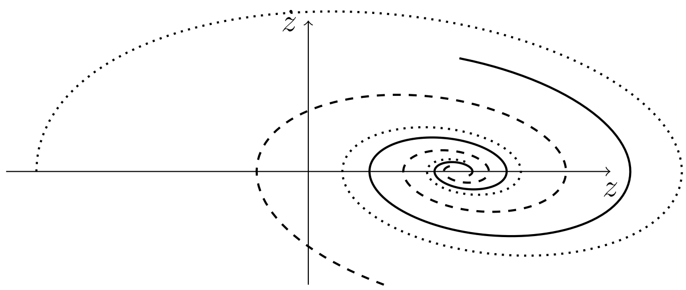
Cas faiblement amorti

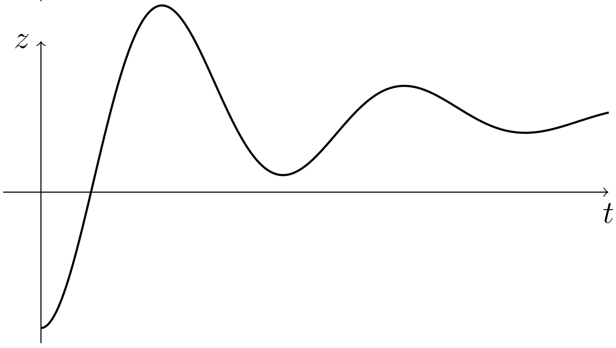


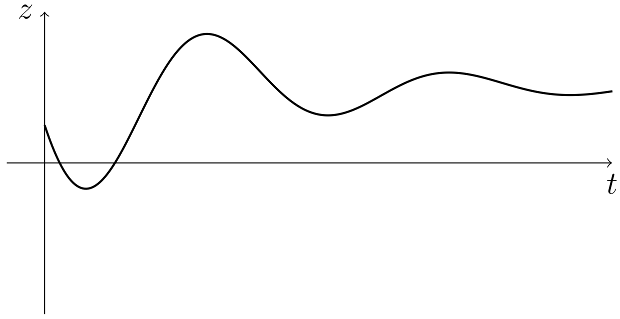
Exercice *S5.2* Lien portrait de phase/évolution temporelle

Associer à chaque courbe du portrait de phase son équivalent en évolution temporelle de la position z.









Partie II

Recherche des solutions

1 Écriture canonique

De même qu'avec l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ou celle du premier ordre vue au chapitre précédent, on peut identifier un comportement global qui ne dépend que de la valeur de chaque coefficient et non de son expression littérale. On va essayer de poser une « écriture canonique » qui permette de rassembler tous les comportements. Par exemple, posons l'équation différentielle sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0}$$

On remarque déjà que si le facteur Q (que l'on nommera « facteur de qualité ») tend vers l'infini, l'équation se ramène à une équation d'oscillateur harmonique. On trouve déjà intuitivement que le comportement sera d'autant plus proche d'un oscillateur « parfait » que la qualité de l'oscillateur est grande. Une analyse dimensionnelle montre facilement que, comme ω_0 est une pulsation (donc l'inverse d'un temps), le facteur de qualité est lui sans dimension.

Néanmoins, on peut aussi choisir d'écrire l'équation canonique sous trois autres formes selon la manière dont on veut exprimer/identifier les solutions.

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2m\,\omega_0\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0$$

On a la nomenclature suivante :

— m est appelé « facteur d'amortissement » et est sans dimension. Cette écriture est souvent utilisée en SI.

— λ est appelé « coefficient d'amortissement » (ou coefficient d'amortissement dimensionné) et est homogène à l'inverse d'un temps.

— τ est le temps caractéristique associé à λ.

Exercice $\mathcal{S}5$**.3** Écritures canoniques

Dans les équations différentielles suivantes, identifier à chaque fois les expressions de ω_0 et Q.

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\,\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\mathrm{C}}\,\dfrac{u_\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 0$
2. $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -kz - h\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
3. $\mathrm{I}_\Delta\,\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{C}\theta + \alpha\,\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$
4. $\dfrac{i}{\mathrm{L}} + 2\mathrm{C}\,\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{\mathrm{R}}\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$

Dans un second temps, et pour s'entraîner, on pourra aussi extraire les expressions correspondantes de m, λ et τ.

2 Réponse à un échelon

a) Polynôme caractéristique

Cherchons à présent la solution générale de l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+{\omega_0}^2\,u=0$$

> Il sera aisé de résoudre une équation du type
> $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+{\omega_0}^2\,u=\mathrm{C^{te}}$$
> puisque la solution sera du type $\dfrac{\mathrm{C^{te}}}{{\omega_0}^2}+u_\mathrm{h}$ avec u_h une solution de l'équation homogène que l'on va résoudre ici.

À nouveau, l'équation différentielle étant linéaire à coefficients constants, l'exponentielle est notre amie. On va rechercher les solutions sous la forme
$$u_\mathrm{h}=\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$
alors on a $\qquad \dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t}=\alpha\,u_\mathrm{h} \qquad$ et $\qquad \dfrac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}(\alpha u_\mathrm{h})}{\mathrm{d}t}=\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t}=\alpha^2\,u_\mathrm{h}$

Ainsi, si les solutions sont bien de la forme recherchée, l'équation différentielle se réécrit
$$\left(\alpha^2+\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\alpha+{\omega_0}^2\right)u_\mathrm{h}=0$$

On veut que cette équation soit satisfaite à tout instant t sans que la fonction u_h recherchée soit identiquement nulle, ce qui impose que la parenthèse, elle, est nulle. On se retrouve alors avec le « trinôme caractéristique » à résoudre :
$$\alpha^2+\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\alpha+{\omega_0}^2=0$$
Le discriminant de cette équation s'écrit
$$\Delta=\left(\frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\right)^2-4{\omega_0}^2=4{\omega_0}^2\left(\frac{1}{4\mathrm{Q}^2}-1\right)$$

En fonction du signe du discriminant, plusieurs cas de figure se présentent.

b) Régime apériodique

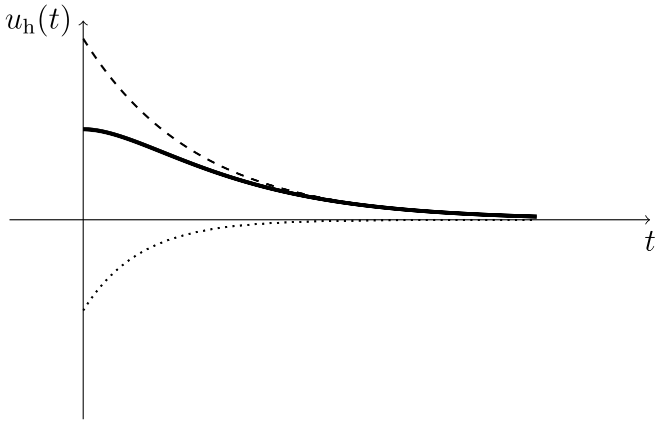
C'est le cas où le discriminant est positif, soit $\dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}>1$ ou encore
$$\boxed{\mathrm{Q}<\frac{1}{2}\ \text{pour un régime apériodique}}$$

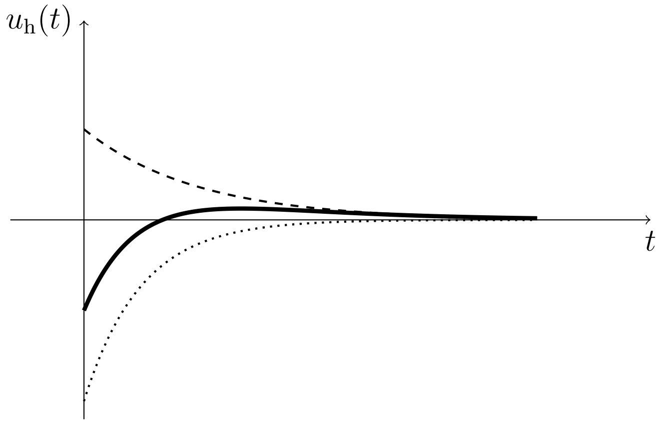
On a deux solutions réelles $\alpha_1=-\dfrac{\omega_0}{2\mathrm{Q}}+\omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}-1}$ et $\alpha_2=-\dfrac{\omega_0}{2\mathrm{Q}}-\omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}-1}$

On vérifie facilement que les deux valeurs de α possibles sont négatives : les exponentielles correspondantes sont des exponentielles décroissantes. Comme deux valeurs de α peuvent fonctionner et que l'équation différentielle est linéaire, toute somme de solution est encore solution, de sorte que la solution homogène la plus générale s'écrive
$$u_\mathrm{h}(t)=\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t}+\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha_2 t}$$
avec A et B deux constantes réelles qui seront à déterminer en fonction des conditions initiales. À remarquer que comme les deux α sont négatifs, c'est le terme le plus proche de 0 (donc α_1) qui *a priori*[2] va imposer le temps caractéristique de disparition de la solution homogène.

2. À condition que A ne soit pas négligeable devant B.

Selon les valeurs des deux constantes A et B, l'asymptote peut être atteinte directement ou avec un unique dépassement comme le montrent les figures suivantes avec en tirets le terme en α_1, en pointillés le terme en α_2 et en trait plein la solution globale, superposition des deux termes précédents.





c) Régime pseudo-périodique

C'est le cas où le discriminant est négatif, soit $\dfrac{1}{4Q^2} < 1$ ou encore

$$\boxed{Q > \frac{1}{2} \text{ pour un régime pseudo-périodique}}$$

On a deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre pour le polynôme caractéristique

$$\alpha_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{i}\,\Omega \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \mathrm{i}\,\Omega \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

Les solutions correspondantes de l'équation différentielle homogène sont donc des exponentielles complexes

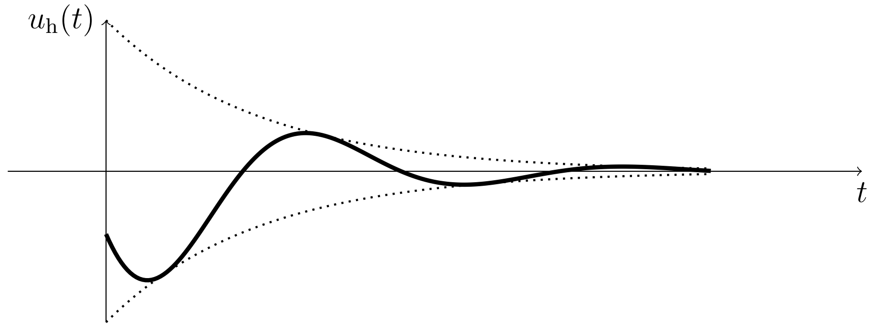
$$u_h(t) = A\,e^{-\omega_0 t/2Q}\,e^{\mathrm{i}\Omega t} + B\,e^{-\omega_0 t/2Q}\,e^{-\mathrm{i}\Omega t} = e^{-\omega_0 t/2Q}\left(A\,e^{\mathrm{i}\Omega t} + B\,e^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)$$

On pourrait se dire que des exponentielles complexes pourraient être un problème pour le physicien qui recherche des solution bien réelles, mais c'est oublier le fait que les constantes A et B sont du coup autorisées à être complexes aussi et que les sommes de produits de complexes peuvent finir par être réels si on choisit bien les valeurs de A et B. En effet, rappelons qu'une exponentielle complexe $e^{\mathrm{i}\theta}$ peut s'écrire sous forme trigonométrique $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, de sorte que

$$\begin{aligned} A\,e^{\mathrm{i}\Omega t} + B\,e^{-\mathrm{i}\Omega t} &= A\,(\cos\Omega t + \mathrm{i}\sin\Omega t) + B\,(\cos\Omega t - \mathrm{i}\sin\Omega t) \\ &= (A+B)\cos\Omega t + \mathrm{i}\,(A-B)\sin\Omega t \\ &= A'\cos\Omega t + B'\sin\Omega t \end{aligned}$$

En se débrouillant pour prendre les constante A′ et B′ réelles, on récupère bien une solution homogène pseudopériodique de la forme

$$\boxed{u_h(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\,(A'\cos\Omega t + B'\sin\Omega t) = C\,e^{-\omega_0 t/2Q}\,\cos(\Omega t + \varphi)}$$

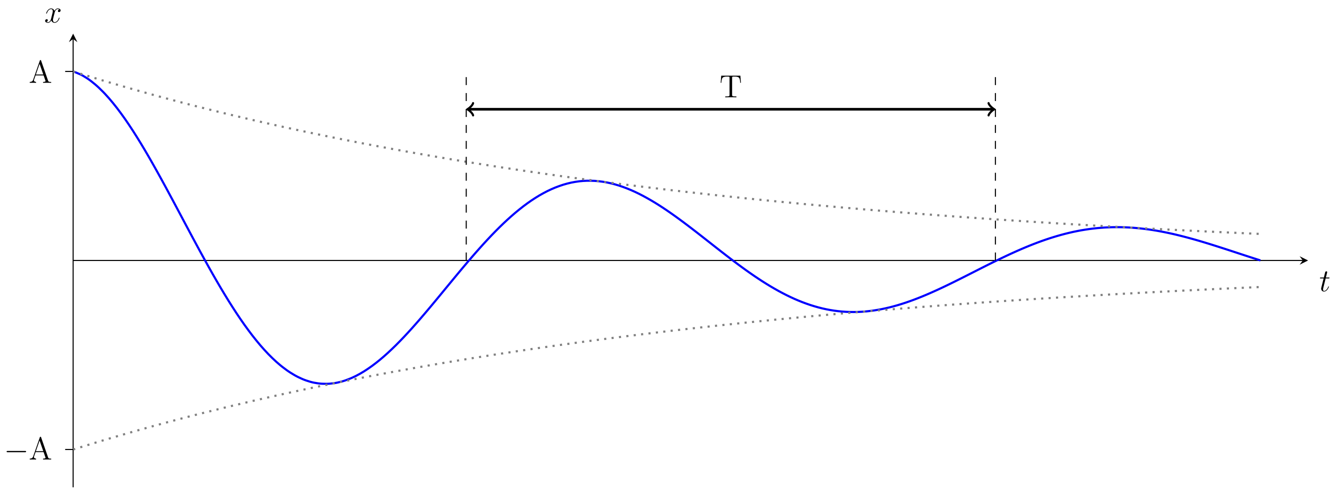


d) Choses à savoir sur le régime pseudo-périodique

Pourquoi Pseudo-périodique ? Parce que malgré le terme sinusoïdal, il n'est pas *réellement périodique*, déjà parce qu'il ne repasse pas par la même valeur au cours d'une période (la faute à l'exponentielle décroissante) et, même si on considère comme une période le temps qu'il faut pour aller d'un maximum au suivant, cette valeur n'est pas la même lorsqu'on avance dans la ronde des maximas. On définit donc la pseudo-période T comme étant reliée à la pseudo-pulsation Ω par la relation

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2}}}}$$

Une manière (exacte !) de mesurer la pseudo-période est de regarder non pas l'écart entre deux maxima consécutifs (sujet à variations), mais l'écart entre deux passages par 0 dans le même sens (entièrement causé par l'annulation du terme en cosinus) comme le montre le schéma suivant :



Combien peut-on voir d'oscillations ? Regardons de manière arbitraire quelle est l'amplitude du signal après Q oscillations en considérant que $t = 0$ correspond à un maximum d'amplitude et que Q est un entier [3]. Pour être dans ce cadre, on a $u(t) = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2\mathrm{Q}}\cos\Omega t$. De ce fait,

$$u(0) = \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad u(\mathrm{Q\,T}) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\omega_0\mathrm{T}/2}\,\cos(\mathrm{Q}\,\Omega\mathrm{T}) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\omega_0\mathrm{T}/2}$$

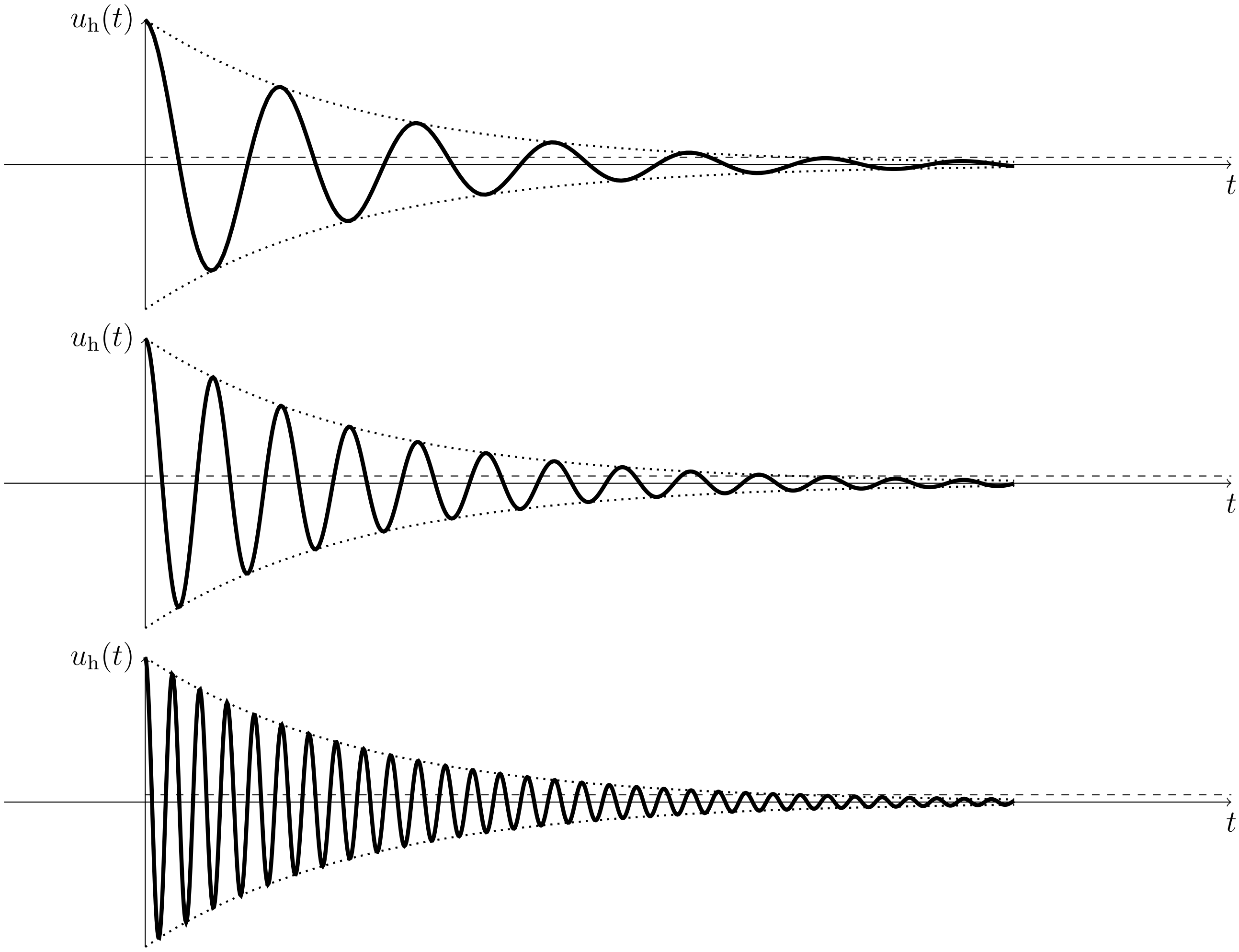
On voit que si on fait le rapport de l'amplitude initiale avec l'amplitude au bout de Q oscillations, on obtient

$$\boxed{\frac{u(0)}{u(\mathrm{Q\,T})} = \mathrm{e}^{-\omega_0\mathrm{T}/2} = \mathrm{e}^{-\pi\,\omega_0/\Omega} \approx \mathrm{e}^{-\pi} = 4,3\%}$$

où l'on a supposé que Q est assez grand [4] pour que l'on puisse considérer que $\Omega \approx \omega_0$. Or, comme 5% de l'amplitude initiale est à peu près ce qu'on arrive à distinguer nettement sur une schéma digne de ce nom, cela revient à dire que

$$\boxed{\text{Pour un régime pseudo-périodique faiblement amorti, il y a environ Q oscillations visibles.}}$$

3. C'est plus simple et on verra que ce critère étant de toutes façon approximatif, ça ne coûte rien de se placer dans ce cadre.
4. soit $\mathrm{Q} \geqslant 4$ pour déjà une vérification à 1% près.



e) Régime apériodique critique

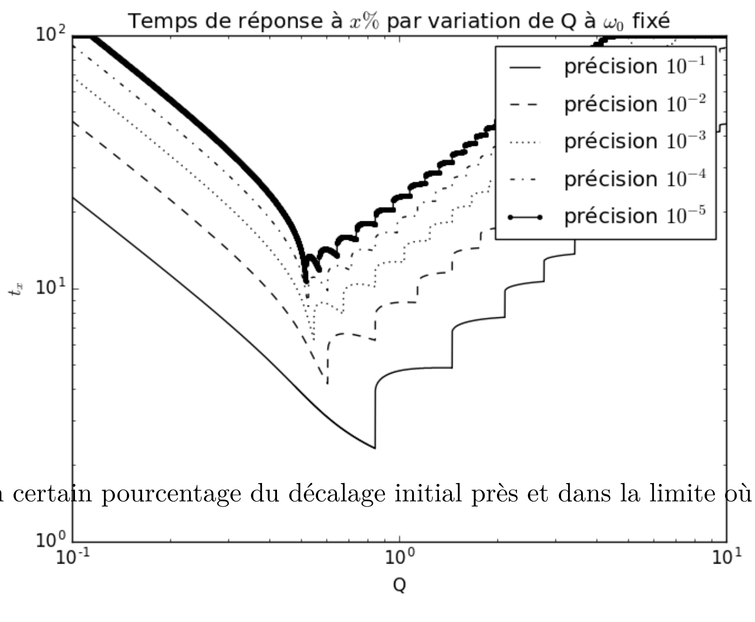
Le régime critique correspond au cas où le discriminant est nul. On a alors que

$$\boxed{\text{Le régime critique est atteint pour } Q = \frac{1}{2}.}$$

Dans ce cas, le trinôme caractéristique admet une racine double $\alpha = -\dfrac{\omega_0}{2Q}$ et on admettra que dans ce cas la solution s'écrive

$$\boxed{u_h(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t/2Q}}$$

Si l'on considère un ensemble de modèles tel que ω_0 soit fixé mais que l'on puisse faire varier le facteur de qualité Q et donc le rapport $\lambda = \omega_0/2Q$, alors le régime critique correspond au régime qui permet d'atteindre l'asymptote le plus vite [5].



5. Dans le sens où l'on reste autour de l'asymptote à un certain pourcentage du décalage initial près et dans la limite où ce pourcentage tend vers 0.

3 Temps caractéristique du régime transitoire

a) Régime apériodique

Pour un régime apériodique, on a montré que la solution générale homogène (donc transitoire) s'écrivait

$$u_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\alpha_2 t} = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$$

où l'on peut introduire τ_1 et τ_2 positifs puisque α_1 et α_2 sont tous deux négatifs. La première exponentielle disparaît « totalement » au bout de $5\tau_1$ et la seconde au bout de $5\tau_2$. Comme on l'a déjà signalé, puisque $|\alpha_1| < |\alpha_2|$, on aura $\tau_1 > \tau_2$ et donc

Pour un régime apériodique, le régime transitoire dure entre $3\tau_1$ et $5\tau_1$ avec $\tau_1 = \dfrac{1}{\dfrac{\omega_0}{2\mathrm{Q}} - \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4\mathrm{Q}^2} - 1}}$

b) Régime pseudopériodique

Pour le régime pseudo-périodique, c'est plus simple puisque le terme responsable de la décroissance est en facteur dans le $\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2\mathrm{Q}}$. Ainsi, si on écrit ce terme $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = 2\mathrm{Q}/\omega_0$.

Pour un régime pseudo-périodique, le régime transitoire dure entre 3τ et 5τ avec $\tau = \dfrac{2\mathrm{Q}}{\omega_0}$

Le temps de décroissance est proportionnel au facteur de qualité : plus l'oscillateur est bon, plus il mettra de temps à s'amortir.

c) Régime critique

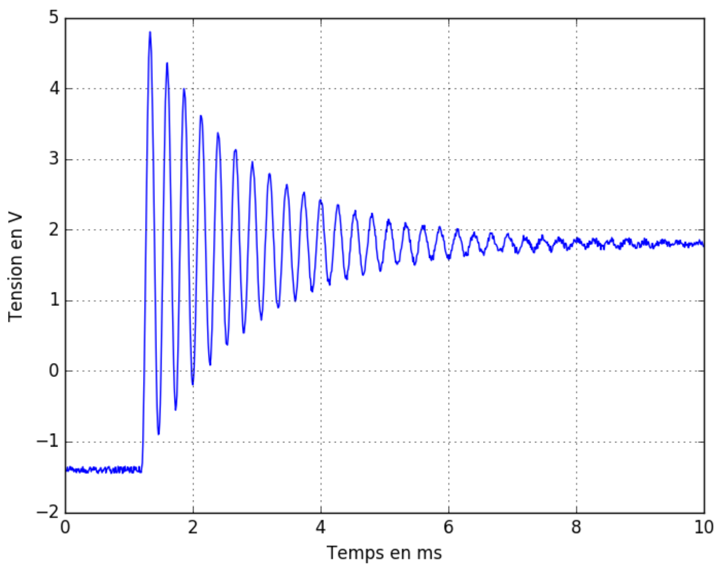
Le régime critique est particulier, mais on peut dire qu'il s'agit d'un régime pseudo-périodique lorsque Q tend vers 1/2 par valeurs supérieures, de sorte que

Pour un régime apériodique critique, le régime transitoire dure entre 3τ et 5τ avec $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$

Comme signalé plus haut, on peut sous certaines hypothèses dire que c'est le régime pour lequel le transitoire s'amortit le plus rapidement.

Exercice *S5*.4 Détermination des caractéristiques d'un régime pseudo-périodique

Déterminer la durée du régime transitoire pour l'exemple ci-contre ainsi que les valeurs de ω_0 et Q.



4 Lier ω_0 et Q avec les problèmes initiaux

Revenons à présent aux deux équations l'une mécanique et l'autre électrique qui nous ont mené à cette étude, plutôt théorique, des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Voyons comment on peut retrouver les valeurs correspondantes de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q. Il faut en premier lieu mettre l'équation sous la bonne forme en mettant un coefficient 1 devant la dérivée seconde, soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,z = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mathrm{LC}}\,u_\mathrm{C} = 0$$

à comparer à

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0$$

On peut alors obtenir deux systèmes d'équations permettant de remonter à ω_0 et Q pour chaque système

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_0}{\mathrm{Q}} = \dfrac{h}{m} \\ {\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases} \text{pour la mécanique et} \qquad \begin{cases} \dfrac{\omega_0}{\mathrm{Q}} = \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} \\ {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{LC}} \end{cases} \text{pour l'électricité}$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \mathrm{Q} = \dfrac{m\omega_0}{h} = \dfrac{\sqrt{km}}{h} \end{cases} \text{pour la mécanique et} \qquad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \\ \mathrm{Q} = \dfrac{\mathrm{L}\omega_0}{\mathrm{R}} = \dfrac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \end{cases} \text{pour l'électricité}}$$

À noter que, même s'il s'agit d'expressions très « classiques », elles peuvent changer si on change de problème (RLC parallèle au lieu de série, oscillateur mécanique à plusieurs ressorts, etc.). Il faut donc savoir retrouver les expressions correspondantes à partir de l'équation différentielle et non les apprendre par cœur pour pouvoir les « recracher » à la première occasion...

5 Intérêt des autres formes canoniques

Pourquoi y a-t-il d'autres formes canoniques ? Tout simplement parce que selon le type de régime qu'on a l'habitude d'étudier, l'une peut être plus adaptée que l'autre. En particulier, pour les régimes pseudo-périodiques, les formes

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0$$

donnent respectivement les solutions

$$u(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$$

et

$$u(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

ce qui permet de détecter immédiatement le temps caractéristique du système. En outre, le caractérique apériodique/critique/pseudo-périodique est directement décidé par la comparaison de λ et ω_0 :

- apériodique si $\lambda > \omega_0$;
- critique si $\lambda = \omega_0$;
- pseudo-périodique si $\lambda < \omega_0$.

En fin, la forme canonique faisant intervenir le facteur (adimensionné) d'amortissement $m = \lambda/\omega_0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,u = 0$$

permet le même type d'analyse, mais en comparaison relative de λ et de ω_0 : il faut donc comparer m à 1 pour savoir dans quel régime on se trouve. En particulier, si $m < 1$,

$$u(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$$

Correction *S5*.1 Équation différentielle

Repartons de la loi des mailles qui en régime libre s'écrit $u_L + u_R + u_C = 0$. On va essayer de se débarrasser de u_R puis de u_C au profit de u_L. Comme on a $u_R = Ri$ d'une part (soit $i = u_R/R$) et $u_L = L\,\dfrac{di}{dt}$ d'autre part, on en déduit que

$$u_L = \frac{L}{R}\,\frac{du_R}{dt} \qquad \text{soit} \qquad \frac{du_R}{dt} = \frac{R}{L}\,u_L$$

Il va donc falloir dériver la loi des mailles précédente pour faire apparaître une dérivée de u_R que l'on va pouvoir substituer par son expression en fonction de u_L. Ainsi,

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0 \qquad \text{qui se réécrit} \qquad \frac{du_L}{dt} + \frac{R}{L}\,u_L + \frac{du_C}{dt} = 0$$

Reste à s'affranchir du terme en $\dfrac{du_C}{dt}$ que l'on peut déjà remplacer par i/C d'après la loi du condensateur. Par la suite, on doit dériver une fois encore pour faire apparaître $\dfrac{di}{dt}$ de sorte que l'on puisse le remplacer par u_L/L.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_L}{dt} + \frac{R}{L}\,u_L + \frac{i}{C}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{du_L}{dt} + \frac{1}{C}\,\frac{u_L}{L} = 0$$

Correction *S5*.2 Lien portrait de phase/évolution temporelle

Comme on a affaire à trois fois le même oscillateur lancé avec des conditions initiales différentes, il faut s'en remettre aux conditions initiales (ou aux traversée de $z = 0$ qui peuvent aussi servir à différencier les courbes ici). La courbe en trait plein commence avec une vitesse $\dot{z}$ positive, donc la courbe $z(t)$ part vers le haut. C'est donc celle en haut à gauche. En outre, on voit que la courbe pleine ne traverse jamais l'axe $z = 0$ dans le portrait de phase, et c'est la seule évolution temporelle qui a cette caractéristique.

La courbe en tirets commence avec une vitesse $\dot{z}$ négative, donc l'évolution temporelle part vers le bas, ce qui est le cas uniquement de la courbe en bas à droite (qui est aussi la seule à posséder deux annulations de z).

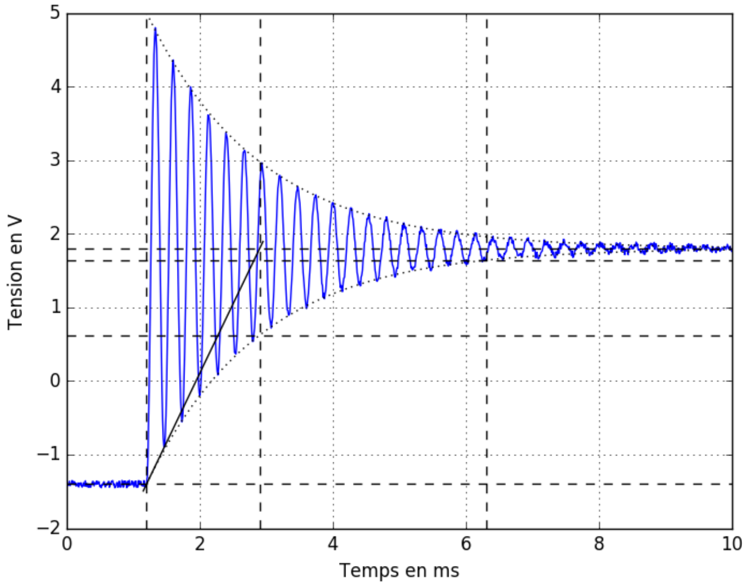
Enfin, la courbe en pointillés démarre avec une vitesse nulle, donc une tangente horizontale. Elle correspond à l'évolution temporelle en bas à gauche (qui ne comporte qu'une intersection avec $z = 0$).

Correction $\mathcal{S}5.3$ Écritures canoniques

Le premier réflexe doit toujours être de remettre ces équations sous forme canonique, c'est-à-dire avec un 1 devant le terme de plus haute dérivée, et tant qu'à faire remettre les éléments dans l'ordre, sinon on ne peut jamais rien identifier correctement. Ensuite, on commence par détecter ω_0 (racine du terme devant la fonction inconnue) et après, il ne reste qu'à regarder le terme devant la dérivée et y injecter la valeur de ω_0 pour en déduire Q. On n'oubliera pas de vérifier que Q est bien sans dimension.

1. $\dfrac{d^2 u_L}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_L}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_L = 0$ soit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
2. $\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{h}{m}\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{k}{m}z = 0$ soit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h}$
3. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{\alpha}{I_\Delta}\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{C}{I_\Delta}\dfrac{d\theta}{dt} = 0$ soit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{I_\Delta}}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{C\,I_\Delta}}{\alpha}$
4. $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + \dfrac{1}{2RC}\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{2LC}i = 0$ soit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{2C}{L}}$

Correction $\mathcal{S}5.4$ Détermination des caractéristiques d'un régime pseudo-périodique



Le signal démarre d'un plancher à $u_0 = -1,4$ V pour atteindre une asymptote à $u_\infty = 1,8$ V. La commutation a lieu à $t_0 = 1,2$ ms. Trois déterminations différentes de τ :

1. 63% du chemin a été effectué lorsque la tension atteint $u_0 + 0,63 \times (u_\infty - u_0) = 0,62$ V, ce qui correspond à un temps $t_0 + \tau = 2,9$ ms soit $\tau = 1,7$ ms.
2. 95% du chemin a été effectué lorsque la tension atteint $u_0 + 0,95 \times (u_\infty - u_0) = 1,6$ V, ce qui correspond à un temps $t_0 + 3\tau = 6,3$ ms soit à nouveau $\tau = 1,7$ ms.
3. Enfin, le tracé de la tangente à droite à la courbe en $t = t_0$ va couper l'asymptote $u_\infty = 1,8$ V lorsque $t = t_0 + \tau = 2,9$ ms, ce qui permet une fois encore de retrouver $\tau = 1,7$ ms.