S02

Lentilles minces dans l'approximation de Gauss

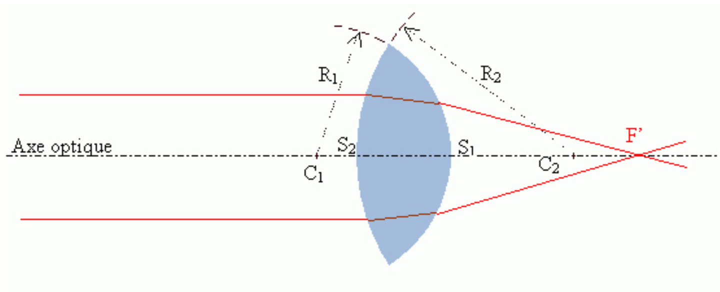
Partie I

Définitions

1 Lentille mince [1]

a) Lentille sphérique

Système optique résultant de l'association de deux dioptres sphériques. (schéma wikipédia)



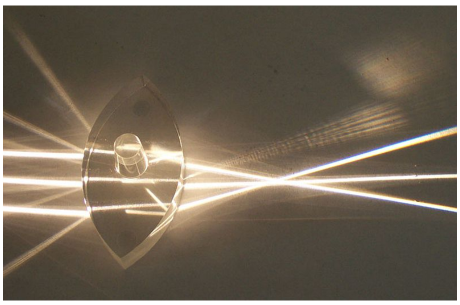
Les deux dioptres sphériques délimitent un MTHI d'indice n. L'axe (C_1C_2) est l'axe de révolution de la lentille que l'on nomme « axe optique ». On l'oriente algébriquement dans le sens de propagation des rayons lumineux. $R_1 = C_1S_1$ et $R_2 = C_2S_2$ sont les deux rayons de courbure des dioptres sphériques constitutifs de la lentille et on note $e = S_1S_2$ l'épaisseur de la lentille.

b) Lentille sphérique mince

On considère une lentille sphérique comme mince lorsque l'épaisseur e vérifie

$$e \ll R_1 \qquad \text{et} \qquad e \ll R_2$$

c) Lentille convergente



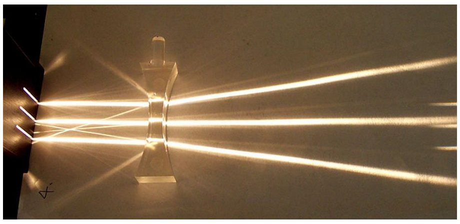
Une lentille est dite convergente lorsqu'elle referme un faisceau de rayons lumineux arrivant parallèles entre eux sur la lentille. NB : un faisceau sortant d'une lentille convergente peut très bien être divergent, il sera juste « moins divergent » qu'à l'entrée.

À noter qu'un rayon confondu avec l'axe optique n'est pas dévié après passage dans la lentille.

Remarque : il existe plusieurs type de lentilles convergentes (biconvexe, plan-convexe, ménisque convergent, etc.) mais elles ont pour point commun d'être toutes à *bords minces* (même si la lentille elle-même n'est pas forcément mince).

1. *Notions à connaitre* : Lentiles minces.

d) Lentille divergente



Une lentille est dite divergente lorsqu'elle ouvre un faisceau de rayons lumineux arrivant parallèles entre eux sur la lentille. NB : un faisceau sortant d'une lentille divergente peut très bien être convergent, il sera juste « moins convergent » qu'à l'entrée.

À noter qu'un rayon confondu avec l'axe optique n'est pas dévié après passage dans la lentille.

Remarque : il existe plusieurs type de lentilles divergentes (biconcave, plan-concave, ménisque divergent, etc.) mais elles ont pour point commun d'être toutes à *bords épais* (même si la lentille elle-même est dite mince). En TP, il s'agit d'une manière simple de déterminer la nature convergente ou divergente d'une lentille (à retenir !).

2 Conditions de Gauss [2]

Ce sont des hypothèses portant sur les rayons incidents et émergents : ils doivent être « paraxiaux », c'est-à-dire que

- les rayons doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique ;
- les rayons doivent être peu éloignés de l'axe optique.

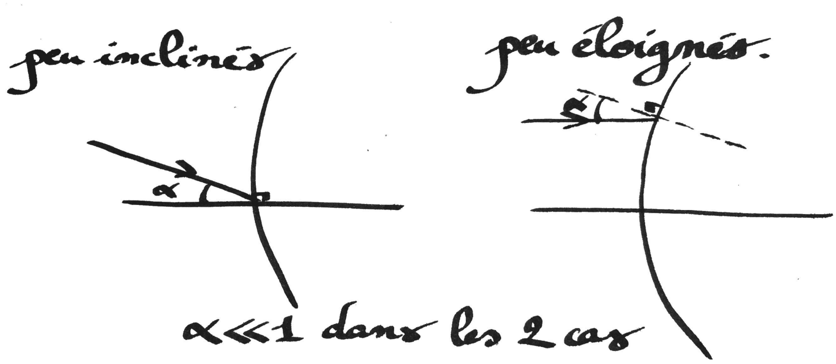
3 Lentille mince dans les conditions de Gauss

Quand on se place dans cette approximation, à un point objet A correspond un point image A′ au travers de la lentille $\mathscr{L}$:

- $\mathscr{L}$ présente un stigmatisme approché $\mathrm{A} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{A}'$
- $\mathscr{L}$ présente un aplanétisme approché.

Remarques :

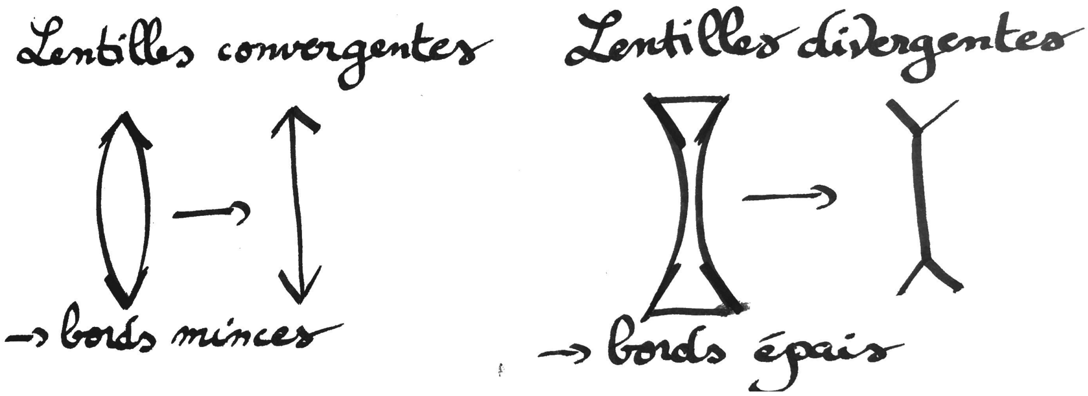
- Ces deux propriétés découlent du stigmatisme et de l'aplanétisme approchés du dioptre plan pour les petits angles
- Si A est un point de l'axe optique, alors A′ doit aussi être sur l'axe optique car le rayon confondu avec l'axe n'est pas dévié par la lentille. Cela implique l'existence d'une relation de conjugaison entre A et A′.



2. *Notions à connaitre* : Conditions de Gauss.

4 Schématisation

Comme on suppose une lentille mince, on va la représenter par un trait vertical : S_1 et S_2 sont confondus en un point O appelé le « centre optique » de la lentille. Les extrémités représente le caractère mince (lentille convergente) ou épais (lentille divergente) des bords de la lentille.



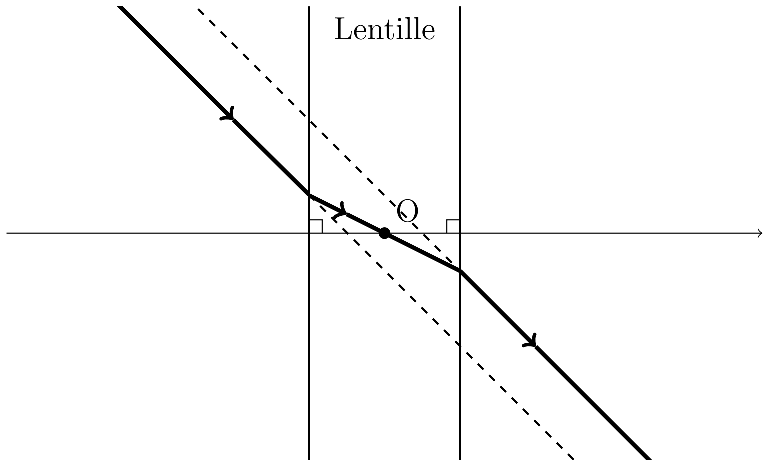
Partie II

Constructions graphiques

1 Centre optique, foyers principaux et secondaires, plans focaux

a) Propriété du centre optique O

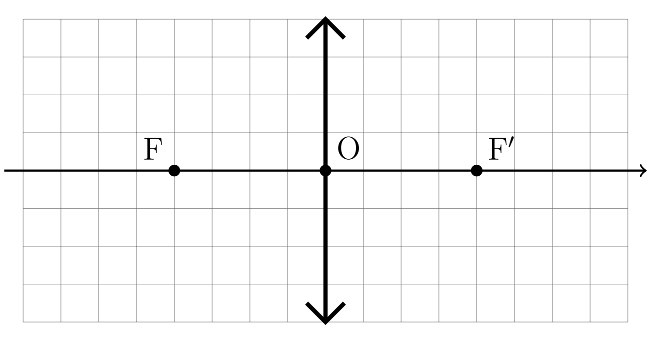
Pour des rayons paraxiaux frappant $\mathscr{L}$ au voisinage de S_1, on peut en première approximation confondre $\mathscr{L}$ avec une lame à faces parallèles. Ainsi, les rayons incidents et émergents sont parallèles avec un décalage latéral très faible.

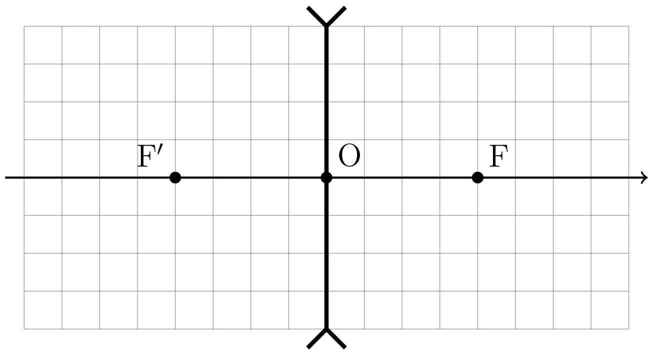


$\boxed{\text{Un rayon frappant } \mathscr{L} \text{ en O n'est pas dévié}}$

b) Foyers principaux d'une lentille mince

Le **foyer principal image** F′ d'une lentille $\mathscr{L}$ est l'image par la lentille d'un objet A_∞ placé à l'infini sur l'axe optique : $A_\infty \xrightarrow{\mathscr{L}} F'$. L'image d'un objet sur l'axe optique étant nécessairement sur l'axe optique, F′ est situé sur l'axe optique. Pour une lentille convergente, l'image d'un objet à l'infini est réelle donc F′ est situé dans l'espace image alors que pour une lentille divergente, elle sera virtuelle (F′ est situé dans l'espace objet).





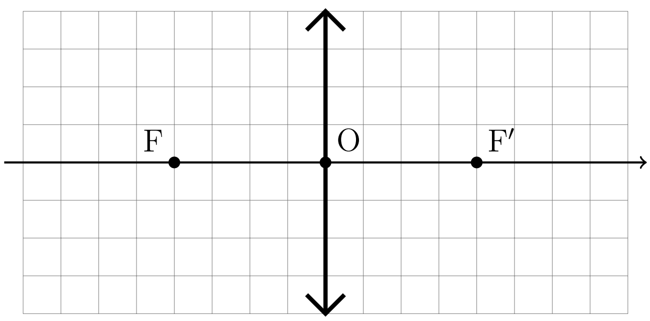
On définit la distance focale image (ou plus communément « distance focale ») de la lentille comme

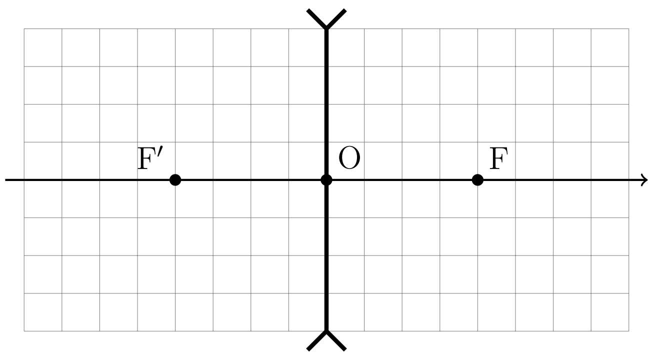
$$\boxed{f' = \overline{\mathrm{OF'}}}$$

On a alors $f'_{\mathrm{conv}} > 0$ et $f'_{\mathrm{div}} < 0$. La vergence, quant à elle, est l'inverse de la distance focale et s'exprime en dioptries (δ, qui correspondent à des m^{-1})

$$\mathrm{V} = \frac{1}{f'}$$

Le **foyer principal objet** F d'une lentille $\mathscr{L}$ est l'endroit de l'axe optique où placer un objet tel que son image par la lentille se retrouve à l'infini : $\mathrm{F} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{A}'_{\infty}$. Pour une lentille convergente, F est situé dans l'espace objet alors que pour une lentille divergente, F est situé dans l'espace image. D'après le principe du retour inverse de la lumière, on peut affirmer que F est le symétrique de F′ par rapport à O, il n'est donc pas utile de définir la distance focale objet $f = \overline{\mathrm{OF}}$ puisqu'on a automatiquement $f = -f'$.



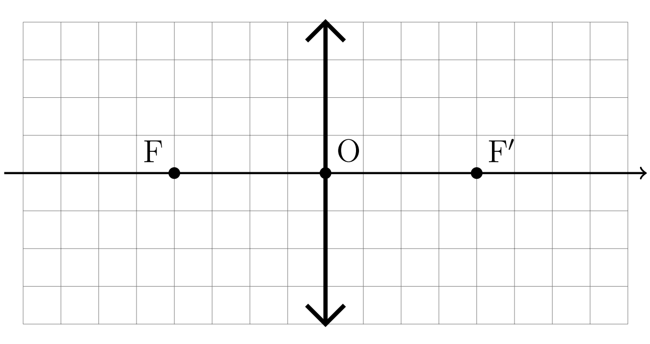


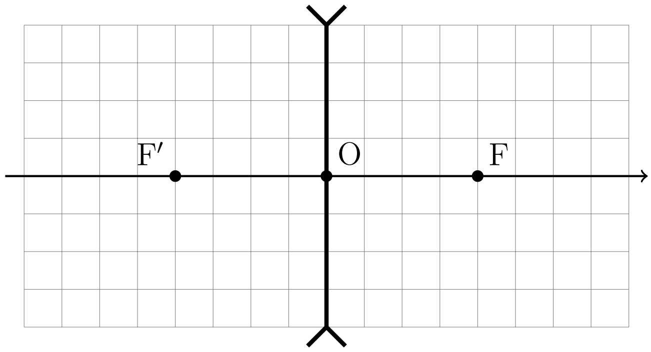
c) Foyers secondaires et plans focaux

Le plan focal objet $\mathscr{P}$ est le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant F. Tout point $\phi \in \mathscr{P} \setminus \{\mathrm{F}\}$ est un foyer objet secondaire.

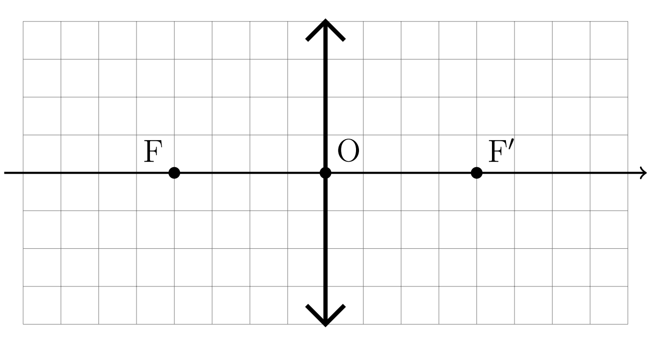
Le plan focal image $\mathscr{P}'$ est le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant F′. Tout point $\phi' \in \mathscr{P}' \setminus \{\mathrm{F'}\}$ est un foyer image secondaire.

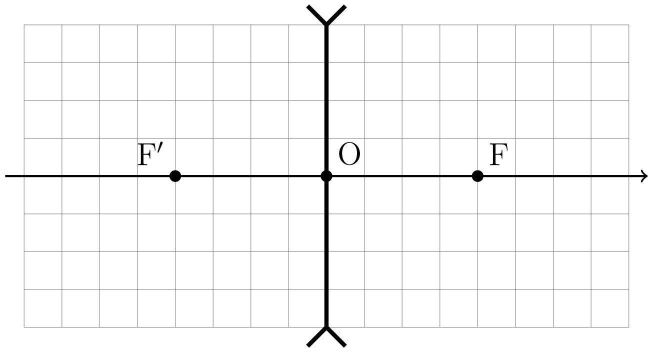
En utilisant le fait que, lorsque les condition de Gauss sont vérifiées, on a aplanétisme approché, on démontre graphiquement que l'image d'un objet B_{∞} situé à l'infini hors de l'axe optique sera le point du plan focal image (aplanétisme) situé sur la droite venant de B_{∞} et passant par O (propriété du centre optique). Ainsi, on sait forcément où converge un faisceau de rayons parallèles entre eux (mais pas forcément parallèles à l'axe optique).





De la même manière, par aplanétisme, l'image d'un point ϕ appartenant au plan focal objet se retrouve à l'infini en suivant le rayon allant de ϕ à O (non dévié) vers un point image B'_∞. Ainsi, un faisceau de rayon issu de ϕ ressortira en un faisceau de rayons parallèles entre eux et suivant la direction $(O\phi)$.





Conclusions :

— Des rayons incidents parallèles entre eux (et non à l'axe) émergent d'une lentille mince en se coupant réellement (cas convergent) ou par prolongation (cas divergent) dans le plan focal image.

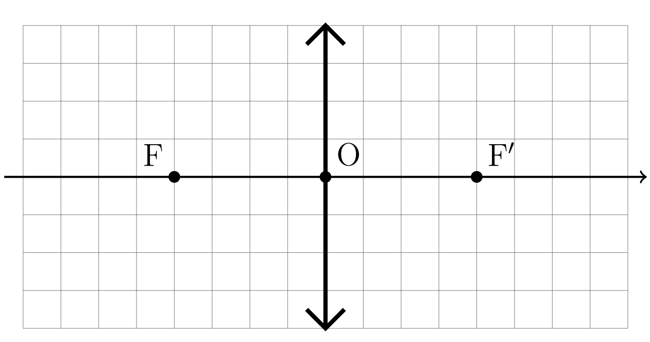
— Des rayons émergents d'une lentille mince parallèles entre eux (et non à l'axe) proviennent de rayons incidents qui se coupent réellement (cas convergent) ou par prolongation (cas divergent) dans le plan focal objet.

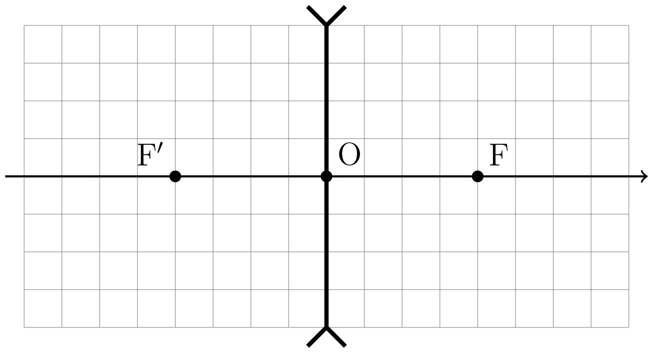
2 Construction géométrique des images et des objets

a) A et A′ appartiennent à l'axe optique

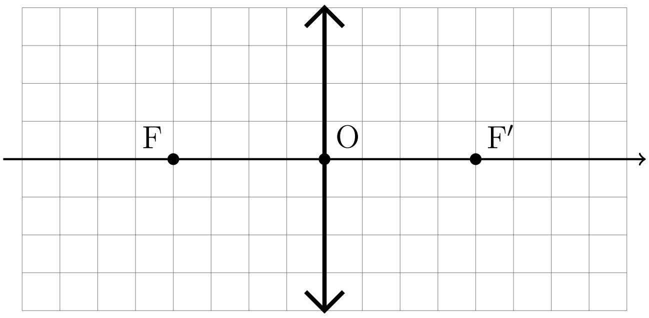
On utilise soit les foyers secondaires pour connaître comment sera dévié un rayon donné au passage de la lentille, soit un objet B imaginaire dont on construit l'image, soit une image B′ imaginaire dont on construit l'objet.

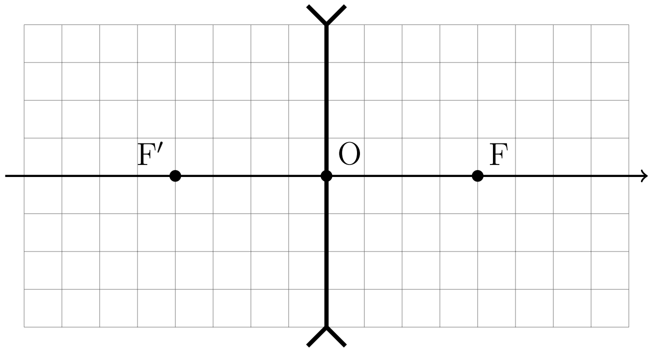
On connaît A, on cherche A′, il suffit de choisir un rayon incident et de trouver comment il sera dévié par la lentille





On connaît A′, on cherche A, il suffit de choisir un rayon émergent et de trouver comment il est entré dans la lentille.





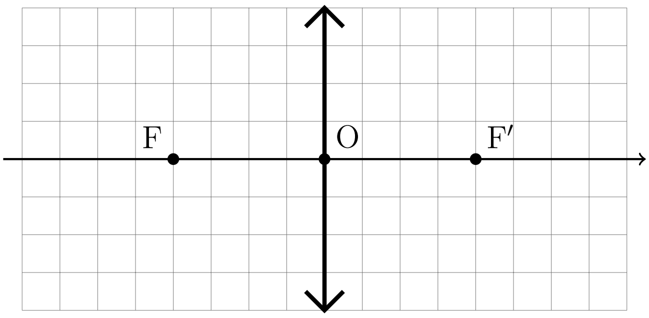
b) Objet n'appartenant pas à l'axe optique

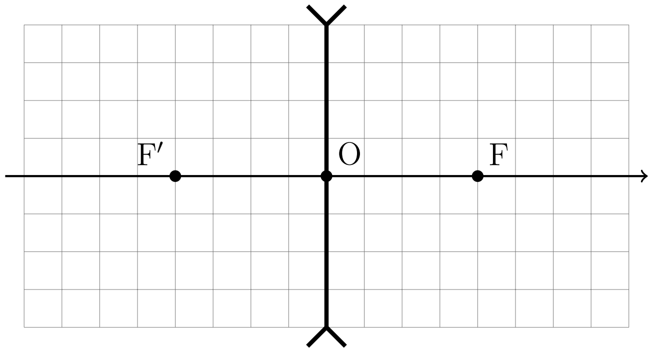
On utilise pour ce faire les trois rayons caractéristiques :

① Le rayon qui passe par O n'est pas dévié.

② Un rayon rentrant dans la lentille parallèlement à l'axe optique ressort en passant par le foyer image F′.

③ Un rayon rentrant dans la lentille en passant par le foyer objet F ressort parallèlement à l'axe optique.





Partie III

Formules de conjugaison

1 Position et grandeur

On oriente l'horizontale selon le sens de propagation des rayon lumineux et la verticale selon la verticale ascendante en général. On définit les position des objet et image

$$\boxed{p = \overline{\mathrm{OA}} \qquad \text{et} \qquad p' = \overline{\mathrm{OA'}}}$$

On définit le « grandissement[3] » γ comme le rapport de la taille (linéaire) $\overline{\mathrm{A'B'}}$ de l'image sur la taille (linéaire) $\overline{\mathrm{AB}}$ de l'objet :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}}}$$

On distingue plusieurs cas :

$\gamma < -1$: image renversée agrandie ;

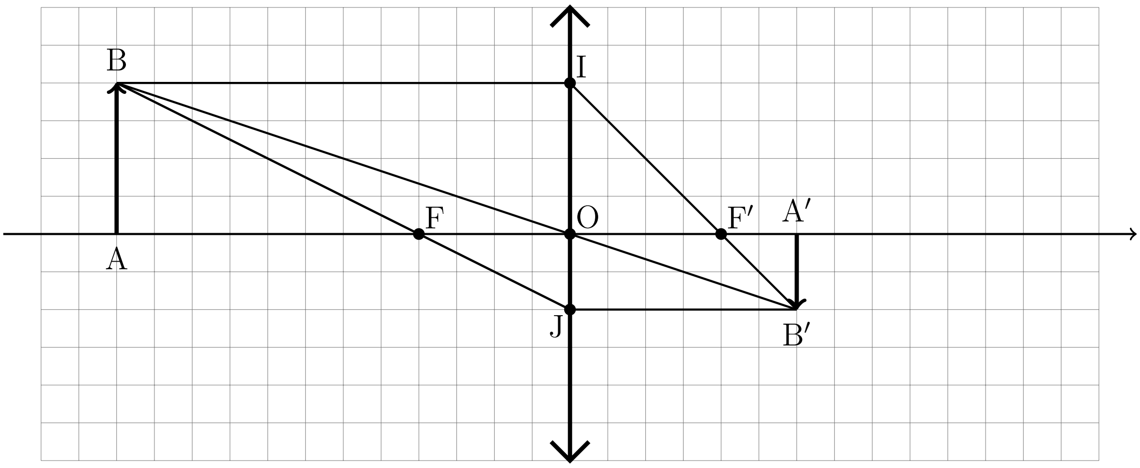
$-1 < \gamma < 0$: image renversée et plus petite ;

3. À ne pas confondre avec le grossissement G introduit plus tard.

$0 < \gamma < 1$ **:** image droite et plus petite ;

$\gamma > 1$ **:** image droite agrandie.

2 Formule de conjugaison de Descartes (origine en O)



Les relation de conjugaison cherche à lier les positions p de l'objet et p' de l'image. Commençons par exprimer le grandissement γ en utilisant le théorème de Thalès algébrique dans les triangles OAB et OA′B′ en situation de Thalès « papillon ». On en déduit

$$\gamma \overset{\text{déf}}{=} \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \overset{\text{Thalès}}{=} \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\overline{\mathrm{OA}}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\gamma = \frac{p'}{p}}$$

Démontrons à présent la formule de Descartes en nous basant sur les triangles OF′I et A′F′B′ qui sont aussi en situation de Thalès « papillon ». On a alors

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{OI}}} = \frac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{\overline{\mathrm{F'O}}} = \frac{\overline{\mathrm{F'O}} + \overline{\mathrm{OA'}}}{-\overline{\mathrm{OF'}}} = \frac{-f' + p'}{-f'} = 1 - \frac{p'}{f'}$$

Or,
$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{OI}}} = \frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \gamma = \frac{p'}{p}$$

d'où
$$\frac{p'}{p} = 1 - \frac{p'}{f'} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$$

NB : même si on s'est basé sur une construction de lentille convergente particulière, la formule est valable dans tous les cas, y compris pour les lentilles divergentes.

Exercice $\mathcal{S}2$.1 Formule de Descartes

1. Un objet est placé 10 cm devant une lentille de distance focale $f_1' = 20$ cm. Où se trouve l'image et quel est le grandissement ?
2. Une lentille de vergence $\mathrm{V}_2 = -4\ \delta$ forme une image réelle à 10 cm de son centre optique. Où se situe l'objet et quel est le grandissement ?
3. Une lentille forme une image virtuelle à 30 cm de son centre optique à partir d'un objet virtuel situé à 10 cm de distance du centre optique. Quelle est sa distance focale et sa vergence ?

Exercice $\mathcal{S}2.2$ Descartes à deux lentilles accolées

On considère deux lentilles de vergences respectives V_1 et V_2. Montrer que si les deux lentilles sont accollées, elles sont équivalentes à une seule lentilles de vergence totale $V_1 + V_2$.

3 Formule de conjugaison de Newton (origine aux foyers)

On repart sur le même schéma et on remarque qu'à chaque fois γ est donné par $\overline{\mathrm{A'B'}}/\overline{\mathrm{OI}}$ et par $\overline{\mathrm{OJ}}/\overline{\mathrm{AB}}$. Appliquons Thalès dans les deux couples de triangles papillons :

Dans AFB/OFJ $\qquad \gamma = \dfrac{\overline{\mathrm{FO}}}{\overline{\mathrm{FA}}} = \dfrac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}} \qquad$ soit $\qquad \boxed{\gamma = \dfrac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}}}$

Dans OF'I/A'F'B' $\qquad \gamma = \dfrac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{\overline{\mathrm{FO}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{-f'} \qquad$ soit $\qquad \boxed{\gamma = -\dfrac{\overline{\mathrm{F'A'}}}{f'}}$

En égalant ces deux expressions de γ (qui peuvent être utile en soi de temps en temps), il vient directement la relation de Newton, à savoir

$$\boxed{\overline{\mathrm{FA}} \times \overline{\mathrm{F'A'}} = -f'^2}$$

Exercice $\mathcal{S}2.3$ Formule de Newton

On place un objet $5,0$ cm après le foyer objet d'une lentille de distance focale $f' = 50$ cm.

1. Où se trouve l'image comparée au foyer image ? Quelle est sa nature (réelle ou virtuelle ?)
2. Quel est le grandissement ? Comment est l'image ?
3. Reprendre les questions précédentes pour une lentille divergente de même focale (en valeur absolue). Comment doit-on procéder pour placer l'objet ?

Tout exercice d'optique peut être traité soit avec Descartes, soit avec Newton, mais il est des cas où une formulation mène au résultat plus rapidement que la seconde. En particulier, si l'énoncé définit naturellement les distances par rapport aux foyers, c'est Newton qui est à privilégier (et tout particulièrement si l'exercice traite d'un microscope). En revanche, s'il s'agit plutôt de distances par rapport au centre optique de la lentille, ce sera souvent plus simple avec Descartes [4].

4 Lien algébrique Descartes/Newton

Le passage algébrique de Descartes à Newton (ou réciproquement) est un exercice classique qu'il faut savoir correctement initier (après, c'est juste du calcul). L'idée est d'exprimer par exemple $\overline{\mathrm{FA}}$ et $\overline{\mathrm{F'A'}}$ (pour le passage Newton→Descartes) en fonction de p, p' et f' et de remplacer dans la formule de Newton jusqu'à retrouver celle de Descartes. On a

$$\overline{\mathrm{FA}} = \overline{\mathrm{FO}} + \overline{\mathrm{OA}} = f' + p \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{F'A'}} = \overline{\mathrm{F'O}} + \overline{\mathrm{OA'}} = -f' + p'$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \overline{\mathrm{FA}} \times \overline{\mathrm{F'A'}} = -f'^2 \\ \iff \quad & (f'+p)\times(-f'+p') = -f'^2 \\ \iff \quad & -f'^2 + f'(p'-p) + pp' = -f'^2 \\ \iff \quad & f'(p-p') = pp' \\ \iff \quad & \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \end{aligned}$$

4. Et après c'est souvent une histoire de goûts. Personnellement, j'utilise Descartes presque pour tout, sauf pour tout ce qui touche un microscope.

5 Condition $\mathrm{D} \geqslant 4f'$ pour une lentille convergente

Montrons que, pour une lentille convergente, on ne peut obtenir une image réelle ($p' > 0$) à partir d'un objet réel ($p < 0$) que si la distance $\mathrm{D} = \overline{\mathrm{AA'}} = p' - p$ entre l'objet et l'image dépasse quatre fois la distance focale. C'est particulièrement utile en TP où il ne faut pas espérer pouvoir trouver l'emplacement d'une image en bougeant la lentille entre un objet et un écran si la distance entre l'objet et l'écran est inférieure à ces $4f'$...

Démonstration

Partant de la définition de la distance objet-image, on a

$$\mathrm{D} = \overline{\mathrm{AA'}} = \overline{\mathrm{AO}} + \overline{\mathrm{OA'}} = -p + p' \qquad \text{soit} \qquad p' = \mathrm{D} + p$$

Remplaçons cette expression dans la relation de conjugaison de Descartes, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{D}+p} - \frac{1}{p} &= \frac{1}{f'} \\ p - (\mathrm{D}+p) &= \frac{(\mathrm{D}+p)p}{f'} \\ 0 &= p^2 + \mathrm{D}p + \mathrm{D}f' \end{aligned}$$

Le trinôme précédent n'admet de racine que si son discriminant est positif, soit

$$\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D}f' \geqslant 0$$

Comme on recherche une distance objet-image positive (du fait de la réalité de l'objet et de l'image), cela implique naturellement

$$\boxed{\mathrm{D} \geqslant 4f'}$$

Exercice $\mathcal{S}$2.4 $\mathrm{D} > 4f'$ pour une lentille convergente

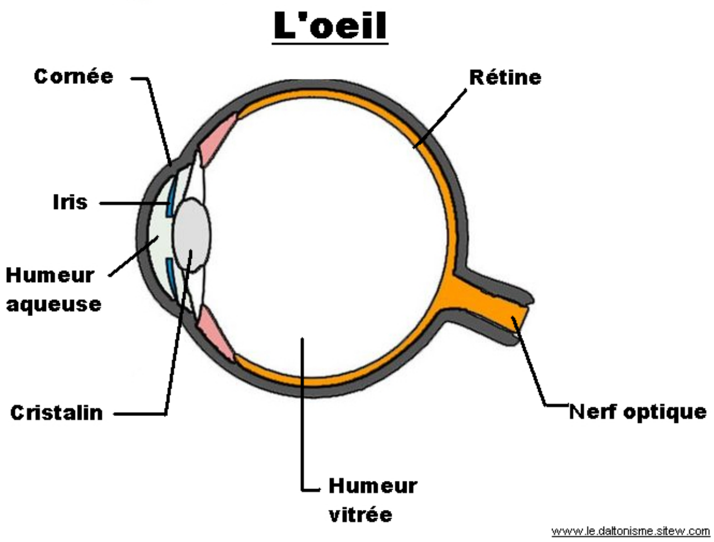
Trouver une autre démonstration basée sur l'étude de la fonction $p \mapsto \mathrm{D}(p)$ pour montrer qu'elle passe par un minimum dans la zone où l'objet est réel ($p < 0$).

Partie IV

Association de lentilles minces

1 L'œil [5]

a) L'œil réduit



L'œil est le système optique auquel on accède le plus facilement. On peut le modéliser par une lentille convergente (qui modélise le cristallin et les humeurs de l'œil) ainsi qu'un écran (qui modélise à la rétine) à une distance de l'ordre de 15 mm. Un diaphragme peut de plus modéliser l'iris.

b) Limites d'accomodation

Pour voir à différentes distances, l'œil « accomode » et adapte sa distance focale (en jouant sur la forme du cristallin) pour que l'image de l'objet observé se retrouve toujours nette sur la rétine. En notant d la distance entre la lentille et la rétine, on a toujours $p' = d$. À l'aide de Descartes, on peut obtenir une expression de la distance focale f' en fonction de la position p de l'objet. Ainsi,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \qquad \text{soit} \qquad f' = \frac{p \times d}{p - d}$$

Remarque : f' a une valeur maximale quand $p = -\infty$ (elle vaut d) et diminiue à mesure que l'objet se rapproche de l'œil.

Un œil normal peut voir entre un point le plus proche, dit « Punctum Proximum » et un point le plus éloigné dit « Punctum Remotum ». Plus précisément, on a les définition suivantes :

Punctum Remotum, PR : Point de l'axe optique vu nettement sans aucune accomodation. Excepté pour les hypermétropes, il s'agit en pratique du point le plus lointain vu nettement qui correspond à ${f'}_{\text{max}}$. Pour un œil normal, le PR devrait être à l'infini.

Punctum Proximum, PP : Point de l'axe optique vu nettement avec une accomodation maximale. En pratique, il s'agit du point le plus proche vu nettement qui correspond à ${f'}_{\text{min}}$. Pour un œil adulte normal, il vaut à peu près l'âge de la personne exprimée en cm, souvent pris à 25 cm quand on n'a pas plus d'information sur le sujet.

5. *Notions à connaitre* : L'œil.

SCHEMA

Exercice $\mathcal{S}2$.5 Distance focale d'accomodation

Calculer $f'_{\max}$ et $f'_{\min}$ pour un œil normal de PP de 25 cm et telle que la distance cristallin-rétine vaille $d = 12$ mm

c) Pouvoir séparateur

Le pouvoir séparateur est l'angle minimal sous lequel l'œil arrive à séparer deux points A et B d'un objet perpendiculaire à l'axe optique. Pour un œil normal, le diamètre angulaire apparent correspondant au pouvoir séparateur vaut

$$\boxed{\varepsilon \approx 1' = \frac{1}{60}\,^\circ = 2,9.10^{-4}\text{ rad}}$$

Si l'on regarde la Lune, cela correspond à distinguer les deux bords d'un cratère d'environ 111 km de diamètre.

Exercice $\mathcal{S}2$.6 Mr de Beauregard

À quelle distance maximale peut-on apprécier le regard du beau jeune homme (ou de la belle jeune fille selon vos préférences) de l'immeuble d'en face ?

d) Principaux défauts

Myopie : Le cristallin est dit « trop convergent » (même si en vrai l'œil est souvent trop long par rapport à un œil normal). Le PR se retrouve à une distance finie (plutôt qu'à l'infini) alors que le PP se retrouve plus près de l'œil que pour l'œil normal. On corrige ce défaut à l'aide d'une lentille divergente (pas la peine d'essayer allumer un feu avec...). Elle sert à rejeter l'image d'un point à l'infini sur le PR de l'œil myope. Ainsi, si vous portez des lentilles correctrices de 2 dioptries, cela veut dire que votre PR est à 50 cm devant vos lunettes, au foyer image des lentilles divergentes.

SCHEMA

Hypermétropie : Au contraire du myope, l'hypermétrope ne voit pas bien de près, mais il doit faire des efforts d'accomodation pour pouvoir voir net à l'infini.. Son cristallin n'est « pas assez convergent » (même si en vrai, il est plutôt trop court). Le PR est virtuel (il est derrière la tête !) et le PP est plus éloigné que l'œil normal. Pour corriger ce défaut, on utilise une lentille convergente (qui peut être utilisée comme loupe, ce qui grossit les yeux et permet aussi d'allumer un feu à Koh Lanta).

De même que pour la correction de la myopie, le but est de renvoyer le PR à l'infini pour que l'œil puisse observer des objets à l'infini sans accomoder

SCHEMA

Exercice $\mathcal{S}2$.7 Corrections oculaires

Montrer qu'il y a un lien direct entre la position du punctum remotum et la correction à apporter pour corriger myopie ou hypermétropie.

2 Notion de grossissement

Avant d'attaquer l'étude des instruments d'optique, il est bon de définir une dernière notion : la notion de « grossissement ». On a déjà la notion de **grand**issement γ qui est le rapport des taille (linéaire) de l'image et de l'objet : $\overline{\mathrm{A'B'}}/\overline{\mathrm{AB}}$. Néanmoins, dans le cas où l'image ou l'objet est rejeté à l'infini, sa taille linéaire est aussi infini donnant un grandissement γ soit infini, soit nul, ce qui n'est guère utile en pratique... Or, on a vu au paragraphe précédent que l'œil est naturellement fabriqué pour regarder à l'infini, on essaie donc autant que faire se peut de se ramener à ce cas.

Dans le ciel, le Soleil (de rayon $\mathrm{R}_\odot = 7,0.10^5$ km à une distance $d_{\mathrm{TS}} = 1,5.10^8$ km) et la Lune (de rayon $\mathrm{R_L} = 1,7.10^3$ km à une distance $d_{\mathrm{TL}} = 3,8.10^5$ km) ont presque la même taille *angulaire*, c'est-à-dire que l'angle $\alpha = \mathrm{R}/d$ sous lequel on voit le rayon de chaque astre est presque le même, ce qui rend d'ailleurs les éclipses de Soleil sur Terre tellement impressionnantes (on a $\alpha_\odot = 4,7.10^{-3}$ rad et $\alpha_{\mathrm{L}} = 4,5.10^{-3}$ rad).

Pour bien voir un objet, ce n'est pas tant la taille de l'image qui compte, mais l'angle sous lequel on la voit (puisque la résolution de l'œil est limitée *angulairement*). On définit donc le grossissement d'un système optique comme le rapport de l'angle α' sous lequel on voit l'objet au travers du système optique et de l'angle α sous lequel on le verrait au plus près sans aide de ce système optique.

$$\boxed{\mathrm{G} = \frac{\alpha'}{\alpha}}$$

Exercice $\mathcal{S}2$.8 Lunette astronomique

Montrer que pour une lunette astronomique, c'est-à-dire pour deux lentilles convergentes de distances focales respectives f_1' et f_2' montées de sorte que $\mathrm{F}_1' = \mathrm{F}_2$, le grossissement vaut en valeur absolue

$$\boxed{|\mathrm{G}| = \frac{f_1'}{f_2'}}$$

3 Le microscope

Un microscope est constitué de deux lentilles convergentes séparées d'une vingtaine de cm. Notons Δ la distance $\overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{F}_2}$. Essayons de calculer ce qu'on appelle la « latitude de mise au point » du microscope pour montrer qu'elle est très faible (de l'ordre du micromètre), ce qui impose un protocole strict pour utiliser l'appareil que vous avez pu expérimenter lors des TP de SVT au lycée.

Prenons pour fixer les idées les valeurs suivantes : $f_1' = 0,40$ cm, $f_2' = 2,5$ cm et $\Delta = 16$ cm. Déterminons la position A_∞ de l'objet qu'il faut placer devant la première lentille pour que l'image finale par la seconde se trouve à l'infini. Pour que ce soit le cas, il faut que la première lentille envoie son image sur le foyer objet F_2 de la seconde. En appliquant la formule de conjugaison de Newton à la première lentille, on a

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_\infty} \times \overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{F}_2} = -{f_1'}^2 \qquad \text{soit} \qquad \overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_\infty} = -\frac{{f_1'}^2}{\Delta} = -0,10 \text{ mm}$$

L'objet doit se trouver très près du foyer de la première lentille, elle-même de très faible focale, ce qui impose le protocole de réglage : la lame est quasiment en contact avec l'objectif du microscope au début du réglage (attention à la casse !).

Essayons à présent de déterminer la position A_δ où doit se trouver l'objet pour que l'on soit à l'autre bout de la latitude de mise au point, c'est-à-dire que l'image A' soit à une distance $\delta = 25$ cm de l'œil que l'on prendra pour simplifier au niveau du foyer image F_2' de la seconde lentille. Notons A_1 l'image intermédiaire. L'application de Newton à la seconde lentille donne

$$\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1} \times \overline{\mathrm{F}_2'\mathrm{A}'} = -{f_2'}^2 \qquad \text{soit} \qquad \overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1} = \frac{-{f_2'}^2}{-\delta} = \frac{{f_2'}^2}{\delta}$$

L'application de Newton à la première lentille donne alors

$$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_\delta} \times \overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{A}_1} = -{f_1'}^2 \qquad \text{soit} \qquad \overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_\delta} = -\frac{{f_1'}^2}{\overline{\mathrm{F}_1'\mathrm{F}_2} + \overline{\mathrm{F}_2\mathrm{A}_1}} = -\frac{{f_1'}^2}{\Delta + {f_2'}^2/\delta} = -0,098 \text{ mm}$$

La différence avec la valeur précédente est très faible ! Pour éviter d'avoir des soucis de chiffres significatifs, il faut faire l'application numérique sur la différence directement (ou garder les valeurs en mémoire dans la calculatrice)

$$\boxed{\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_\delta} - \overline{\mathrm{F}_1\mathrm{A}_\infty} = -\frac{{f_1'}^2}{\Delta + {f_2'}^2/\delta} + \frac{{f_1'}^2}{\Delta} = 1,5\ \mu\text{m}}$$

On comprend mieux le sens du terme « vis micrométrique »...

NB : on aurait pu seulement faire le calcul de A_δ et faire tendre δ vers $+\infty$ pour obtenir A_∞.

Les indications portées sur les objectifs et oculaires (« $\times 40$ », « $\times 100$ ») n'ont pas les mêmes significations selon qu'il sont sur l'objectif (première lentille) ou l'oculaire (deuxième lentille, là où l'on met l'œil). En effet, sur l'objectif, cela donne la valeur absolue du grandissement γ_1 alors que sur l'oculaire, cela correspond au grossissement commercial G_2 de la seconde lentille, c'est-à-dire au grossissement si on plaçait l'œil au niveau du foyer image de la lentille. Le grossissement total du microscope est donné, en notant $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ l'image intermédiaire, par

$$\mathrm{G}_{\text{tot}} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha'}{\overline{\mathrm{AB}}/\delta} = \frac{\alpha'}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}/\delta} \times \frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \mathrm{G}_2 \times \gamma_1$$

en assimilant les angles à leurs tangentes. Le grossissement total est donc bien donné par le produit des deux indications même si elles ne représentent pas la même chose et donne bien la multiplication totale du degré de détail de l'objet vu au travers du microscope.

Correction $\mathcal{S}2.1$ Formule de Descartes

La formule de Descartes s'écrit de manière générale $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{f'}$.

1. L'objet étant devant la lentille, on a $p_1 = \overline{\mathrm{OA}_1} < 0$, soit $p_1 = -10$ cm. En isolant p'_1 de la formule de Descartes, on a

$$\boxed{p'_1 = \frac{f'_1 p_1}{p_1 + f'_1} = -20 \text{ cm}} \qquad \text{L'image est virtuelle.}$$

Le grandissement est donné par $\boxed{\gamma_1 = \dfrac{p'_1}{p_1} = 2,0}$ L'image est droite et agrandie

2. La distance focale se déduit de la vergence par $f'_2 = \dfrac{1}{\mathrm{V}_2} = -25$ cm. L'image étant réelle, elle est dans l'espace image donc $p'_2 = \overline{\mathrm{OA}'_2} = 10$ cm > 0. On isole p_2 de la formule de Descartes pour obtenir

$$\boxed{p_2 = \frac{p'_2 f'_2}{f'_2 - p'_2} = 7,1 \text{ cm}} \qquad \text{L'image est virtuelle.}$$

Le grandissement est donné par $\boxed{\gamma_2 = \dfrac{p'_2}{p_2} = 1,4}$ L'image est droite et agrandie

3. L'image étant virtuelle, elle est dans l'espace objet et $p'_3 = -30$ cm < 0. À l'inverse, l'objet étant virtuel, il est dans l'espace image et $p_3 = 10$ cm > 0. En isolant f'_3 dans la formule de Descartes, on obtient

$$\boxed{f'_3 = \frac{p_3 p'_3}{p_3 - p'_3} = -7,5 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_3 = \frac{1}{f'_3} = -13\ \delta}$$

Ne pas oublier que les dioptries sont des m^{-1}, c'est-à-dire qu'il faut bien remettre la distance focale en mètres et ne pas la garder en centimètres pour l'application numérique.

Correction $\mathcal{S}2.2$ Descartes à deux lentilles accolées

Considérons les transformations $\mathrm{A} \xrightarrow{\mathscr{L}_1} \mathrm{A}_1 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} \mathrm{A}'$. Avec ces notations, les formules de Descartes pour les deux lentilles s'écrivent respectivement

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{O_1A_1}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O_1A}}} = \mathrm{V}_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\overline{\mathrm{O_2A'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O_2A_1}}} = \mathrm{V}_2$$

Le fait que les deux lentilles sont accolées impose que $\mathrm{O}_1 = \mathrm{O}_2$ que l'on notera O. Si l'on somme membre à membre les deux équations précédentes en prenant en compte cette hypothèse, il vient

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{OA_1}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{OA_1}}} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2$$

soit bien $\boxed{\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OA'}}} - \dfrac{1}{\overline{\mathrm{OA}}} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2}$ qui est la formule recherchée

---

Correction $\mathcal{S}2$.3 Formule de Newton

1. Utilisons la formule de Newton avec $\overline{\mathrm{FA}} = 5,0$ cm et $f' = 50$ cm. On trouve alors

$$\boxed{\overline{\mathrm{F'A'}} = \frac{-f'^2}{\overline{\mathrm{FA}}} = -5,0\ \mathrm{m}}$$

L'image est virtuelle car $\overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OF'}} + \overline{\mathrm{F'A'}} = f' + \overline{\mathrm{F'A'}} = -4,5\ \mathrm{m} < 0$: elle est placée *avant* la lentille.

2. Le grandissement est donné par $\boxed{\gamma = \dfrac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}} = 10}$. L'image est donc droite et agrandie.

3. Pour une lentille divergente, seule change $f' = -50$ cm. On trouve alors

$$\boxed{\overline{\mathrm{F'A'}} = \frac{-f'^2}{\overline{\mathrm{FA}}} = -5,0\ \mathrm{m}}$$

L'image est virtuelle car $\overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OF'}} + \overline{\mathrm{F'A'}} = f' + \overline{\mathrm{F'A'}} = -5,5\ \mathrm{m} < 0$: elle est placée *avant* la lentille.

Le grandissement est à nouveau donné par $\boxed{\gamma = \dfrac{f'}{\overline{\mathrm{FA}}} = -10}$. L'image est donc renversée et agrandie.

Placer un objet après le foyer objet d'une lentille divergente nous emmène nécessairement dans l'espace image de la lentille : l'objet est forcément virtuel donc ne peut être réalisé qu'en faisant l'image d'un autre objet au travers d'un système optique placé devant la lentille.

Correction $\mathcal{S}2$.4 $\mathrm{D} > 4f'$ pour une lentille convergente

Une autre manière de procéder est de regarder la fonction $\mathrm{D}(p)$ et voir qu'elle passe par un minimum qui vaut $4f'$ tant que $p < 0$. On a en effet montré que $\mathrm{D} = p' - p$ et la relation de Descartes permet sans peine d'obtenir

$$p' = \frac{pf'}{p+f'} \qquad \text{de sorte que} \qquad \mathrm{D} = p\left(\frac{f'}{p+f'} - 1\right) = -\frac{p^2}{p+f'}$$

Dérivons cette dernière expression par rapport à p pour déterminer si des extrema existent et où ils se trouvent :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{d}p} &= -2\frac{p}{p+f'} + \frac{p^2}{(p+f')^2} \\ &= \frac{p^2 - 2p(p+f')}{(p+f')^2} \\ \frac{\mathrm{dD}}{\mathrm{d}p} &= \frac{-p(p+2f')}{(p+f')^2}\end{aligned}$$

La dérivée s'annule en $p = 0$ (mais alors p' et D sont nuls aussi, ce qui n'est guère intéressant) et en $p = -2f'$. Pour ce dernier cas, on a $p' = 2f'$ et donc $\mathrm{D} = 4f'$. Il s'agit bien d'un minimum puisque $\mathrm{D}(p)$ tend de ce côté vers $+\infty$ à la fois si $p \to -\infty$ et si $p \to -f'$. On a donc bien sur toute la zone où un objet réel donne une image réelle (soit $p \in \,]-\infty\,; -f'\,]$) que

$$\boxed{\mathrm{D} \geqslant 4f'}$$

Correction $\mathcal{S}2.5$ Distance focale d'accomodation

L'œil étant normal, le PR est à l'infini de sorte que $f'_{\text{max}} = d = 12$ mm. Pour le PP, il faut faire le calcul avec $p = -25$ cm et $p' = d$ pour obtenir

$$\boxed{f'_{\text{min}} = \frac{p \times d}{p - d} = 11,5 \text{ mm}}$$

Correction $\mathcal{S}2.6$ Mr de Beauregard

Pour pouvoir apprécier un regard, il faut au moins pouvoir distinguer les deux yeux, c'est-à-dire que l'écart angulaire α entre les deux yeux de notre point de vue excède le pouvoir séparateur ε de l'œil. Les yeux sont écartés d'environ $\delta = 10$ cm à une distance d que l'on recherche. L'angle α est petit et peut donc être assimilé à sa tangente δ/d de sorte que

$$\frac{\delta}{d} \approx \alpha > \varepsilon \qquad \text{se réécrive} \qquad \boxed{d < \frac{\delta}{\varepsilon} = 0,34 \text{ km}}$$

Correction $\mathcal{S}2.7$ Corrections oculaires

Les corrections oculaires sont faites de sorte qu'après correction, le sujet voit net sans accomoder à l'infini. Il faut donc que les verres correcteurs envoient l'infini sur le PR effectifs de la personne. Graphiquement, cela s'écrit

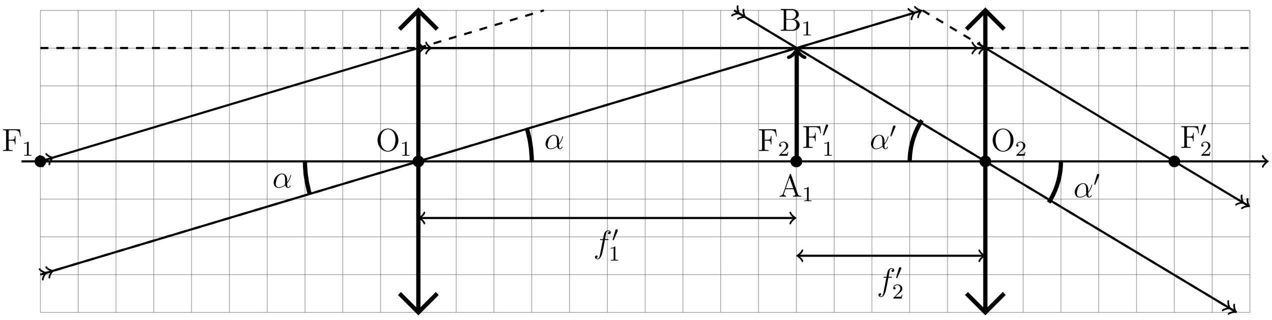
$$\mathrm{A}_\infty \xrightarrow{\text{lunettes}} \mathrm{F'}_{\text{lunette}} = \mathrm{A}_{\text{PR}} \xrightarrow{\text{œil}} \text{rétine}$$

Par conséquent, si la personne est myope, le PR est à distance finie devant la personne donc on a $\mathrm{OF'}_{\text{lunette}} < 0$ et la correction doit bien être une lentille divergente. Au contraire, si la personne est hypermétrope, le PR est *derrière* la tête de sorte que $\mathrm{OF'}_{\text{lunette}} > 0$ et la correction doit être une lentille convergente.

Correction $\mathcal{S}2.8$ Lunette astronomique

Le schéma de la lunette est le suivant où un objet à l'infini A_∞ donne une image à l'infini A'_∞ après passage par une image intermédiaire

$$\mathrm{A}_\infty \xrightarrow{\mathscr{L}_1} \mathrm{F}'_1 = \mathrm{A}_1 = \mathrm{F}_2 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} \mathrm{A}'_\infty$$



On remarque sur le graphique qu'en valeurs absolues, les angles α sous lequel on voit l'objet et α' sous lequel est vu l'image après passage dans le système peuvent s'exprimer en fonction de la taille de l'objet intermédiaire $\mathrm{A_1B_1}$ via

$$|\alpha| \approx |\tan\alpha| = \frac{\mathrm{A_1B_1}}{f'_1} \qquad \text{et} \qquad |\alpha'| \approx |\tan\alpha'| = \frac{\mathrm{A_1B_1}}{f'_2}$$

Le grossissement est donc bien donné par

$$\boxed{|\mathrm{G}| = \frac{|\alpha'|}{|\alpha|} = \frac{\mathrm{A_1B_1}}{f'_1} \times \frac{f'_2}{\mathrm{A_1B_1}} = \frac{f'_2}{f'_1}}$$