S03

Circuits électriques dans l'ARQS

Ce chapitre est le premier d'une série concernant l'électricité. Il s'agit aussi du premier dans lequel on va définir un certain nombre de régles d'utilisations et tout le but du chapitre et des suivants sera d'être capable d'utiliser ces règles à bon escient pour comprendre les phénomènes à l'œuvre dans les circuits électriques. Contrairement aux chapitres précédents où l'on a principalement poser quelques relations *ex nihilo* et ensuite utilisé ces relations, ici nous poserons quelques axiomes de base et à partir de ces axiomes, nous serons capable de construire une théorie entière et auto-cohérente qui n'aura pas à chercher de justifications dans des considérations qui dépassent la portée de ce cours. On pourra donc y apporter un raisonnement mathématique rigoureux du début à la fin et quasiment tout maîtriser dans ses moindres recoins.

Partie I

Modélisation du problème

1 Charges électriques, courant, tension

L'étude de la matière a montré qu'au niveau microscopique, elle était constituée de particules « élémentaire » qu'on ne pouvait (aisément) briser que sont les protons, les neutrons et surtout les électrons. Si on a montré depuis que les protons étaient constitués de « quelque chose » (les quarks) bien qu'il ne soit pas possible d'observer l'un de ses « quelque chose » séparément, les électrons conservent leur caractère « insécable ». Il n'existe donc pas d'unité plus petite de charge électrique, tout objet contient un nombre entier de charges élémentaires

$$\boxed{e = 1,6.10^{-19}\ \mathrm{C}}$$

les électrons ayant une charge[1] $-e$ et les protons une charge e.

On sépare les matériaux en plusieurs catégories en ce qui concerne l'électricité :

Les conducteurs : sont des matériaux contenant des particules chargées susceptibles de se mettre en mouvement. Ils peuvent être solides (généralement des métaux avec des électrons restant libres de se déplacer après l'établissement des liaisons métalliques, $n \approx 10^{22}$ particules/cm^3) ou liquides (on parle d'électrolytes où ce sont les ions positifs on négatifs qui seront les vecteurs du courant électrique).

Les semi-conducteurs : contiennent bien moins de particules chargées mobiles ($n \approx 10^{10}$ particules/cm^3) mais si on les chauffe, le nombre de particules mobiles augmente, de même que la conductivité (voir plus tard le concept de thermorésistance). Ils ont néanmoins la possibilité d'être « dopés » : on rajoute des impuretés dans le cristal et cela augment le nombre de particules chargées mobiles, soit des électrons, soit des « trous électroniques » qui sont comme des charges positives.

1. Il faut néanmoins se méfier, certains énoncés pouvant poser $e = -1,6.10^{-19}$C plutôt que son opposé.

Les isolants : ne laissent pas passer le courant électrique... dans une certaine mesure. Il existe toujours un point, appelé « tension de claquage » où un isolant peut se retrouver à conduire le courant électrique comme l'air claque lors du passage d'un éclair lors d'un orage.

Mesurer un courant électrique revient à mesurer la charge qui passe au travers d'une frontière par unité de temps. Cela revient à compter le nombre d'électrons passant la frontière par unité de temps et multiplier par la charge d'un électron. On a alors

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -e \times \frac{\mathrm{dN_e}}{\mathrm{d}t}}$$

Grand problème de convention électrique (voir `https://xkcd.com/567/`), même si le courant électrique est induit par le déplacement des électrons, la définition précédente compte le passage d'un électron dans un sens comme le passage d'une charge positive dans l'autre sens : le courant indique le sens de parcours des charges positive donc courant électrique et débit électronique seront toujours opposés en signe comme l'atteste l'apparition du signe négatif dans la formule précédente.

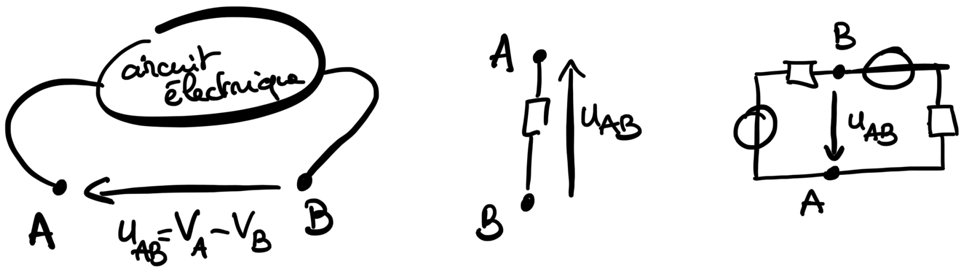
Calculons la vitesse moyenne d'un électron dans un fil de section S parcouru par un courant I. Les électrons pouvant traverser la section S durant l'instant dt sont tous situés à moins d'une distance $v\mathrm{d}t$ de la surface, donc dans un volume $\mathrm{S}v\mathrm{d}t$. Ainsi, il y en a $\mathrm{dN_e} = n \times \mathrm{S}v\mathrm{d}t$ qui vont traverser la section durant dt. En divisant par la durée dt, on obtient

$$\mathrm{I} = -e\,\frac{\mathrm{dN_e}}{\mathrm{d}t} = -en\mathrm{S}v \qquad \text{soit} \qquad v = -\frac{\mathrm{I}}{en\mathrm{S}} = 0,62\ \mathrm{mm/s}$$

en prenant $\mathrm{I} = 1,0$ A, $n = 1,0.10^{22}$ cm^{-3} et $\mathrm{S} = 1,0$ mm^2. Si le signal du déplacement électronique se déplace vite, la vitesse moyenne des électrons, elle, est plutôt faible...

Une tension quant à elle est une différence de potentiel entre deux points :

$$\boxed{u_{\mathrm{AB}} = \mathrm{V_A} - \mathrm{V_B} = \mathrm{V_{pointe}} - \mathrm{V_{queue}}}$$



C'est cette différence de potentiel électrique (que l'on assimilera plus tard à une différence d'énergie potentielle électrique) qui va forcer les électrons à se déplacer des zones de bas potentiel vers les zones de haut potentiel (car la charge $q = -e$ d'un électron est négative et que l'énergie potentielle s'écrit $\mathrm{E_{p,élec}} = q\mathrm{V}$ et que les électrons cherchent à minimiser leur énergie potentielle). Ainsi, au contraire des électrons, le courant aura tendance à circuler des zones de haut potentiel vers les zones de bas potentiel tout comme une rivière a tendance à couler de la montagne (haut potentiel gravitationnel) vers la plaine (bas potentiel gravitationnel).

2 ARQS : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires

Prenons un circuit ouvert dans lequel se trouve un générateur de tension. Lors de la fermeture de l'interrupteur, les électrons, comme des voitures à un feux qui devient tout juste vert, vont mettre un « certain temps » avant de commencer à circuler. Plus exactement, le premier électron de la file va emprunter le chemin, mais le suivant suivra avec un petit retard, et ainsi de suite jusqu'à ce que le mouvement ait pu s'amorcer dans tout le circuit et se soit transmis à tous les électrons.

L'Aproximation des Régimes Quasi-Stationnaire stipule qu'en tout point d'une branche d'un circuit la mesure du courant électrique instantané donne le même résultat. C'est un peu comme si toutes les voitures se mettaient à avancer « comme un seul homme » dès que le feu passe au vert. C'est presque vrai, mais néanmoins, il faut que l'information sur la fermeture du circuit ait pu atteindre tous les coins du circuit et cette information ne peut pas se propager à plus de la vitesse de la lumière dans le vide (limite imposée par la théorie de la Relativité), elle respecte donc gentiment les limitations. Pour un circuit de taille caractéristique L, il faut donc un temps $\tau = \mathrm{L}/c$ pour que le circuit soit mis « au courant » qu'il y a eu un changement quelque part. Tant que les évolutions des paramètres du circuit se font sur un temps caractéristiques T très grand devant τ, on pourra considérer que les changements sont (quasi-)instantanés en tout point du circuit et que le courant est le même en tout point d'une même branche. La condition d'application de l'ARQS s'écrit

$$\mathrm{T} \gg \tau = \frac{\mathrm{L}}{c} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{L}f \ll c}$$

avec $f = 1/\mathrm{T}$ la fréquence du signal considéré en considérant la période T comme le temps caractéristique d'évolution des paramètres du circuit. Pour un signal en TP dont la fréquence ne dépassera pas $f = 1$ MHz, il faudrait un circuit de longueur $\mathrm{L} = c/f = 300$ m pour que l'effet soit sensible, ce qui ne sera jamais le cas. En revanche, pour le réseau à 50 Hz, la longueur critique est de 6000 km, ce qui peut commencer à poser des souci de synchronisation à l'échelle européenne ou d'un bout à l'autre des États-Unis.

3 Ordres de grandeur divers

En TP, nous allons souvent manipuler des tensions de quelques volts à quelques dizaines de volts (rarement plus de 30) pour des courants montant jusqu'à l'ampère mais plus généralement de l'ordre du milliampère. Il est bon de savoir que la dose létale de courant admissible pendant une seconde est de l'ordre de 50 mA, mais avec une résistance interne d'au moins 1 kΩ, le courant qui vous traverserait sous une tension de 30 V devrait au plus être de 30 mA (tout de même suffisant pour tuer s'il était appliqué directement au cœur...). On aura l'occasion en TP de manipuler des systèmes nécessitant quelques ampères pour fonctionner, mais il faudra utiliser des alimentations dites « stabilisées » qui permettent de tenir la charge car ce n'est pas le cas des alimentations usuellement présentes sur la table de TP.

L'alimentation du secteur a une tension efficace de 230 V et le courant au travers d'un sèche-cheveu « classique » à 1 kW est du coup de l'ordre de 5 A en valeur efficace : à manipuler avec précaution... De même, si vous mettez les doigts dans la prise, c'est cette fois-ci du 200 mA qui risque de vous traverser : il vaut mieux éviter, surtout si vous êtes sujet à des problèmes cardiaques...

Dans les lignes moyennes tension entre les maison, il y a du 20000 V, dans les lignes hautes tension, c'est du 200000 V quand aux lignes très hautes tension, elles peuvent monter jusqu'à 2 millions de volts.

4 Puissance

La puissance électrique se mesure en watts (W) et est homogène au produit d'une tension par un courant (ainsi qu'à une énergie par unité de temps). En convention récepteur (voir plus bas), la puissance instantanée *reçue* par le dipôle considéré vaut

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{reçue}}(t) = u_{\text{récepteur}}(t) \times i(t)}$$

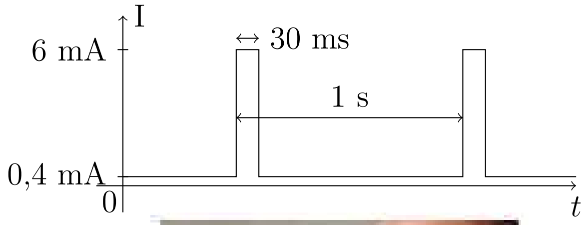
En convention générateur (on change le signe de u OU i), c'est la puissance *donnée* par le dipôle (de signe opposé à la puissance reçue) qui s'écrit $u \times i$.

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{fournie}}(t) = u_{\text{générateur}}(t) \times i(t)}$$

Exercice $\mathcal{S}3$.1 Bilan de puissance en régime non sinusoïdal

Dans un réveil électromécanique alimenté par une pile de $1,5$ V, à oscillateur à quartz (électro-) mais à affichage à aiguilles (-mécanique), de prix modéré, l'aiguille avance par sauts brusques espacés exactement de une seconde (à la précision de l'oscillateur à quartz).

L'évolution de l'intensité du courant débité par l'alimentation du réveil varie au cours du temps et présente l'allure indiquée sur la figure ci-contre. L'impulsion de courant correspond à l'avancement d'un cran de l'aiguille.



1. Évaluer la puissance maximale absorbée par le réveil puis la puissance minimale ainsi que la puissance moyenne.
2. Le réveil est alimenté avec la batterie rechargeable ci-contre. Estimer la durée de fonctionnement du réveil.

5 Vocabulaire

Quelques points de vocabulaire peuvent être utiles pour commencer.

Nœud : Point de jonction d'au moins trois fils.

Branche : Partie d'un circuit entre deux nœuds consécutifs.

Maille : Ensemble de branches constituant un contour fermé que l'on peut parcourir en ne passant qu'une fois par chaque nœud.

Série : Deux dipôles seront dits en série s'ils appartiennent à une même branche, c'est-à-dire qu'ils seront forcément parcourus par le même courant.

Parallèle : Deux dipôles seront dits en parallèle si leurs bornes respectives sont reliées deux à deux directement par un fil. Deux dipôles en parallèles partagent forcément la même tension à leurs bornes puisque la borne d'un dipôle est par construction au même potentiel que la borne associée de l'autre dipôle.

6 Loi des mailles, loi des nœuds

La loi des mailles découle directement de la définition des tensions. Considérons une maille ABCA. Alors, on a par définition

$$u_{\mathrm{AB}} + u_{\mathrm{BC}} + u_{\mathrm{CA}} = \mathrm{V_A} - \mathrm{V_B} + \mathrm{V_B} - \mathrm{V_C} + \mathrm{V_C} - \mathrm{V_A} = 0$$

car les différents potentiels se neutralisent deux à deux. Ainsi la somme orientée des tensions vaut toujours 0 :

$$\boxed{\sum_{\text{même sens}} u_i = 0}$$

Une autre manière de le voir est de séparer les tensions qui font tourner la maille dans le sens direct de celles qui la font tourner dans le sens indirect. On a alors

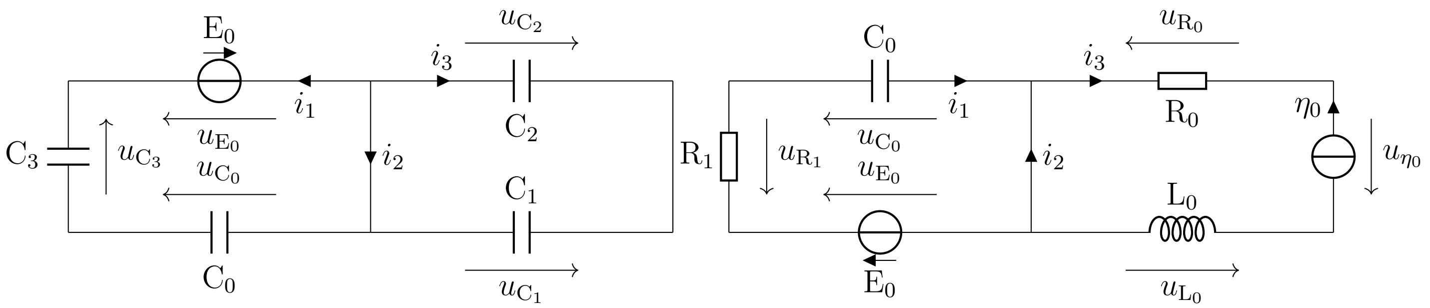
$$\boxed{\sum_{\text{sens direct}} u_i = \sum_{\text{sens indirect}} u_j}$$

En fonctionnement normal, lors d'une séparation d'autoroutes, il y a autant de voitures qui arrivent sur l'embranchement que la somme des voitures partant sur chaque nouvelle branche autoroutière. Pour les électrons, c'est absolument pareil : lors d'un embranchement, la somme des électrons arrivant sur le nœud est égale à la somme des électrons qui en repartent car ils ne peuvent pas s'accumuler à un endroit particulier (du moins pas en fonctionnement « normal » d'un circuit électrique). Le postulat de la conservation de la charge implique donc la loi des nœuds qui stipule que

$$\boxed{\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}}$$

Exercice S3.2 Loi des mailles, loi des nœuds

Écrire les lois des nœuds et les lois des mailles sur les exemples suivants



7 Histoires de conventions

En électricité, on peut utiliser deux types d'orientations conventionnelles :

la convention générateur : où les flèches de la tension aux bornes du dipôle et de l'intensité du courant traversant le dipôle sont orientées dans le même sens. On utilise généralement cette convention pour les générateurs qui, s'ils sont « dominant » vont avoir tendance à « pousser » le courant dans le sens indiqué par leur tension.

la convention récepteur : où les flèches de u et i sont de sens contraires. On l'utilise généralement pour tous les dipôle récepteurs, c'est-à-dire qui reçoivent effectivement de la puissance du circuit.

Néanmoins, il n'y a aucune nécessité. On peut très bien mettre un générateur en convention récepteur et vice-versa. Cela aura une importance dans le chapitre suivant où les relations courant/tension ne sont valables que dans une certaine convention. Si on utilise l'autre, cela revient à changer l'un ou l'autre de signe dans les relations précédentes (donc généralement introduire un moins dans la relation pour les dipôles linéaires usuels).

Exercice S3.3 Histoires de conventions

Reprendre les schémas électriques de l'exercice S3.2 et donner les conventions dans lesquelles se trouvent chaque dipôle.

Partie II

Dipôle linéaires usuels

Dans cette partie, nous allons présenter les différents dipôles linéaires usuels, c'est-à-dire ceux que l'on rencontre le plus souvent dans les circuits, et on s'attachera tout particulièrement à énoncer leurs relations électriques fondamentales, c'est-à-dire la manière dont la tension u à leurs bornes et l'intensité i du courant les traversant sont reliés. Les dipôles[2] en question sont dits linéaires car les relations les reliant ne font

2. C'est-à-dire constitué de deux bornes ou pôles.

intervenir que des relations linéaires (ou affines) entre u et i, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais de produits u^2, i^2 ou ui qui apparaissent dans ces relations.

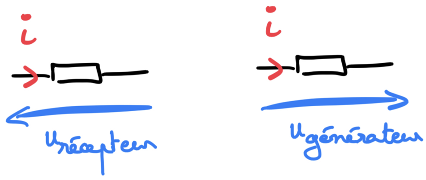
En outre, tout bon électronicien doit connaître les ordres de grandeurs usuels des composants qu'il utilise de manière à pouvoir détecter des erreurs d'ordre de grandeur (souvent causées par des inversion multiplication/division) dans les résultats calculés.

1 Résistance

a) Représentation et relation u/i

Un résistor de résistance R se modélise dans un circuit par un simple rectangle[3]. En convention récepteur, la relation u/i du résistor s'écrit

$$\boxed{u_{\text{récepteur}} = \mathrm{R}i}$$



Pour passer en convention générateur, il suffit de changer le sens de la flèche de tension par exemple de sorte que

$$\boxed{u_{\text{générateur}} = -u_{\text{récepteur}} = -\mathrm{R}i}$$

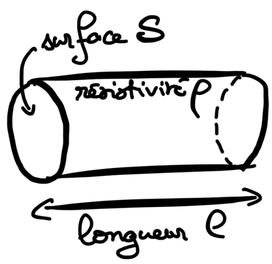
Il faut donc veiller à bien orienter le dipôle en convention récepteur si on a le choix ou alors prendre garde à la convention utilisée si jamais l'énoncé a choisi pour vous. Le coefficient de proportionnalité R entre u et i s'appelle la « résistance » du résistor. Elle s'exprime en ohm (Ω). On définit aussi la conductance $\mathrm{G} = 1/\mathrm{R}$ qui s'exprime en siemens (S) et permet d'écrire la relation u/i facilement dans l'autre sens :

$$\boxed{i = \mathrm{G}u_{\text{récepteur}}}$$

Les valeurs typiques des résistances d'un circuit varient de quelques ohm (Ω) à quelques mégaohm (MΩ). Néanmoins, les composants usuels ont des valeurs de l'ordre du kiloohm (kΩ). Il faudra connaître d'autres ordres de grandeurs concernant les résistances internes de divers matériels comme un générateur (50 Ω), un fil ($0,1$ Ω), un ampèremètre (qq Ω), un voltmètre ou un oscilloscope (1 à 10 MΩ).

b) En pratique

En pratique, une résistance est consitituée d'un matériau conducteur qui possède une certaine « résistivité » ρ qui s'exprime en Ω.m. Cette résistivité est une propriété *intrinsèque* du matériau (c'est-à-dire qu'elle ne dépend que du matériau et pas de sa géométrie) alors que la résistance dépend de la géométrie du tronçon considéré.



3. Attention, c'est aussi le symbole d'un dipôle générique, il faut donc toujours s'assurer qu'il s'agisse bien d'un résistor, c'est-à-dire que l'on fournisse la valeur de la résistance avec.

La résistivité d'un matériau traduit sa propension à s'opposer au passage du courant. Considérons un conducteur cylindrique de longueur ℓ et de section S. Plus le matériau est long (plus ℓ est grand), plus il va avoir tendance à s'opposer au passage du courant, la résistance doit donc être proportionnelle à ℓ. Au contraire, plus le matériau est large (plus S est grand), plus il sera facile au courant de circuler. Cette dernière propriété est assez facile à considérer si l'on considère le courant comme un flux de voiture et le résistor comme un tronçon d'autoroute : si une voie de l'autoroute permet de faire passer 100 voitures par minutes, alors le même tronçon d'autoroute sur lequel on ouvre 3 voies permet de faire passer $300 = 3\times 100$ voitures par minute. La résistance devra donc être inversement proportionnelle à S. Au final, on se retrouve avec l'expression

$$\boxed{\mathrm{R} = \rho\,\frac{\ell}{\mathrm{S}}}$$

qui traduit parfaitement les remarques précédentes.

Exercice $\mathscr{S}3$.4 Section d'un fil en TP

Connaissant l'ordre de grandeur de la taille et de la résistance d'un fil en TP, en déduire une estimation de sa section. On donne la résistivité $\rho = 1,7.10^{-8}$ Ω.m du cuivre.

c) Puissance

On peut aisément calculer la puissance reçue par un dipôle résistif en fonction uniquement de i ou u et de la valeur de la résistance R. En effet, en convention récepteur, on a

$$\boxed{\mathscr{P}_{\text{reçue}} = u_{\text{récepteur}} \times i = \mathrm{R}i \times i = \mathrm{R}i^2 = \mathrm{R} \times \frac{u^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{u^2}{\mathrm{R}}}$$

où l'on remarque que quels que soient les signes de u ou i, la puissance reçue par le résistor est toujours positive. À noter que, à courant constant, la puissance est proportionnelle à la résistance alors qu'à tension constante, elle est inversement proportionnelle à R.

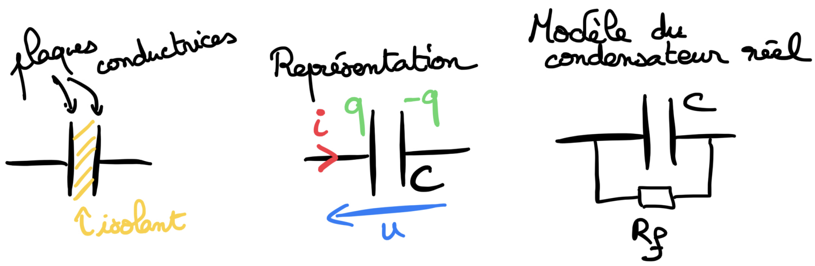
Exercice $\mathscr{S}3$.5 Optimisation de puissance

On branche une résistance R et une résistance r en série d'un générateur idéal de f.é.m. E. Quelle est la puissance reçue par R exprimée uniquement en fonction de E, r et R ? Comment choisir R pour que la valeur précédente soit maximale à r fixé ?

2 Condensateur

a) Représentation

Un condensateur est constitué de deux plaques métalliques séparées par un isolant. La représentation graphique reproduit donc logiquement cet état de fait.



Le courant électrique apporte des charges positives d'un côté (car les électrons en partent) et des charges négatives de l'autre (car les électrons s'y déposent).

b) Lois fondamentales

La charge électrique q que l'on peut séparer de cette façon est proportionnelle à la barrière de potentiel que l'on place entre les deux plaques métallique donc, incidemment, à la tension aux bornes du condensateur. En plaçant la point de la flèche du côté où l'on a définit la charge $+q$ du condensateur (l'autre plaque ayant une charge $-q$ pour que le tout reste électroneutre), on a la relation fondamentale

$$\boxed{q = \mathrm{C}u}$$

où C est la capacité du condensateur qui s'exprime en farad (F) est possède de « petites » valeurs, c'est-à-dire que l'on trouve des capacités allant du picofarad (pF) jusqu'au microfarad (μF) avec le gros de la troupe autour de 10 ou 100 nF. Il est possible de trouver en TP des condensateurs (imposants !) de quelques millifarad, mais si une application numérique donne plusieurs farad ou kilofarad, c'est assurément qu'elle est fausse ou que vous êtes en train de considérer un site industriel important...

Exercice *S3*.6 Calculs de capacités

Une charge de $q = 27\ \mu$C se dépose sur un condensateur chargé sous une tension $u = 3,0$ V.

1. Quelle est la capacité C associée au condensateur ?
2. Le condensateur est en fait constitué de trois condensateurs montés en parallèle dont on connaît les valeurs $\mathrm{C}_1 = 1,0\ \mu$F et $\mathrm{C}_2 = 4,7\ \mu$F. Que vaut C_3 ?

En plaçant le condensateur en convention récepteur, c'est-à-dire avec i qui pointe vers la plaque contenant la charge $+q$, le courant amène bien la charge sur la plaque et le débit de charge est donné par

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

Attention !

Si vous orientez le courant comme partant de la plaque portant la charge q (ce qui reviendra à se placer en convention générateur en conservant la même convention pour placer q et u), alors tout naturellement, vous aurez

$$\boxed{i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

ce qui changera naturellement le signe de la relation suivante.

En combinant les relations $q = \mathrm{C}u$ (attention à l'emplacement de q par rapport à l'orientation de u) et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ (attention là encore à l'orientation), on obtient, en supposant la capacité C indépendante du temps,

$$\boxed{i_{\text{récepteur}} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

Exercice *S3*.7 Loi u/i du condensateur

Reprendre les schémas de l'exercice *S3*.2 et écrire des liens u/i pour les différents condensateurs.

c) Continuité

Les électrons ne peuvent pas se « volatiliser » des plaques métalliques mais doivent partir au fur et à mesure. Certes, la charge évolue au niveau fondamental de manière discontinue (un électron à la fois), mais à notre échelle, ces petits sauts sont entièrement lissés, de sorte que les variations semblent parfaitement continues. La fonction $q(t)$ est donc continue, de même que la fonction $u(t) = q(t)/\mathrm{C}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La tension est continue aux bornes d'un condensateur}}$$

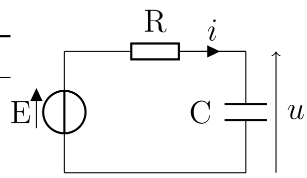
On peut s'en souvenir aisément à l'aide d'un argument (futur) du cours de mathématiques. Vous verrez que toute fonction dérivable est nécessairement continue, or l'écriture $i = \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ montre que la fonction u est dérivable puisque le courant (physique) i existe, ce qui permet de se rappeler que c'est la tension u qui est continue dans un condensateur.

d) Comportement asymptotique

En régime « continu » (c'est-à-dire en régime permanent constant), toutes les grandeurs du circuit tendent vers des constantes, or si la tension u tend vers une constante [4], c'est que sa dérivée tend vers 0.

$$\boxed{\text{Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime continu.}}$$

Exercice $\mathcal{S}3$.8 Comportement asymptotique du condensateur parfait



Déterminer $u(0)$, $i(0)$, $u(\infty)$ et $i(\infty)$ dans le circuit ci-contre en supposant le condensateur initialement chargé avec une charge q_0.

e) Modèle du condensateur réel

En réalité, un condensateur chargé que l'on débranche d'un circuit ne reste pas chargé indéfiniment car l'isolant qui sépare les deux plaques n'est jamais parfaitement isolant et peut se modéliser comme un résistor de très forte résistance (appelée « résistance de fuite ») placé en parallèle du condensateur. Cette résistance de fuite est de l'ordre de 100 MΩ à 1 GΩ, de sorte qu'elle est souvent très difficile à mesurer et mettre en évidence. Le modèle du condensateur parfait est donc le plus souvent applicable sans se soucier de cette imperfection.

Exercice $\mathcal{S}3$.9 Comportement asymptotique du condensateur réel

Reprendre l'exercice précédent avec un condensateur réel.

f) Considérations énergétiques

Considérons un condensateur parfait initialement déchargé (donc par convention contenant une énergie initialement nulle). La puissance reçue par ce dipôle s'exprime via le produit ui en convention récepteur, de sorte que

$$\mathscr{P}_{\text{reçue}} = u \times i = \mathrm{C}\, u\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

L'énergie $\mathrm{d}\mathscr{E}$ reçue pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ s'écrit $\mathrm{d}\mathscr{E} = \mathscr{P}_{\text{reçue}}\,\mathrm{d}t$. De sorte que l'énergie totale stockée depuis l'instant initial vaille

4. On peut construire une fonction mathématique continue qui tende vers une constante sans que sa dérivée ne tende vers 0, mais ce ne sont pas des cas que l'on peut rencontrer en pratique en physique...

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(t) - \mathscr{E}(0) = \int_{t'=0}^{t} \mathrm{d}\mathscr{E} = \int_{t'=0}^{t} \mathscr{P}_{\text{reçue}}\,\mathrm{d}t' = \int_{t'=0}^{t} \mathrm{C}\,u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_{u=0}^{u(t)} \mathrm{C}\,u\,\mathrm{d}u$$

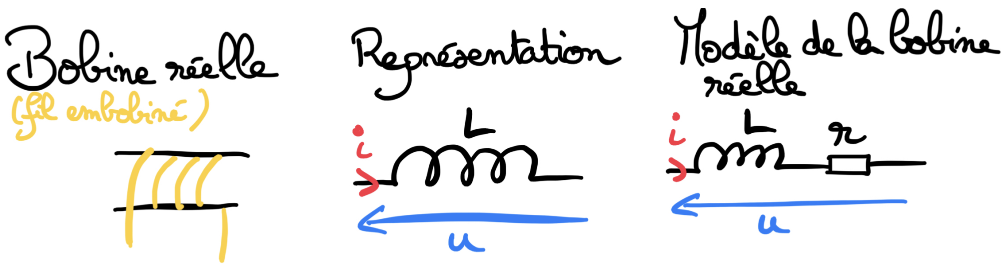
Finalement, $$\boxed{\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}u^2(t)}$$

Le condensateur stocke de l'énergie sous forme électrique en séparant les charges sur ses plaques. Une fois remis dans un circuit sans autre générateurs, ces charges vont vouloir retourner en place et font donc circuler un courant dans le reste du circuit pour rétablir l'équilibre électrique entre les deux plaques.

3 Inductance

a) Représentation

Une bobine est constitué d'un fil embobinné de nombreuses fois autour d'un support, d'où une représentation simulant les boucles que le fil fait en s'enroulant autour de son support.



b) Loi fondamentale

La bobine est le symétrique du condensateur concernant sa relation fondamentale : on a en convention récepteur

$$\boxed{u_{\text{récepteur}} = \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

avec L l'inductance de la bobine qui s'exprime en henry (H). Les valeurs typiques des inductances en TP s'échelonnent de 1 mH jusqu'à 1 H (très rarement plus, en tous cas pas pour des objets « usuels »). La plupart du temps, la valeur « typique » est de l'ordre de 100 mH.

Exercice $\mathcal{S}3$.10 Loi fondamentale pour la bobine

Écrire la loi fondamentale (sans erreur de signe) pour la bobine de l'exercice $\mathcal{S}3$.2.

c) Continuité

Tout comme le condensateur, la bobine admet aussi une condition de continuité. On ne peut pas le justifier proprement à ce stade de vos connaissances, mais par analogie avec le condensateur, puisque c'est le courant traversant la bobine qui semble être dérivable, c'est lui qui doit être continu au travers d'une bobine et donc au travers de tout dipôle présent dans la même branche que la bobine.

$$\boxed{\text{Le courant } i \text{ traversant une bobine reste continu au cours du temps.}}$$

La bobine n'acceptera pas que l'on coupe brutalement le courant dans sa branche et va « pousser » pour qu'il continue à circuler, quitte à provoquer une étincelle appelée « étincelle de rupture » dans le circuit au niveau de l'interrupteur.

d) Comportement asymptotique

À l'inverse du condensateur, en régime continue, quand i tend vers une valeur constante, c'est la tension au bornes de la bobine qui tend vers 0 :

$$\boxed{\text{En régime continu, la bobine se comporte comme un fil.}}$$

ce qu'elle est d'ailleurs puisqu'il ne s'agit que d'un fil enroulé avec une certaine géométrie.

Exercice $\mathcal{S}3$.11 Comportement asymptotique de la bobine parfaite

Remplacer le condensateur de l'exercice $\mathcal{S}3$.8 par une bobine parfaite initialement parcourue par un courant i_0 et reprendre les mêmes questions.

e) Modèle de la bobine réelle

Contrairement au condensateur, le modèle de la bobine réelle n'est en général pas négligeable devant les autres composants du circuit. Pour pouvoir embobinner le fil de manière efficace pour former une bobine, la longueur de fil utilisé devient rapidement importante et la résistance des fils n'est plus négligeable. On modélise donc une bobine réelle par une bobine parfaite à laquelle on rajoute une résistance interne r (de l'ordre de la dizaine d'ohm souvent) ajoutée en série. Bien sûr, cette résistance est en fait répartie sur l'ensemble de la longueur de la bobine de sorte que la borne entre la bobine parfaite et la résistance interne n'est pas accessible à la mesure (on ne peut pas séparer physiquement les deux termes), mais le comportement mathématique est similaire au cas séparable.

La relation fondamentale de la bobine réelle s'écrit alors en convention récepteur

$$\boxed{u = \mathrm{L}\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri}$$

On reconnaît dans un circuit une bobine réelle d'une bobine parfaite par le fait que l'on précise à côté de l'inductance la notation que l'on utilisera pour la résistance interne de la bobine.

Exercice $\mathcal{S}3$.12 Comportement asymptotique de la bobine réelle

Reprendre l'exercice précédent avec le modèle de la bobine réelle.

f) Considérations énergétiques

On va suivre la même démonstration que pour le condensateur pour déterminer l'énergie stockée dans une bobine en admettant que par convention l'énergie stockée est nulle lorsqu'aucun courant ne traverse la bobine. La puissance reçue par ce dipôle s'exprime ui en convention récepteur, de sorte que

$$\mathscr{P}_{\text{reçue}} = u \times i = \mathrm{L}\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

L'énergie $\mathrm{d}\mathscr{E}$ reçue pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ s'écrit $\mathrm{d}\mathscr{E} = \mathscr{P}_{\text{reçue}}\,\mathrm{d}t$. De sorte que l'énergie totale stockée depuis l'instant initial vaille

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(t) - \mathscr{E}(0) = \int_{t'=0}^{t} \mathrm{d}\mathscr{E} = \int_{t'=0}^{t} \mathscr{P}_{\text{reçue}}\,\mathrm{d}t' = \int_{t'=0}^{t} \mathrm{L}\,i\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_{i=0}^{i(t)} \mathrm{L}\,i\,\mathrm{d}i$$

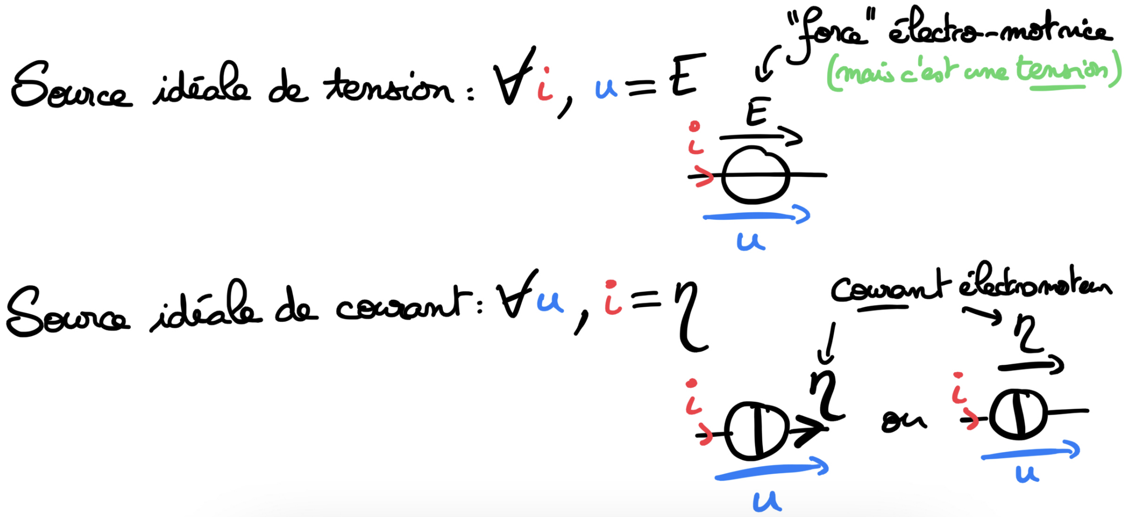
Finalement,

$$\boxed{\mathscr{E}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}i^2(t)}$$

La bobine stocke de l'énergie sous forme magnétique (on verra comment dans le cours d'induction de fin d'année) lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique.

4 Sources linéaires

a) Sources idéales de tension et de courant

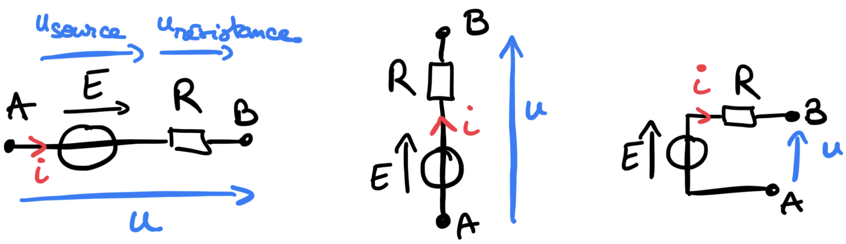


Il existe deux types de sources idéales : les sources de tension et les sources de courant. La première impose une certaine tension à ses bornes quel que soit le courant qui la traverse, la seconde impose un certain courant dans sa branche quelle que soit la tension à ses bornes. Les schémas des deux types de sources montrent le comportement des sources quand on les « passive » ou qu'on les « éteint » : en effet, une source de tension éteinte revient à imposer une tension nulle à ses bornes et se transforme ainsi en fil alors qu'une source de courant « éteinte » revient à imposer un courant nul dans sa branche et est donc équivalente à un interrupteur ouvert.

NB : il est assez évident que deux sources de tension se somment bien en série alors que les sources de courant se somment bien en parallèle (faire un schéma et réfléchir deux secondes).

b) Générateurs de Thévenin

Un générateur de Thévenin est constitué d'une source idéale de tension en série avec une résistance. On l'utilise principalement pour modéliser des générateurs linéaires (dans une certaine gamme d'utilisation) comme celui dont la caractéristique est donnée ci-dessous.



La relation courant/tension pour un générateur de Thévenin se retrouve aisément à condition de se choisir clairement les orientations au préalable. Plaçons-nous en convention globale générateur. On a alors

$$u = u_{\text{source}} + u_{\text{résistance}}$$

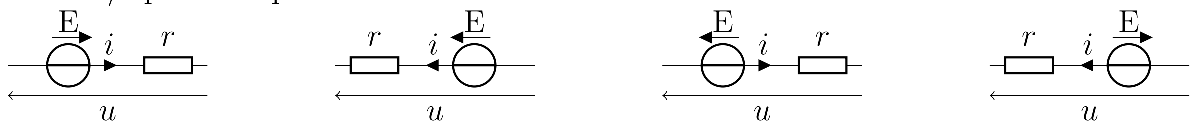
Or, la résistance est placée ici en convention générateur, donc $u_{\text{résistance}} = -\mathrm{R}i$ et la source produit bien sûr la tension $u_{\text{source}} = \mathrm{E}$, de sorte que la relation u/i s'écrit finalement

$$\boxed{u = \mathrm{E} - \mathrm{R}i}$$

> Selon la manière de disposer les élément et de définir les tensions et courants, on aurait tout aussi bien pu obtenir $\mathrm{E} + \mathrm{R}i$, $-\mathrm{E} + \mathrm{R}i$ ou $-\mathrm{E} - \mathrm{R}i$...

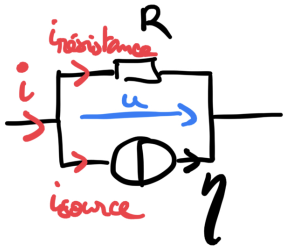
Exercice $\mathcal{S}3$.13 Différentes conventions, Thévenin

Trouver le lien u/i pour les quatre schémas suivants.



c) Générateurs de Norton

Le générateur de Norton est le dual du générateur de Thévenin : on prend un générateur de courant (et non de tension) en parallèle (et non en série) avec une résistance R. Là encore, les choix d'orientation sont primordiaux pour déterminer la bonne relation entre u et i. Prenons les orientations suivantes :



Plutôt qu'utiliser l'additivité des tension en série, on utilise l'additivité des courants dans un nœud (loi des nœuds) pour écrire

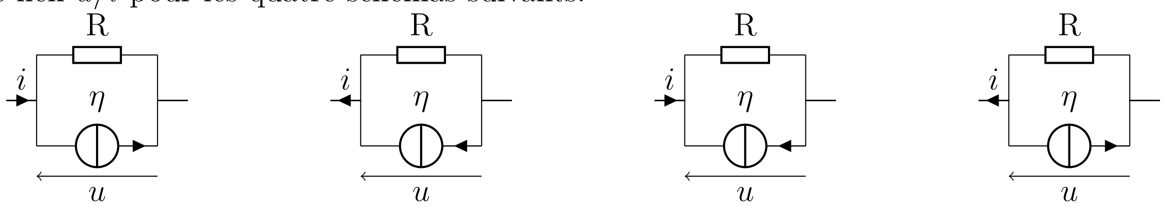
$$i = i_{\text{source}} + i_{\text{résistance}}$$

On a bien sûr $i_{\text{source}} = \eta$ par définition et ici la résistance est en convention générateur donc $u = -\mathrm{R}i_{\text{résistance}}$. On obtient finalement

$$\boxed{i = \eta - \frac{u}{\mathrm{R}}}$$

Exercice $\mathcal{S}3$.14 Différentes conventions, Norton

Trouver le lien u/i pour les quatre schémas suivants.



d) Passage Thévenin/Norton

Le résultat de l'exercice suivant ne fait pas stricto-sensu partie du cours, mais c'est un résultat à retenir au cas où l'examinateur aurait oublié qu'il ne faut pas forcément l'utiliser directement.

Partie III

Associations de résistances et raccourcis

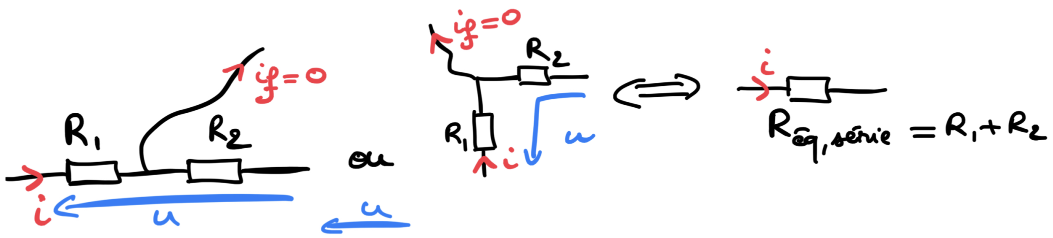
Nous allons dans cette partie établir un certain nombre de raccourcis utiles que l'on pourra utiliser *à chaque fois que les hypothèses nécessaires s'appliquent.*

Exercice $\mathcal{S}3$.15 Passage Thévenin/Norton

Montrer que pour qu'un générateur de Thévenin $(\mathrm{E}, \mathrm{R}_1)$ soit équivalent à un générateur de Norton (η, R_2) (en prenant garde que les flèches correspondant à E et η pointent dans la même direction) alors forcément on doit avoir égalité des résistances $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$, notée R et le lien

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{R}\eta}$$

1 Association en série



Si l'on considère deux résistances en série, alors l'additivité des tensions donne que

$$u = u_1 + u_2$$

Par définition, les deux résistances étant en série, elles sont traversées par le même courant. De ce fait, on a $u_1 = \mathrm{R}_1 i$ et $u_2 = \mathrm{R}_2 i$ (ayant pris soin de se placer en convention récepteur). Alors

$$u = (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)\, i$$

L'association en série de deux résistances est équivalente du point de vue électrique à une seule résistance $\mathrm{R}_{\text{éq,série}}$ vérifiant la loi d'Ohm et telle que

$$\boxed{\mathrm{R}_{\text{éq,série}} = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}$$

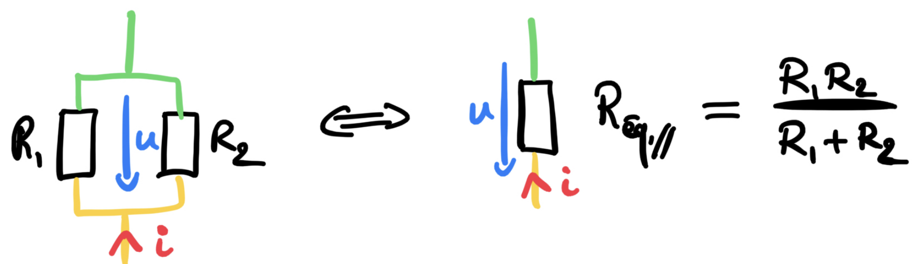
On généralise facilement le procédé, soit directement, soit par réccurence à l'association de n résistances en série qui sont équivalentes à une seule de valeur

$$\boxed{\mathrm{R}_{\text{éq,série}} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_k}$$

Exercice $\mathcal{S}3$.16 Mesure de résistance : voltmètre englobant

Quelle résistance mesure-t-on vraiment en utilisant $u = \mathrm{R}i$ quand on prend la tension aux bornes de l'ensemble {R+ampèremètre} ? Quand est-ce problématique ?

2 Association en parallèle



L'association en parallèle marche exactement de la même manière mais en considérant l'additivité des courants sur les branches en parallèles plutôt que celle des tensions dans le branchement en série. En effet, on a sur le schéma

$$i = i_1 + i_2$$

Or les deux résistances partagent la même tension (car en parallèles) et sont en outre en convention générateur, de sorte que $i_1 = u/\mathrm{R}_1 = \mathrm{G}_1 u$ et $i_2 = u/\mathrm{R}_2 = \mathrm{G}_2 u$. Ainsi,

$$i = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) u = (\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2)\, u = \mathrm{G}_{\text{éq},/\!/} u$$

L'ensemble des deux résistances se comporte en tout point comme un résistor de conductance $\mathrm{G}_{\text{éq},/\!/}$ valant

$$\boxed{\mathrm{G}_{\text{éq},/\!/} = \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 = \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}}$$

Lorsqu'on se restreint à deux résistances, on pourra préférer rester en terme de résistance et retenir que

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{R}_{\text{éq},/\!/}} = \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{R}_{\text{éq},/\!/} = \frac{\mathrm{R}_1 \mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}}$$

dont l'expression est symétrique et bien homogène.

La généralisation à n résistances en parallèle ne peut se faire que sur l'expression des conductances (les mises sous même dénominateur devenant de plus en plus pénibles...) et donne

$$\boxed{\mathrm{G}_{\text{éq},/\!/} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{G}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{R}_k}}$$

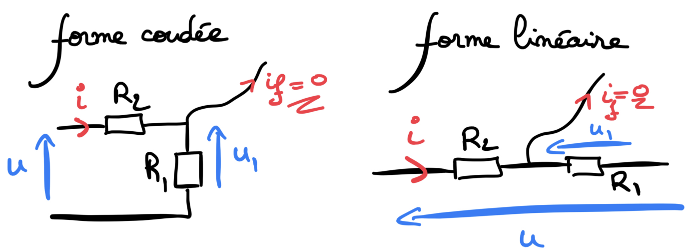
Exercice $\mathcal{S}3$.17 Mesure de résistance : ampèremètre extérieur

Quelle résistance mesure-t-on vraiment en utilisant $u = \mathrm{R}i$ quand on branche l'ampèremètre en série de l'ensemble $\{\mathrm{R}/\!/\text{voltmètre}\}$? Quand est-ce problématique ?

3 Diviseur de tension

Les configurations des diviseurs de tension ou de courant (voir paragraphe suivant) sont très courantes en pratique et permettent de déterminer très rapidement certaines expressions en s'affranchissant des intermédiaires. En outre, elles permettent d'avoir un intuition sur ce qui se passe au niveau des tensions et des courants que l'on retrouve dans un circuit donné.

Commençons par considérer l'association de deux résistances R_1 et R_2 *en série*. On impose une tension u aux bornes de l'ensemble et on désire remonter à la tension u_1 qui se retrouve aux bornes de la résistance R_1. On se débrouille bien sûr pour tout mettre en convention récepter pour ne pas avoir de surprises (il suffira de s'y ramener à la main si jamais l'énoncé en a décidé autrement)



Le courant circulant dans l'ensemble des deux résistances en *série* est celui qui circule dans une résistance $R_1 + R_2$ à laquelle on applique une tension u, c'est-à-dire

$$i = \frac{u}{R_1 + R_2}$$

Or, par loi d'Ohm en convention générateur, on a $u_1 = R_1 i$, d'où directement

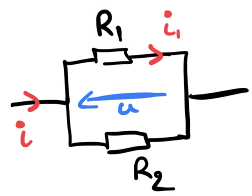
$$\boxed{u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,u}$$

On se rend compte que seule une fraction (proportionnelle à la résistance R_1) de la tension totale u se retrouve aux bornes de la résistance u_1. C'est pourquoi on dit fréquemment que « la tension se retrouve aux bornes de l'isolant » dont la résistance tend vers l'infini et sera donc le seul à avoir une tension non nulle dans le groupe constituant le circuit. On voit aussi que la tension prélevée par les fils est négligeable tant que la résistance des fils est négligeable devant les autres résistances du circuit.

On peut aisément généraliser la démonstration à n résistances placées en parallèle pour obtenir

$$\boxed{u_1 = \frac{R_1}{\sum\limits_{k=1}^{n} R_k}\,u}$$

4 Diviseur de courant



Le diviseur de courant est le dual du diviseur de tension pour les branchement en parallèle. Comme pour l'association de résistances en parallèle, il sera préférable de travailler avec les conductances plutôt qu'avec les résistances. Considérons donc deux résistances R_1 et R_2 en parallèle l'une de l'autre. La tension u aux bornes de cet agencement parallèle est relié au courant global i par la relation démontrée précédemment lorsque l'on met deux résistances en parallèle :

$$i = (G_1 + G_2)\,u \qquad \text{soit} \qquad u = \frac{i}{G_1 + G_2}$$

Or, le courant i_1 traversant la première résistance est reliée à la même tension u (qui est aussi la tension aux bornes de R_1) via $i_1 = G_1 u$, soit

$$\boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\,i}$$

Le courant i_1 est une fraction du courant total proportionnelle à la *conductance* du résistor, c'est-à-dire que le courant sera d'autant plus intense que le résistor conduit mieux l'électricité, ce qui explique que lors d'un « court-circuit » où l'on place un fil de résistance quasi-nulle donc de conductance quasi-infini en parallèle d'un autre dipôle, le courant « préfère » prendre le chemin le plus facile pour lui, c'est-à-dire celui du fil.

La génération à n résistor en parallèle fait à nouveau appel à la conductance et s'obtient facilement en suivant la démonstration précédente :

$$\boxed{i_1 = \frac{G_1}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k}\,i}$$

Partie IV

Caractéristique de dipôles

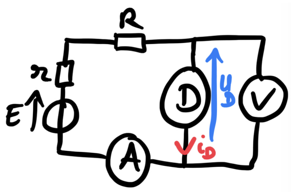
1 Définition

On appelle « caractéristique » d'un dipôle une représentation graphique de la relation entre la tension u à ses bornes et l'intensité i du courant qui le traverse (lorsqu'on applique cette tension u). Parfois, on étend cette définition à la relation u/i elle-même, qu'on l'écrire $u = f(i)$ ou $i = g(u)$. Souvent, la caractéristique est la représentation graphique de i en fonction de u mais l'inverse se trouve aussi.

Notons que lors du tracé de cette caractéristique, il faut porter attention aux conventions utilisées car inverser l'un des deux axes ne laisse en général pas la caractéristique invariante.

2 Étude pratique

Pour déterminer la caractéristique d'un dipôle, il est nécessaire de mesurer à la fois le courant qui le traverse et la tension à ses bornes. On peut utiliser le circuit suivant où l'on peut soit changer la valeur de la f.é.m. E du générateur, soit modifier la résistance R variable pour induire des changements de tension au bornes du dipôle et de courant dans l'unique branche.

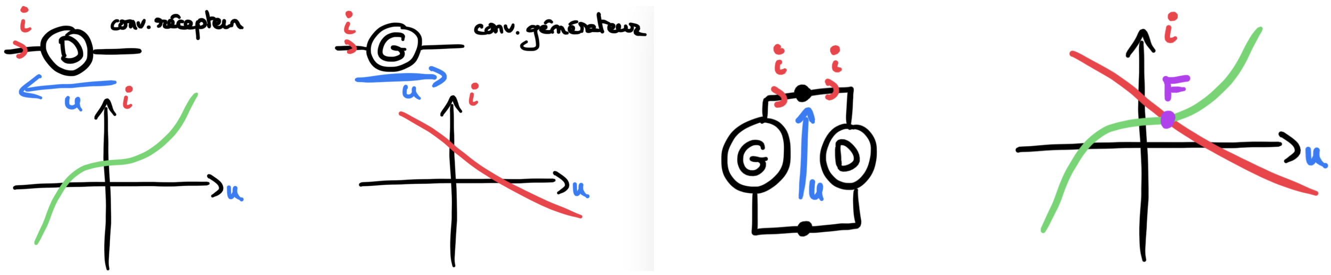


Le positionnement du voltmètre (en parallèle du dipôle) et de l'ampèremètre (en série du dipôle) permet de mesurer la tension u à ses bornes ainsi que le courant i qui y circule à chaque fois que l'on change E ou R. Il s'agit d'un montage extrêmement simple mais ô combien classique lors des TP des concours et souvent boudé par les candidats pour une raison étrange (peut-être que cela semble trop simple ?)...

En pratique, la manière de brancher le voltmètre et l'ampèremètre peut influer sur le résultat (voir en TP ainsi que les exercices $\mathcal{S}3.16$ et $\mathcal{S}3.17$) et en général, il faudra plutôt privilégier de brancher l'ampèremètre en série du montage (dipôle//voltmètre) car le courant qui fuira dans le voltmètre sera faible tant que la résistance interne du dipôle considéré n'approche pas le mégaohm.

3 Point de fonctionnement

Lorsqu'on branche deux dipôle quelconque (c'est-à-dire pas aussi simples qu'une résistance), la connaissance de leurs caractéristiques respectives permet de déterminer graphique le « point de fonctionnement » du circuit, c'est-à-dire le couple tension/courant sur lequel il va se stabiliser. En effet, considérons un générateur (en convention générateur) que l'on branche sur un dipôle de caractéristique connue (en convention récepteur).



Alors les tensions et courants définis indépendamment dans chaque dipôle ont tels que $u_{\text{générateur}} = u_{\text{dipôle}}$ et $i_{\text{générateur}} = i_{\text{dipôle}}$. Ainsi, le point de fonctionnement doit être le point d'intersection des deux caractéristiques, ce qui permet de le déterminer de manière purement graphique.

Remarquons que certains composants « idéaux » ne peuvent pas être branchés ensemble. Par exemple, si l'on branche une source de tension idéale E_1 en parallèle d'une autre source de tension idéale E_2 avec $E_2 \neq E_1$, alors il n'existe aucun point d'intersection des deux caractéristiques. C'est la même chose lorsqu'on branche une source idéale de courant η_1 en série avec une autre source idéale de courant $\eta_2 \neq \eta_1$. Néanmoins, cet inconvénient « saute » si on rajoute une résistance interne comme le montre l'exercice suivant.

Exercice $\mathcal{S}3$.18 Deux générateurs réels branchés l'un sur l'autre

Branchons ensemble deux générateurs de Thévenin qui, en convention générateur, ont pour caractéristiques

$$u_1 = E_1 - r_1 i_1 \qquad \text{et} \qquad u_2 = E_2 - r_2 i_2$$

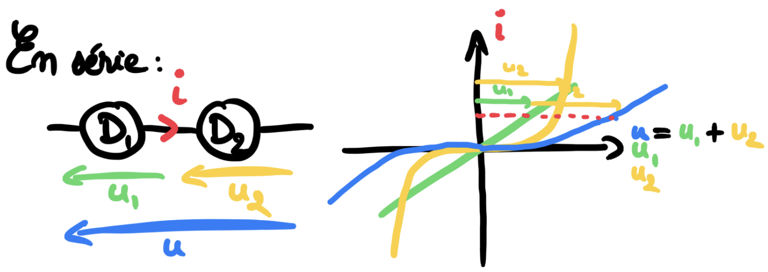
Montrer que si les f.é.m. sont du même ordre de grandeur, celui de résistance interne la plus faible finit par imposer ses vues à l'autre.

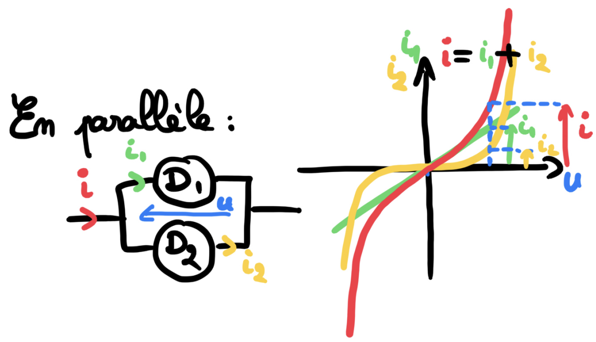
4 Branchement en série et en parallèle

Il peut parfois être utile d'être capable de prédire quelle est la caractéristique équivalente d'un montage série ou parallèle où l'on connait les caractéristiques de chacun des constituants fondamentaux. Le mieux est de savoir réfléchir par soi-même, mais voici quelques pistes pour guider vos réflexions.

En série, les dipôles sont traversés par le même courant, mais la tension aux bornes de l'ensemble est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle individuel. C'est donc selon l'axe choisi pour représenter la tension qu'il faut sommer les caractéristiques (on se place à courant constant pour réfléchir et placer chaque point).

En parallèle, les dipôles partagent une même tension à leurs bornes mais sont parcourus par des courants différents de sorte que le courant traversant le dipôle « équivalent » total vaut la somme de ces différents courants. C'est donc selon l'axe choisi pour représenter le courant qu'il faut sommer les caractéristiques (on se place à tension constante pour réfléchir et placer chaque point).





5 Résistances d'entrée et de sortie (important !)

Un GBF est un exemple typique de générateur modélisable par un générateur de Thévenin, c'est-à-dire contenant une résistance interne. Comme un générateur est généralement utiliser pour « sortir » un signal, cette résistance est appelé « résistance de sortie ». Inversement, un oscilloscope ou un voltmètre prenne un signal « en entrée » et mesure la tension correspondant à ce signal. Le voltmètre ou l'oscilloscope sont, en première approximation, équivalent à une résistance branchée entre les deux bornes qu'il nous intéresse de mesurer et on appelle généralement ce type de résistance une « résistance d'entrée »

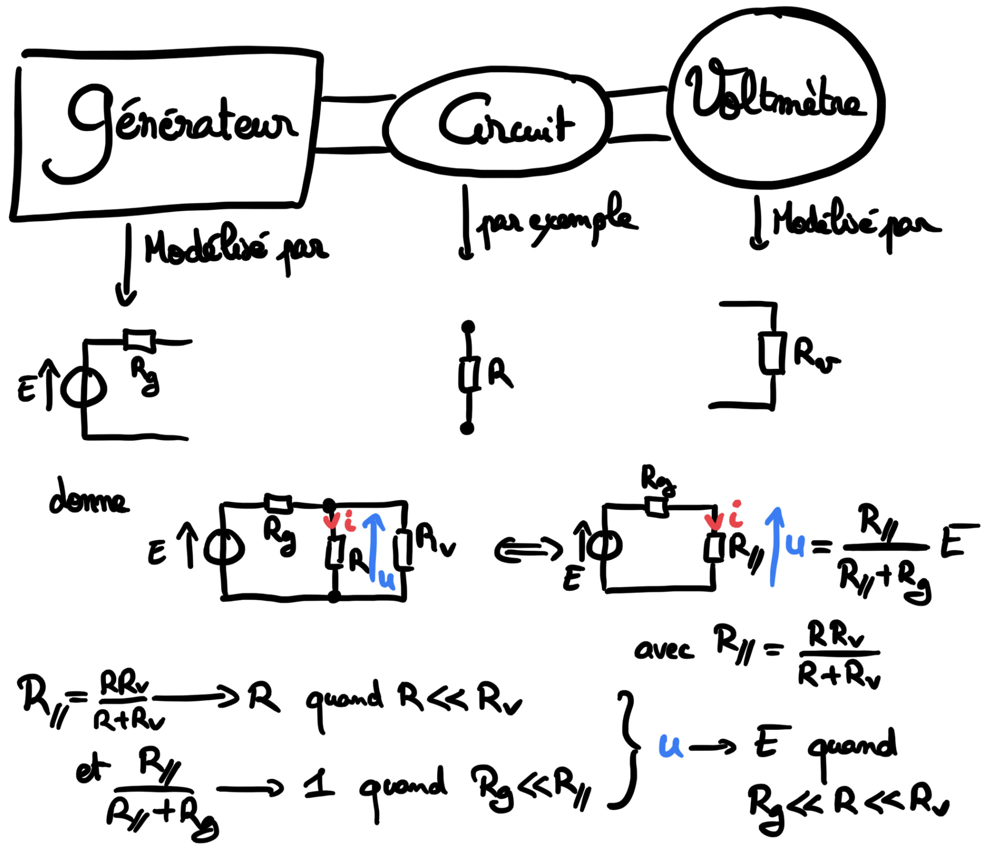
Pour que la mesure se fasse, il faut bien qu'un petit courant circule dans le dispositif de mesure, mais on veut que la mesure soit faite en perturbant un minimum le système. Ainsi, comme on a vu pour le diviseur de courant, pour les dispositifs branchés en parallèle d'un circuit, l'influence sera d'autant plus faible que la résistance d'entrée de ces dispositifs est grandes (de l'ordre du mégaOhm souvent). Au contraire, on souhaite généralement que le générateur soit le plus idéal possible, on cherchera donc à avoir une valeur la plus faible possible. Les constructeurs se sont plus ou moins mis d'accord pour des valeurs de résistances de sortie d'un générateur aux alentours de 50 Ω.

Pour voir l'influence de l'impédance de sortie R_g d'un générateur, branchons une résistance R sur un générateur de Thévenin (E, R_g). Alors un diviseur de tension permet de voir immédiatement que la tension aux bornes de R ne vaut pas E comme on pourrait naïvement s'y attendre mais $E \times R/(R + R_g)$ qui ne s'approche de E que si $R \gg R_g$.

Si on rajoute en outre un voltmètre (de résistance d'entrée R_V) pour mesurer cette tension, la tension mesurée va encore être différente de la tension précédente puisque le générateur voit à présent la résistance équivalente $R /\!/ R_V$ (qui vaut $R_{éq} = RR_V/(R + R_V)$) et non plus seulement R. La tension effectivement mesurée vaudra alors

$$U_{mes} = \frac{R_{éq}}{R_{éq} + R_g}\,E = \frac{RR_V}{RR_V + R_g\,(R + R_V)}\,E$$

qui ne colle à $U_{mes} \approx E$ que si on a $R_V \gg R \gg R_g$.



Correction $\mathcal{S}3$.1 Bilan de puissance en régime non sinusoïdal

1. On a $\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{max}} = u \times \mathrm{I}_{\mathrm{max}} = 9,0\ \mathrm{mW} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_{\mathrm{min}} = u \times \mathrm{I}_{\mathrm{min}} = 0,60\ \mathrm{mW}}$

   Pour la puissance moyenne, il suffit de pondérer par les temps d'utilisation $\tau_1 = 30$ ms et $\tau_2 = 970$ ms de sorte que

   $$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{moyen}} = \frac{\mathscr{P}_{\mathrm{max}}\tau_1 + \mathscr{P}_{\mathrm{min}}\tau_2}{\tau_1+\tau_2} = 0,85\ \mathrm{mW}}$$

2. Le courant moyen est donné par

   $$\mathrm{I}_{\mathrm{moyen}} = \frac{\mathscr{P}_{\mathrm{moyen}}}{u} = \frac{\mathrm{I}_{\mathrm{max}}\tau_1 + \mathrm{I}_{\mathrm{min}}\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$$

   Les 1800 mAh correspondent au courant moyen délivré par la pile (en mA) multiplié par la durée d'utilisation $\mathrm{T}_{\mathrm{tot}}$ que l'on recherche (en heures), soit

   $$\boxed{\mathrm{T}_{\mathrm{tot}} = \frac{1800\ \mathrm{mAh}}{\mathrm{I}_{\mathrm{moyen}}} = 3,2.10^3\ \mathrm{h} = 1,3.10^2\ \text{jours} = 4,4\ \text{mois}}$$

   ce qui est un ordre de grandeur raisonnable pour un réveil.

Correction $\mathcal{S}3$.2 Loi des mailles, loi des nœuds

Pour le circuit 1, la loi des nœuds donne $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Les lois des mailles s'écrivent quant à elle

$$\begin{cases} u_{\mathrm{C}_0} + u_{\mathrm{C}_3} - u_{\mathrm{E}_0} = 0 \\ 0 = u_{\mathrm{C}_1} - u_{\mathrm{C}_2} \\ u_{\mathrm{C}_0} + u_{\mathrm{C}_3} - u_{\mathrm{E}_0} = u_{\mathrm{C}_1} - u_{\mathrm{C}_2} \end{cases}$$

Pour le circuit 2, la loi des nœuds donne $i_1 + i_2 - i_3 = 0$. Les lois des mailles s'écrivent quant à elle

$$\begin{cases} u_{\mathrm{E}_0} - u_{\mathrm{R}_1} - u_{\mathrm{C}_0} = 0 \\ 0 = u_{\mathrm{L}_0} - u_{\eta_0} + u_{\mathrm{R}_0} \\ u_{\mathrm{E}_0} - u_{\mathrm{R}_1} - u_{\mathrm{C}_0} = u_{\mathrm{L}_0} - u_{\eta_0} + u_{\mathrm{R}_0} \end{cases}$$

Correction $\mathcal{S}3$.4 Histoires de conventions

1. **Convention générateur :** E_0 et C_2
   Convention récepteur : C_0, C_1 et C_3
2. **Convention générateur :** E_0 et η_0
   Convention récepteur : C_0, L_0, R_0 et R_1

Correction S3.5 Section d'un fil en TP

Un fil de TP a une résistance de l'ordre de $\mathrm{R} = 0,1\ \Omega$ et une longueur de l'ordre de $\ell = 1$ m. On en déduit une section

$$\boxed{\mathrm{S} = \frac{\rho\ell}{\mathrm{R}} = 0,2\ \mathrm{mm}^2}$$

La résistance est d'autant plus grande que S est petit (et réciproquement), on peut donc se permettre de faibles sections pour de petites longueurs de fil à R constante, mais si l'on veut des cables plus conséquents, il faut aussi augmenter la surface en conséquence si on veut limiter l'influence sur R.

Correction S3.6 Optimisation de puissance

En supposant E et i orientés dans le même sens, la loi des mailles combinée aux deux lois d'Ohm donne, puisque les deux résistances sont en série donc parcourues par le même courant i,

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}i + ri \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}+r}$$

Ainsi, la puissance reçue par la résistance R est donnée par

$$\boxed{\mathscr{P} = \mathrm{R}i^2 = \frac{\mathrm{R}\mathrm{E}^2}{(\mathrm{R}+r)^2}}$$

La fonction $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}\mathrm{E}^2/(\mathrm{R}+r)^2$ vaut 0 en $\mathrm{R} = 0$, tend vers 0 quand R tend vers l'infini, est toujours positive et est continue. On en déduit qu'elle passe nécessairement par (au moins) un maximum que l'on peut donc rechercher en regardant les endroits où la dérivée s'annule. Si l'on trouve un unique point d'annulation, ce sera forcément un maximum. Le calcul de la dérivée donne

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{dR}} = \frac{\mathrm{E}^2}{(\mathrm{R}+r)^2} - 2\frac{\mathrm{R}\mathrm{E}^2}{(\mathrm{R}+r)^3} = \frac{r-\mathrm{R}}{(\mathrm{R}+r)^3}\,\mathrm{E}^2$$

qui ne s'annule que si $\mathrm{R} = r$, le maximum de puissance vaut donc

$$\boxed{\mathscr{P}_{\max} = \mathscr{P}(\mathrm{R}=r) = \frac{r\mathrm{E}^2}{4r^2} = \frac{\mathrm{E}^2}{4r}}$$

Correction S3.7 Calculs de capacités

1. La capacité est donnée par $\boxed{\mathrm{C} = \dfrac{q}{u} = 9,0\ \mu\mathrm{F}}$

2. Les condensateurs sont en parallèle donc partagent la même tension. En outre, la charge totale q de l'énoncé se répartit sur les trois condensateurs de sorte que $q_1 + q_2 + q_3 = q$. En utilisant la loi du condensateur, on en déduit

$$\mathrm{C}_1 u + \mathrm{C}_2 u + \mathrm{C}_3 u = q \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{C}_3 = \frac{q}{u} - \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 = 3,3\ \mu\mathrm{F}}$$

   On pourra retenir de cet exercice que les capacités des condensateurs se somment lorsqu'on les associe en parallèle.

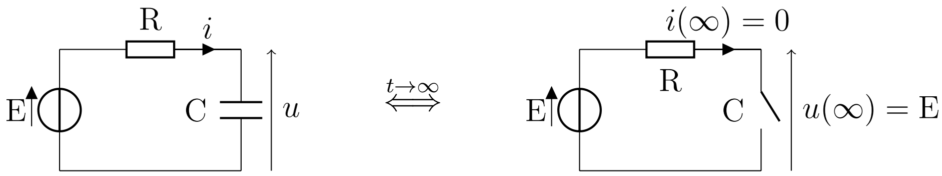
Correction *S3*.**8** Loi u/i du condensateur

1. $$i_1 = \mathrm{C}_0\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_0}}{\mathrm{d}t},\qquad i_3 = \mathrm{C}_1\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_1}}{\mathrm{d}t},\qquad i_3 = -\mathrm{C}_2\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_2}}{\mathrm{d}t}\qquad \text{et}\qquad i_1 = \mathrm{C}_3\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_3}}{\mathrm{d}t}$$

2. $$i_1 = \mathrm{C}_0\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}_0}}{\mathrm{d}t}$$

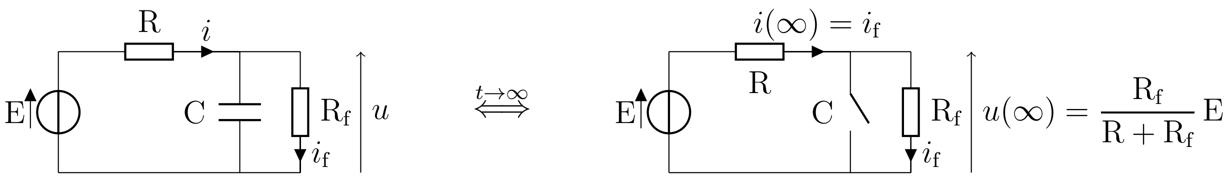
Correction *S3*.**9** Comportement asymptotique du condensateur parfait

À $t = 0$, la charge donc la tension est continue aux bornes du condensateur donc $u(0) = q_0/\mathrm{C}$. La tension (en conv. récepteur) aux bornes de la résistance vaut donc $\mathrm{E} - q_0/\mathrm{C}$ et on en déduit $i(0) = (\mathrm{E} - q_0/\mathrm{C})/\mathrm{R}$. Quand $t \to \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, de sorte que le courant $i(\infty)$ est nul et la tension aux bornes de la résistance l'est aussi grâce à la loi d'Ohm. Ainsi, la loi des maile donne directement que $u(\infty) = \mathrm{E}$.



Correction *S3*.**10** Comportement asymptotique du condensateur réel

À $t = 0$, la charge donc la tension est toujours continue aux bornes du condensateur donc $u(0) = q_0/\mathrm{C}$. Ainsi, on a de même que précédemment $i(0) = (\mathrm{E} - q_0/\mathrm{C})/\mathrm{R}$. Quand $t \to \infty$, la partie parfaite du condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert mais la résistance de fuite laisse passer un petit courant (d'autant plus faible que $\mathrm{R_f}$ est grand), de sorte que le courant $i(\infty)$ est faible mais non nul. Il est donné par $i(\infty) = \mathrm{E}/(\mathrm{R} + \mathrm{R_f})$ puisque c'est le courant qui traverse les deux résistance R et $\mathrm{R_f}$ soumises dans leur ensemble à une tension E. Ne reste plus qu'à appliquer la loi d'Ohm à $\mathrm{R_f}$ pour obtenir $u(\infty) = \mathrm{E}\mathrm{R_f}/(\mathrm{R} + \mathrm{R_f})$.

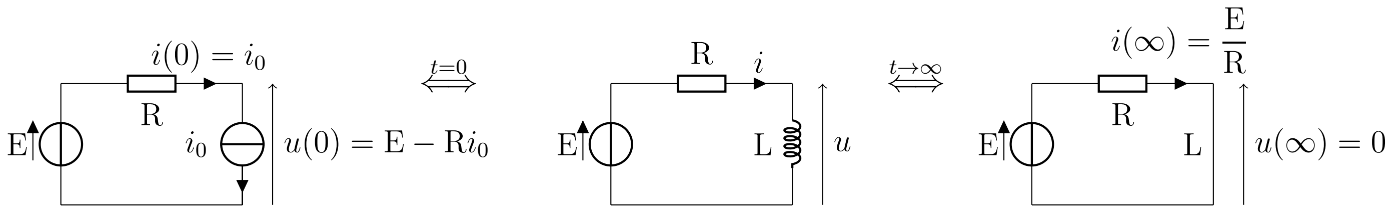


Correction *S3*.**11** Loi fondamentale pour la bobine

On est en convention récepteur donc $$\boxed{u_{\mathrm{L}_0} = \mathrm{L}_0\,\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}}$$

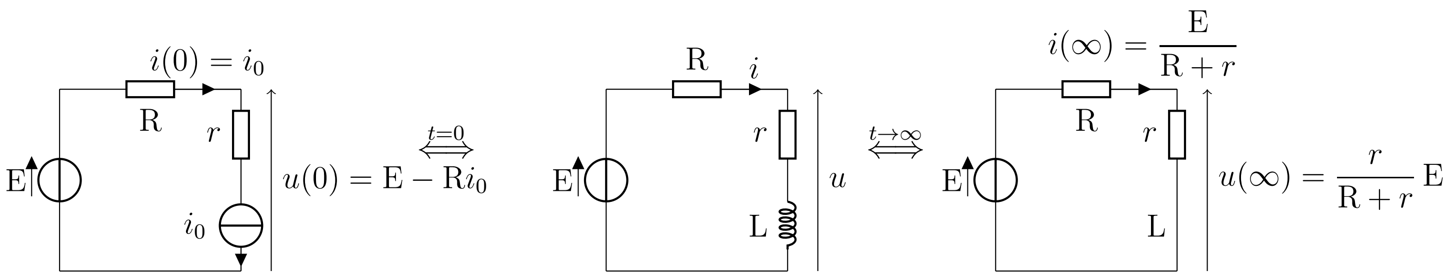
Correction $\mathcal{S}3$.12 Comportement asymptotique de la bobine parfaite

Le courant est continu au travers de la bobine de sorte que $i(0) = i_0$. La tension aux bornes u de la bobine peut s'obtenir via la loi des mailles appliquée à $t = 0$: $u(0) = \mathrm{E} - \mathrm{R}i_0$. Quand $t \to \infty$, la bobine se comporte comme un fil donc $u(\infty) = 0$. Toute la tension E se retrouve aux bornes de la résistance r de sorte que $i(\infty) = \mathrm{E}/\mathrm{R}$.



Correction $\mathcal{S}3$.13 Comportement asymptotique de la bobine réelle

Le courant est continu au travers de la bobine de sorte que $i(0) = i_0$. La tension aux bornes u de la bobine réelle peut s'obtenir via la loi des mailles appliquée à $t = 0$: $u(0) = \mathrm{E} - \mathrm{R}i_0$. Quand $t \to \infty$, la partie parfaite de la bobine se comporte comme un fil donc la bobine réelle se comporte comme sa résistance interne r. Le courant est celui traversant deux résistances R et r en série soumises à une tension E donc $i(\infty) = \mathrm{E}/(\mathrm{R}+r)$ et la tension est celle de la résistance interne $u(\infty) = ri(\infty) = r\mathrm{E}/(\mathrm{R}+r)$. On retrouve les résultats de l'exercice précédent en prenant la limite $r \to 0$ dans les formules trouvées.



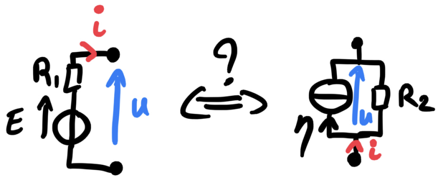
Correction $\mathcal{S}3$.14 Différentes conventions, Thévenin

$$u = -\mathrm{E} + ri, \qquad u = -ri + \mathrm{E}, \qquad u = \mathrm{E} + ri, \qquad \text{et} \qquad u = -ri - \mathrm{E}$$

Correction $\mathcal{S}3$.15 Différentes conventions, Norton

$$i = \eta + \frac{u}{\mathrm{R}}, \qquad i = \eta - \frac{u}{\mathrm{R}}, \qquad i = -\eta + \frac{u}{\mathrm{R}} \qquad \text{et} \qquad i = -\eta - \frac{u}{\mathrm{R}}$$

Correction $\mathcal{S}3$.16 Passage Thévenin/Norton



Considérons un générateur de Thévenin $(\mathrm{E}, \mathrm{R}_1)$ dont on voudrait déterminer son équivalent en générateur de Norton (η, R_2). Pour que les deux générateurs soient indistingables de l'extérieur, il faut et il suffit qu'ils aient la même relation entre la tension globale u à leurs bornes et le courant global i qui les traverse. On a montré aux paragraphes précédents que ces relations s'écrivent respectivement pour les schémas considérés

$$u = \mathrm{E} - \mathrm{R}_1 i \qquad \text{et} \qquad i = \eta - \frac{u}{\mathrm{R}_2} \quad \text{soit} \quad u = \mathrm{R}_2\eta - \mathrm{R}_2 i$$

Or on sait que deux droites sont confondues si et seulement si leurs coefficient directeur et ordonnée à l'origine sont identique, ce qui impose que les deux résistances R_1 et R_2 soient identiques (appelons-là R) et que la force électromotrice E vaille $\mathrm{R}\eta$. En résumé

$$\boxed{\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = \mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} = \mathrm{R}\eta}$$

Correction $\mathcal{S}3$.17 Mesure de résistance : voltmètre englobant

L'ampèremètre est équivalent à une résistance r de l'ordre de quelques ohms. Le voltmètre mesure donc la tension aux bornes de l'ensemble $\mathrm{R} + r$ alors que le courant est bien celui traversant R (et r par la même occasion). On mesure donc $\mathrm{R} + r$ en faisant le rapport u/i, ce qui n'est pas gênant tant que $\mathrm{R} \gg r$ (donc pour une résistance R d'au moins une centaine d'ohms).

Correction $\mathcal{S}3$.18 Mesure de résistance : ampèremètre extérieur

Le voltmètre est équivalent à une résistance $\mathrm{R_V}$ de l'ordre 10 mégaohms pour un voltmètre usuel mais seulement 1 MΩ pour la plaque Sysam. L'ampèremètre mesure donc le courant traversant l'ensemble $\mathrm{R}/\!/\mathrm{R_V}$, soit une résistance équivalente $\mathrm{RR_V}/(\mathrm{R}+\mathrm{R_V})$ alors que la tension est bien celle au bornes de R (et $\mathrm{R_V}$ par la même occasion). On mesure donc $\mathrm{RR_V}/(\mathrm{R}+\mathrm{R_V})$ en faisant le rapport u/i, ce qui n'est pas gênant tant que $\mathrm{R} \ll \mathrm{R_V}$ (donc pour une résistance R d'au plus une centaine de kiloohms pour un voltmètre courant mais seulement une dizaine de kiloohms pour la plaque Sysam).

Correction $\mathcal{S}3$.19 Deux générateurs réels branchés l'un sur l'autre

Comme les deux générateur sont en convention générateur, les brancher l'un sur l'autre tel que $u_1 = u_2$ entraînera forcément que $i_2 = -i_1$ (et on notera $i = i_1$), d'où l'égalité au point de fonctionnement

$$\mathrm{E}_1 - r_1 i = \mathrm{E}_2 + r_2 i \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2}{r_1 + r_2} \quad \text{et} \quad u = \mathrm{E}_1 - r_1 i = \frac{r_2\mathrm{E}_1 + r_1\mathrm{E}_2}{r_1 + r_2}$$

le combat sera gagné par le générateur « le plus idéal » des deux, c'est-à-dire celui dont la résistance interne est la plus faible.