S04

Circuits linéaires du premier ordre

Partie I

Expérience, cas du RC série

1 Protocole expérimental

Faire un circuit avec un générateur, une résistance et un condensateur.
Parler du problème de masse de l'oscilloscope.
Faire l'expérience en direct.

2 Observations

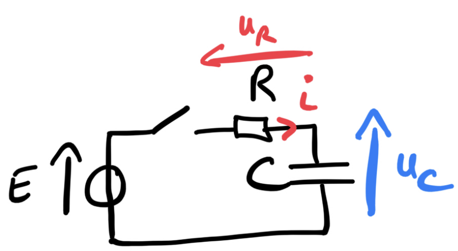
Observations diverses :

- Où s'arrête le transitoire, où commence le permanent ?
- Qu'est-ce qui change quand L ou C varie ?
- Qu'est-ce qui change quand R varie ?
- Pour le montage avec une bobine, montrer le phénomène de division de tension quand la résistance du circuit diminue et qu'on s'approche de la résistance interne de la bobine.

Penser à regarder ce qui est continu et ce qui ne l'est pas en observant les tensions aux bornes de C ou de R.

Partie II

Mise en équation



1 Obtention de l'équation différentielle

Appliquons la loi des mailles pour ce circuit. Il vient, après que l'interrupteur ait été rabattu

$$\mathrm{E} = u_\mathrm{C} + u_\mathrm{R}$$

On a fait attention à mettre condensateur ($i = \mathrm{C}\,\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$) et résistance ($u_\mathrm{R} = \mathrm{R}i$) en convention récepteur pour que les signes soient corrects, de sorte que

$$\boxed{\mathrm{E} = u_\mathrm{C} + \mathrm{R}i = u_\mathrm{C} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}}$$

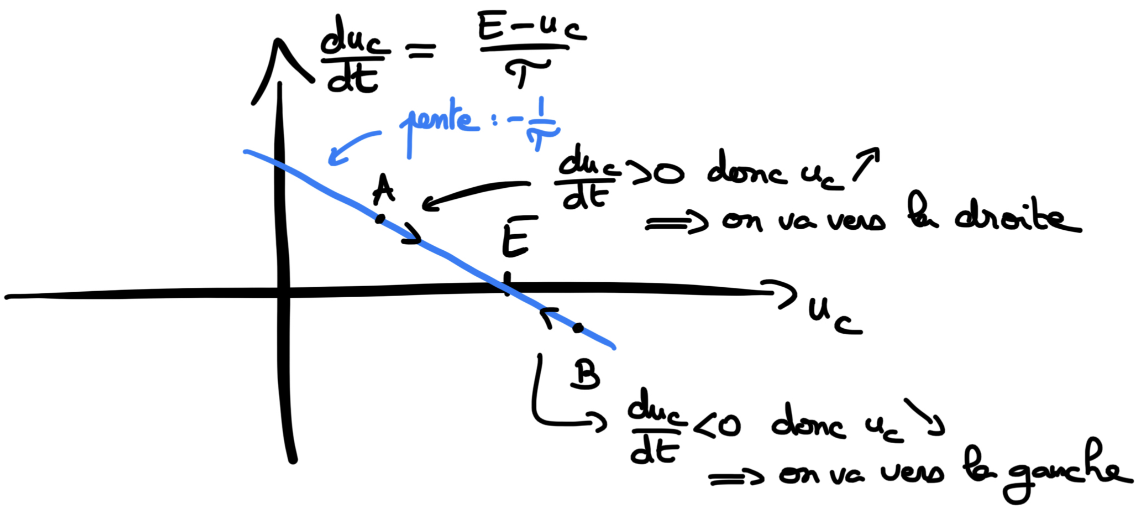
Exercice $\mathcal{S}4.1$ Equation différentielle pour i, RC série

Trouver l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

2 Analyse qualitative, diagramme de phase

Si l'on représente la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u_C, on obtient une droite décroissante puisque

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{RC}} - \frac{u_\mathrm{C}}{\mathrm{RC}}$$



On voit alors sur le schéma que lorsque $u_\mathrm{C} < \mathrm{E}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} > 0$ donc u_C augmente au cours du temps en se dirigeant vers E. Au contraire, lorsque $u_\mathrm{C} > \mathrm{E}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} < 0$ donc u_C diminue au cours du temps pour, là aussi, se rapprocher de E. Le point $u_\mathrm{C} = \mathrm{E}$ est donc un point d'équilibre stable du système différentiel puisque, quel que soit le point de départ, on y tend et on y reste une fois qu'on l'a atteint (si on l'atteint un jour...).

3 Solution analytique générale

Pour résoudre analytiquement cette équation différentielle, il faut prendre en compte deux aspects :

1. L'équation différentielle de départ est une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire qu'elle ne fait intervenir aucune multiplication de la fonction inconnue avec elle-même ou avec ses dérivées. Cet aspect linéaire va être particulièrement important pour trouver facilement tout un ensemble de solutions.
2. L'équation *homogène* (c'est-à-dire celle dont le second membre est nul) associée à notre équation différentielle est à coefficients *constants*, ce qui implique que « l'exponentielle est notre amie » et donc chercher une solution sous la forme $\mathrm{A}\mathrm{e}^{\alpha t}$ va fonctionner comme on va le voir.

Supposons en premier lieu que l'on ait trouvé une solution particulière de notre équation de base. C'est-à-dire une solution, n'importe laquelle, qui marche. Appelons cette solution $u_\mathrm{p}(t)$. Avec un peu de pratique, vous verrez que $u_\mathrm{p}(t) = \mathrm{E}$ est ici un possibilité qui marche. Supposons en outre que l'on ait trouvé une solution $u_\mathrm{h}(t)$ de l'équation homogène. Alors, j'affirme que la fonction $u_\mathrm{tot}(t) = u_\mathrm{p}(t) + u_\mathrm{h}(t)$ est aussi une solution de l'équation différentielle de départ du fait du caractère *linéaire* de celle-ci. En effet, appliquons le premier membre de l'équation différentielle à u_tot. Il vient

$$\begin{aligned} u_\mathrm{tot} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{tot}}{\mathrm{d}t} &= (u_\mathrm{p} + u_\mathrm{h}) + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_\mathrm{p} + u_\mathrm{h}) \\ &= \underbrace{u_\mathrm{p} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\mathrm{E}} + \underbrace{u_\mathrm{h} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_\mathrm{tot} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{tot}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{E}} \qquad \text{cqfd}$$

On a déjà mis en évidence une solution particulière « qui marche », à savoir la solution constante $u_\mathrm{p}(t) = \mathrm{E}$. Il reste à trouver l'expression la plus générale possible des solutions homogène $u_\mathrm{h}(t)$. Essayons de voir si $u_\mathrm{h}(t) = \mathrm{A}\mathrm{e}^{\alpha t}$ pourrait fonctionner. En effet, on a

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t} = \alpha\,u_{\mathrm{h(t)}}$$

de sorte que
$$u_\mathrm{h} + \mathrm{RC}\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t} = (1 + \alpha\,\mathrm{RC})\,u_\mathrm{h} = 0$$

Comme on recherche une solution $u_\mathrm{h}(t)$ non identiquement nulle, c'est donc que la parenthèse doit elle être nulle, ce qui impose $\alpha = -1/\mathrm{RC}$, mais il n'y a pas de contrainte sur le facteur préexponentiel A. Ainsi, la solution totale la plus générale[1] de l'équation différentielle de départ s'écrit

$$\boxed{u_\mathrm{tot} = \mathrm{E} + \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \mathrm{RC}}$$

À noter que le paramètre τ que l'on a introduit se doit d'être homogène à un temps sans quoi l'argument de l'exponentielle ne serait pas sans dimension.

Exercice *S4*.2 Quelques équations différentielles du premier ordre à résoudre

Trouver la solution générale des équation différentielles

1. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\sqrt{\mathrm{R}r}\,\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{E}}{\sqrt{\mathrm{R}r}\,\mathrm{C}}$
2. $i + \dfrac{\mathrm{L}}{r}\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$
3. $m\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \alpha\,z = 0$
4. $\sqrt{\dfrac{m}{k}}\,\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_x = \dfrac{g}{\alpha}$

1. On affirme ici qu'il s'agit de la solution la plus générale, la démonstration parfaitement rigoureuse de cette affirmation sera donnée en cours de maths.

4 Application des conditions initiales

Le mathématicien est souvent satisfait de la solution précédente, mais pour le physicien, ce n'est pas suffisant. En effet, pour un problème donné, l'évolution temporelle est unique et n'est pas « au choix » de la constante A. Il faut donc chercher la solution qui vérifie à la fois l'équation différentielle précédente *et* les conditions initiales du problème posé. Ici, on considère que le condensateur est initialement chargé avec une tension u_0 à $t = 0^-$. Or, la tension étant continue aux bornes d'un condensateur[2], on a

$$u_C(0^+) \overset{\text{continuité}}{=} u_C(0^-) \overset{\text{cond. init.}}{=} u_0$$

Astuce

On peut d'ores et déjà remarquer que pour trouver *une* condition initiale, il faut imvoquer *une* condition de continuité. Au chapitre suivant, on verra que dans la même veine, pour résoudre des équations qui nécessitent *deux* conditions initiales, il faudra invoquer *deux* conditions de continuité dans le circuit.

Or, on a une expression analytique pour $u_C(t)$ qui est la solution générale précédente et notamment on peut calculer $u_C(0) = E + Ae^{-0/\tau} = E + A$. On en déduit $A = u_0 - E$, soit

$$\boxed{u_C(t) = E + (u_0 - E)\,e^{-t/\tau} = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + u_0\,e^{-t/\tau}}$$

Astuce

Avec un peu de « bouteille » dans l'art de résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients et second membre constants, on peut voir que la solution s'écrira toujours

$$u(t) = u_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + u_0\,e^{-t/\tau}$$

où u_∞ est la solution particulière constante vers laquelle tend naturellement le système en régime permanent. On voit que cette solution vérifie bien l'équation différentielle (elle s'écrit u_∞ plus une exponentielle décroissante) tout en vérifiant la condition initiale (u_∞ « disparaît » à $t = 0$ alors que u_0 se retrouve multiplié par 1).

Si la condition « initiale » n'est pas donnée en $t = 0$ mais en $t = t_0$ par exemple, il suffit de se ramener à 0 en posant $t' = t - t_0$ et on obtient alors

$$u(t) = u_\infty\left(1 - e^{-t'/\tau}\right) + u_0\,e^{-t'/\tau} = u_\infty\left(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}\right) + u_0\,e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Exercice S4.3 Application de conditions initiales

Résoudre les équations différentielles de l'exercice précédent avec pour conditions « initiales »

1. $u(0) = V_0$
2. $i(t_0) = 2E/R$
3. $z(T) = h$
4. $v_x(0) = v_0$

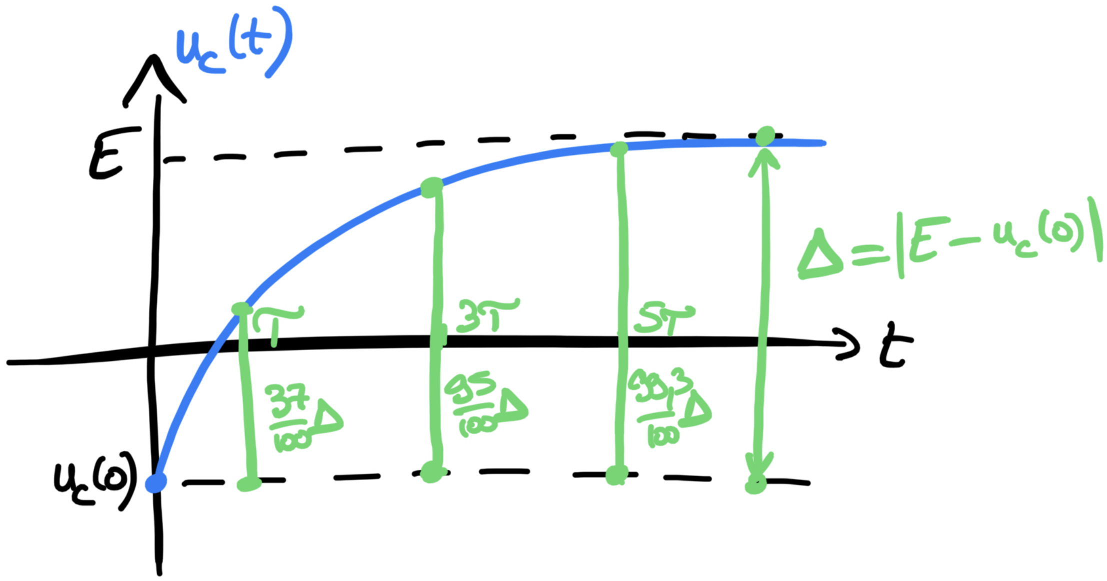
2. Il faut toujours invoquer un argument de continuité pour obtenir la ou les conditions initiales vérifiées à $t = 0^+$.

5 Notion de régime transitoire

Les solutions présentées précédemment ont un comportement commun : si l'on compare l'écart de la solution à son asymptote à l'instant t avec cet écart à l'instant initial, le ratio ne dépend absolument pas de la condition initiale utilisée. En d'autres termes, si on prend l'expression générale pour la tension, alors le résultat ne doit pas dépendre de la constante A qui est déterminée à partir des conditions initiales. Regardons plus particulièrement

$$\frac{u_{\mathrm{tot}}(t) - \mathrm{E}}{u_{\mathrm{tot}}(0) - \mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E} + \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{E}}{\mathrm{E} + \mathrm{A} - \mathrm{E}} = \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Ce rapport représente l'écart relatif de la solution à son asymptote par comparaison à l'écart initial et sa valeur ne dépend que de l'instant t où l'on regarde et de la constante τ que l'on va nommer « temps caractéristique du système ». En particulier, en traçant le graphique et en calculant les valeurs de l'exponentielle pour $t = \tau$, 3τ, 5τ, on remarque que



$\mathrm{e}^{-\tau/\tau}$	$\mathrm{e}^{-3\tau/\tau}$	$\mathrm{e}^{-5\tau/\tau}$
37%	5,0%	0,67%

On remarque que si au bout d'un temps $t = \tau$, on a déjà parcouru 63% du trajet (il reste 37% à faire), au bout de 3τ, 95% du boulot est déjà fait et au bout de 5τ, plus de 99% du trajet est parcouru. C'est pourquoi, si on veut être précis à 5%, on dit que le régime permanent est atteint au bout de 3τ et si on veut être vraiment précis (à moins de 1% près), on attend jusqu'à 5τ.

6 Méthode de la tangente

Le temps caractéristique peut se calculer comme indiqué précédemment :

— c'est le temps au bout duquel on a fait 63% du chemin à l'asymptote (d'où que l'on parte)

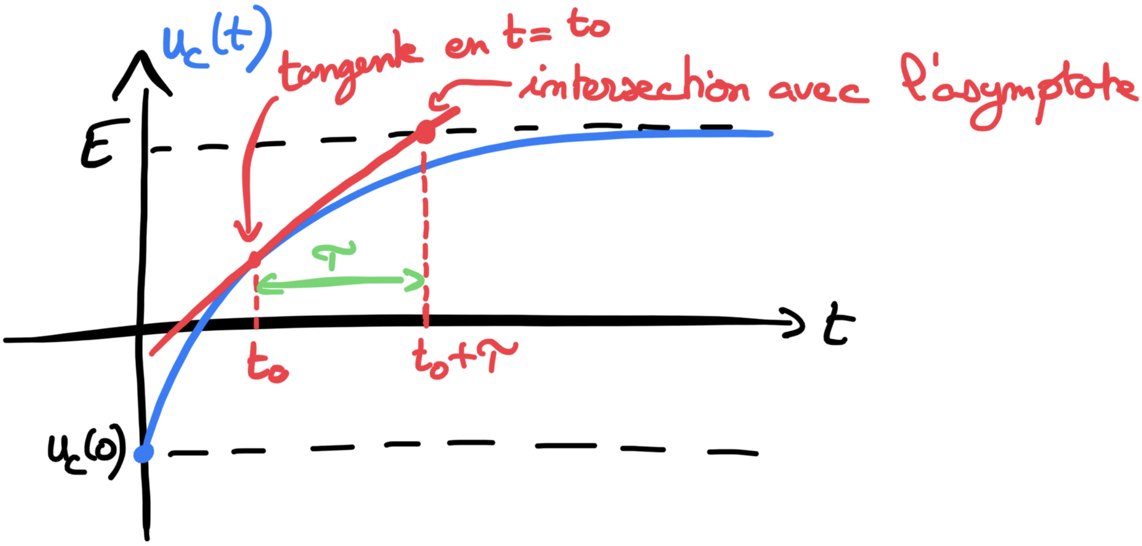
— *ou* le tiers du temps au bout duquel on a 95% du chemin à l'asymptote (d'où que l'on parte)

— *ou* le cinquième du temps au bout duquel on a 99,3% du chemin à l'asymptote (d'où que l'on parte).

Cela demande néanmoins de faire quelques calculs et tracer quelques intersections avec des chances de se tromper lors des calculs (en particulier lorsque le point de départ ne vaut pas 0 comme dans le cas le plus souvent rencontré et qu'on finit par reproduire sans réfléchir). Il existe donc une autre méthode, bien plus

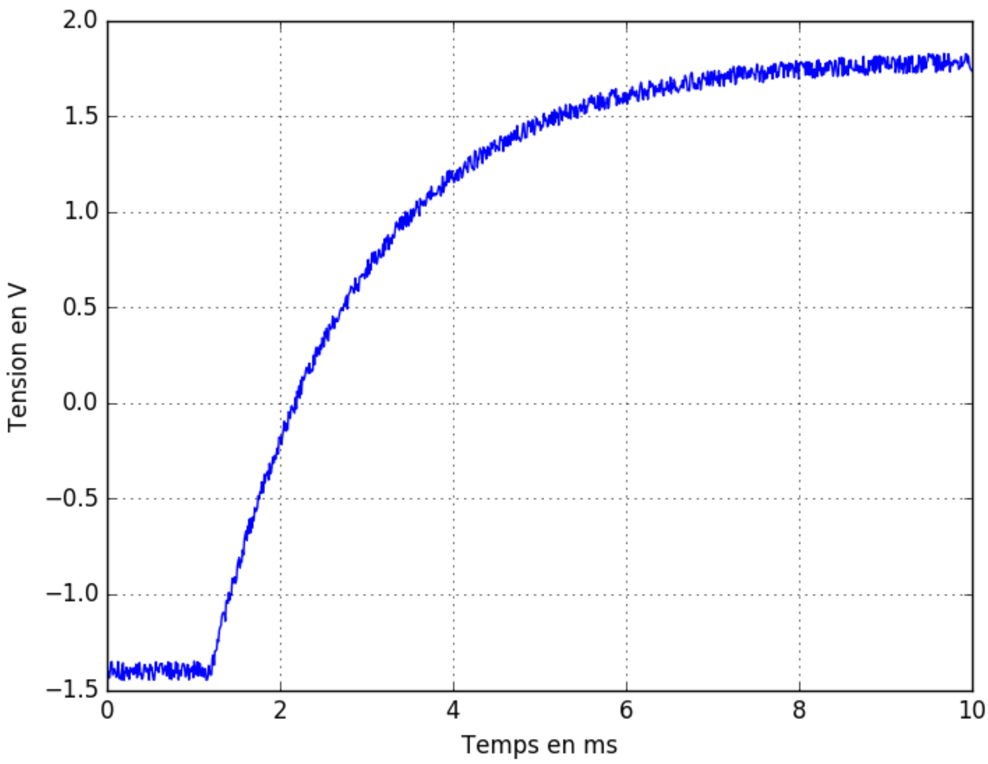
« graphique » qui consiste à choisir un point[3] disons à un temps $t = t_0$ et de tracer la tangente à la courbe à cette date. Alors, la tangente va croiser l'asymptote[4] en un temps t_1 tel que

$$\boxed{t_1 - t_0 = \tau}$$



Exercice S4.4 Détermination d'un temps caractéristique

Déterminer, par plusieurs méthodes différentes de préférence, le temps caractéristique associé aux mesures suivantes lors de la commutation d'un condensateur d'un régime permanent vers une autre.



3. Quelconque a priori, mais pour lequel on choisit souvent $t_0 = 0$ par commodité s'il est disponible.
4. Attention, il faut bien regarder l'asymptote qui, la plupart du temps (sauf dans l'exemple archi-classique du cours, bien sûr...) diffère de l'échelon de tension appliqué sur le système.

7 Analyse énergétique

Pour éviter de se perdre dans des calculs infâmes, nous allons nous restreindre ici au cas où $u_0 = 0$, c'est-à-dire au cas d'un condensateur initialement déchargé. Dans ce cas, on a

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad q = Cu_C = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{et} \qquad i = C\,\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}$$

On va calculer d'une part l'énergie fournie par le générateur et d'autre part celles reçues par le condensateur et par la résistance pour finalement montrer qu'il y a bien *conservation de l'énergie* lors de cette évolution. L'énergie fournie par le générateur s'écrit

$$\int_0^t \mathscr{P}_{\text{géné}}\,dt = \int_0^t E \times i\,dt = \int_0^t E \times \frac{dq}{dt} \times dt = \int_{q(0)}^{q(t)} E\,dq = E\left(q(t) - q(0)\right) = CE^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} CE^2$$

D'autre part, le condensateur stocke une énergie

$$\int_0^t \mathscr{P}_{\text{cond}}\,dt = \left[\frac{1}{2}C{u_C}^2(t')\right]_0^t = \frac{1}{2}CE^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2}CE^2$$

Finalement, la résistance reçoit une énergie donnée par

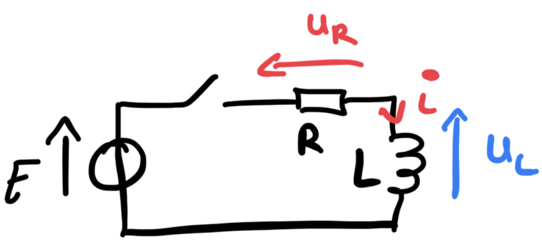
$$\int_0^t \mathscr{P}_R\,dt = \int_0^t Ri^2(t)\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^t e^{-2t/\tau}\,dt = \frac{CE^2}{2}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2}CE^2$$

On voit que, à la fois à l'instant t ou quand t tend vers l'infini, l'énergie fournie par le générateur est égale à la somme des énergies reçues par le condensateur et la résistance. En outre, on se rend compte que quelle que soit la manière de charger le condensateur, on aura toujours la moitié de l'énergie fournie par le générateur qui aura été dissipée par la résistance...

Partie III

Rebelote avec un autre système

On va prendre un cas où la condition initiale n'est pas directement donnée par la condition de continuité, comme par exemple l'évolution de la tension aux bornes d'une bobine réelle.



1 Équation différentielle

L'application de la loi des mailles donne, pour $t \geqslant 0$,

$$E = u_R + u_L = Ri + u_L$$

Or, on sait que u_L s'écrit $$u_L = L\frac{di}{dt} + ri$$

u_L est le gentil dans l'histoire et le méchant, c'est i. Comme on aime bien les histoires qui finissent bien, il faut rendre le méchant gentil, c'est-à-dire se débrouiller pour qu'il ne s'exprime qu'en fonction de quantités gentilles. En particulier, la loi des mailles permet d'isoler i en fonction de u_{L} (gentil), E et R (constantes connues) de sorte que

$$i = \frac{\mathrm{E} - u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{R}} \qquad i \text{ est donc devenu gentil.}$$

On remplace alors dans l'expression de u_{L} pour obtenir

$$u_{\mathrm{L}} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{E} - u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{R}}\right) + \frac{r}{\mathrm{R}}\,(\mathrm{E} - u_{\mathrm{L}}) = -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{\mathrm{R}}\,(\mathrm{E} - u_{\mathrm{L}}) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_{\mathrm{L}}\left(1 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right) + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{\mathrm{R}}\,\mathrm{E}}$$

Exercice *S4*.5 Équation différentielle pour u_{R}

Trouver l'équation différentielle donnant l'évolution de la tension u_{R} aux bornes de la résistance dans le circuit précédent.

---

2 Analyse qualitative

On essaie à nouveau de représenter $\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u_{L} et on obtient ici

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\left[\frac{r}{\mathrm{R}}\,\mathrm{E} - u_{\mathrm{L}}\left(1 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right)\right]$$

Il s'agit d'une droite décroissante qui coupe l'axe des abscisses en $u_{\mathrm{L}} = r\mathrm{E}/r + \mathrm{R}$. On en déduit que :

— lorsque $u_{\mathrm{L}} < r\mathrm{E}/(r+\mathrm{R})$, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} > 0$ donc u_{L} augmente au cours du temps vers le point de coupe ;

— lorsque $u_{\mathrm{L}} > r\mathrm{E}/(r+\mathrm{R})$, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} < 0$ donc u_{L} diminue au cours du temps vers le point de coupe.

— Le point $u_{\mathrm{L}} = r\mathrm{E}/(r+\mathrm{R})$ est donc un attracteur pour les solutions de cette équation : il s'agit de la valeur en régime permanent.

3 Solution générale

L'analyse qualitative a montré que la solution constante $u_{\mathrm{L}} = \dfrac{r}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E}$ était une solution particulière de l'équation différentielle. Il reste à trouver une solution de l'équation homogène

$$u_{\mathrm{L}}\left(1 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right) + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{soit} \qquad u_{\mathrm{L}} + \tau\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\mathrm{L}}{r+\mathrm{R}}$$

La structure mathématique de l'équation est exactement la même que celle de la section précédente ! Il suffit de mettre celle-ci sous forme « canonique », c'est-à-dire d'identifier le coefficient τ pour se ramener à ce qu'on a déjà fait plus haut, à savoir que la solution homogène pourra s'écrire $\mathrm{A}\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec A un réel quelconque. La solution générale de l'équation totale s'écrit donc

$$\boxed{u_{\mathrm{L}}(t) = \frac{r}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E} + \mathrm{A}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Exercice *S4*.6 Solution générale

Donner la solution générale de l'équation différentielle sur $u_{\mathrm{R}}(t)$.

---

4 Condition initiale

La solution du problème physique recherché doit, en plus de vérifier l'équation différentielle, vérifier aussi la condition initiale. Ici, il faut rechercher ce que vaut $u_{\mathrm{L}}(0^+)$. Dans le circuit, la présence d'une bobine impose la continuité du courant dans la branche principale, soit

$$i(0^+) \overset{\text{continuité}}{=} i(0^-) \overset{\text{int. ouv.}}{=} 0$$

On peut alors écrire la loi des mailles à $t = 0^+$ pour voir que la condition initiale recherchée s'écrit

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}i(0^+) + u_{\mathrm{L}}(0^+) = u_{\mathrm{L}}(0^+)$$

D'autre part, l'expression générale $u_{\mathrm{L}}(t)$ prise en $t = 0$ donne que

$$u_{\mathrm{L}}(0) = \frac{r}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E} + \mathrm{A} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{A} = \mathrm{E} - \frac{r}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E} = \frac{\mathrm{R}}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E}$$

et finalement

$$\boxed{u_{\mathrm{L}}(t) = \frac{r}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E} + \frac{\mathrm{R}}{r+\mathrm{R}}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}+r}}$$

Exercice *S4*.7 Conditions initiales

Appliquer les condition initiales pour trouver l'évolution complète de $u_{\mathrm{R}}(t)$ pour notre circuit.

5 Notion de régime transitoire

L'expression précédente a exactement la même structure que celle de la section précédente, donc on retrouve naturellement la notion de temps caractéristique τ tel qu'au bout de 3τ l'écart à l'asymptote ne soit plus que 5% de l'écart initial et au bout de 5τ, cet écart a chuté à moins de 1% de l'écart initial.

6 Analyse énergétique

Concernant l'analyse énergétique, il ressort du fait que le courant tende vers une constante (valant $\mathrm{E}/(\mathrm{R}+r)$) dans le circuit que l'énergie dissipée par la résistance est non bornée (tant qu'il y a du courant, il y a dissipation d'énergie qui devient de plus en plus importante car la puissance dissipée ne tend jamais vers 0) et donc, malgré le caractère borné de l'énergie stockée dans la bobine, le générateur fournit une énergie infinie si on le laisse branché pendant un temps infini. Contrairement au condensateur (où au moins une partie de l'énergie donnée se retrouvait dans le condensateur), la bobine n'est pas un bon moyen de stocker de l'énergie sur le long terme.

Correction S4.1 Equation différentielle pour i, RC série

Repartons des équations de base. La loi d'Ohm $u_R = Ri$ remplacée dans la loi des mailles $E = u_C + u_R$ permet s'isoler $u_C = E - Ri$. Il suffit alors de remplacer dans la loi fondamentale du condensateur pour obtenir

$$i = C\,\frac{du_C}{dt} = C\,\frac{d}{dt}(E - Ri) = -RC\,\frac{di}{dt} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i + RC\,\frac{di}{dt} = 0}$$

Correction S4.2 Quelques équations différentielles du premier ordre à résoudre

Avec à chaque fois A une constante réelle à déterminer plus tard, on a

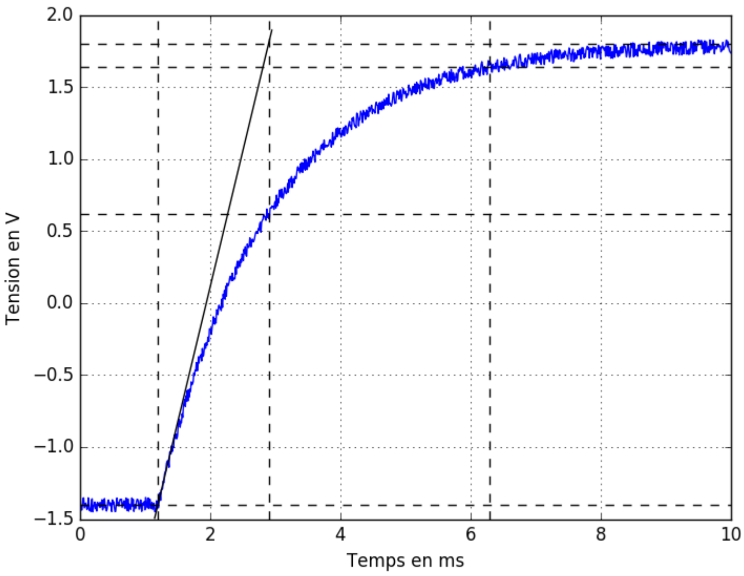
1. $u(t) = E + A\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \sqrt{Rr}\,C$
2. $i(t) = \dfrac{E}{R} + A\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{L}{r}$
3. $z(t) = A\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$
4. $v_x(t) = \dfrac{g}{\alpha} + A\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Correction S4.3 Application de conditions initiales

1. $u(t) = E + (u_0 - E)\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \sqrt{Rr}\,C$
2. $i(t) = \dfrac{E}{R} + \dfrac{E}{R}\,e^{-(t-t_0)/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{L}{r}$
3. $z(t) = h\,e^{-(t-T)/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$
4. $v_x(t) = \dfrac{g}{\alpha} + \left(v_0 - \dfrac{g}{\alpha}\right)e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Correction S4.4 Détermination d'un temps caractéristique

Le signal démarre d'un plancher à $u_0 = -1,4$ V pour atteindre une asymptote à $u_\infty = 1,8$ V. La commutation a lieu à $t_0 = 1,2$ ms. Trois déterminations différentes de τ :



1. 63% du chemin a été effectué lorsque la tension atteint $u_0 + 0,63 \times (u_\infty - u_0) = 0,62$ V, ce qui correspond à un temps $t_0 + \tau = 2,9$ ms soit $\tau = 1,7$ ms.
2. 95% du chemin a été effectué lorsque la tension atteint $u_0 + 0,95 \times (u_\infty - u_0) = 1,6$ V, ce qui correspond à un temps $t_0 + 3\tau = 6,3$ ms soit à nouveau $\tau = 1,7$ ms.
3. Enfin, le tracé de la tangente à droite à la courbe en $t = t_0$ va couper l'asymptote $u_\infty = 1,8$ V lorsque $t = t_0 + \tau = 2,9$ ms, ce qui permet une fois encore de retrouver $\tau = 1,7$ ms.

Correction $\mathcal{S}4.5$ Équation différentielle pour u_{R}

On utilise le fait que $u_{\mathrm{R}} = \mathrm{R}i$, de sorte que u_{L} s'écrive

$$u_{\mathrm{L}} = \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} + \frac{r}{\mathrm{R}}\,u_{\mathrm{R}}$$

La loi des mailles donne alors directement

$$\boxed{\mathrm{E} = u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{R}}\left(1 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right) + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t}}$$

Correction $\mathcal{S}4.6$ Solution générale

Sous forme canonique, l'équation trouvée précédemment s'écrit, en multipliant les deux membres par R/L,

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{R}+r}{\mathrm{L}}\,u_{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{L}}$$

d'où l'on déduit que τ vaut $\dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}+r}$ et on peut remarque que $\mathrm{ER}/(\mathrm{R}+r)$ est une solution particulière constante, d'où la solution générale

$$\boxed{u_{\mathrm{R}}(t) = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{E} + \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}+r}}$$

Correction $\mathcal{S}4.7$ Conditions initiales

À $t = 0$, on a vu que la partie idéale de la bobine se comportait comme un coupe-circuit puisque le courant était précédemment nul. Ainsi, la tension initiale au borne de la résistance R est nécessairement nulle donc $u_{\mathrm{R}}(0^+) = 0$. L'exercice précédent a permis d'obtenir $u_{\mathrm{R}}(t)$ sous la forme

$$u_{\mathrm{R}}(t) = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{E} + \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}+r}$$

avec A une constante à déterminer en fonction de la condition initiale. Comme cette expression doit aussi être valable à $t = 0^+$, on en déduit

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{E} + \mathrm{A} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{A} = -\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{E}$$

Finalement,

$$\boxed{u_{\mathrm{R}}(t) = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+r}\,\mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}+r}}$$