S00

Homogénéité et incertitudes

Partie I

Homogénéité

1 Unités

En physique, une unité de mesure est un étalon nécessaire pour la mesure d'une grandeur physique.

Différents systèmes d'unités sont basés sur des choix différents du jeu d'unités fondamentales, mais de nos jours, le système d'unités le plus utilisé est le système international d'unités (SI), dans lequel il y a sept unités de base. Toutes les autres unités rattachés au SI peuvent être dérivées de ces unités de base.

Attention, il faut bien différencier les dimensions (longueur, masse, temps) des unités (mètre, kg, s). Les différentes unités SI sont données ci-après

a) La seconde (s), unité de temps

La seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 à une température de 0 K (13e CGPM (1967-1968), Résolution 1, CR 103). Historiquement, on définissait la seconde comme 1/86400^{e} de jour solaire moyen.

`https://www.youtube.com/watch?v=Y2kz-JdvIh0`

b) Le mètre (m), unité de longueur

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 seconde (17e CGPM (1983), Résolution 1, CR 97). Historiquement, la première définition officielle et pratique du mètre (1791) était basée sur la circonférence de la Terre, et valait 1/40000000 d'un méridien. Auparavant, le mètre fut proposé en tant qu'unité universelle de mesure comme la longueur d'un pendule qui oscille avec une demi-période d'une seconde (John Wilkins (1668) puis Tito Livio Burattini (1675).

`https://www.youtube.com/watch?v=GEKU3x8uB6o`

c) Le kilogramme (kg), unité de masse

Le kilogramme (nom originel, le grave) est l'unité de masse.

Nouvelle définition ($>$ 2018) Définie à partir de la constante de Planck qui vaut alors très exactement $6,62607015.10^{-34}$ quand elle est exprimée en J.s, soit en kg.m^2.s^{-1}.

Ancienne définition ($\leqslant$ 2018) Égale à la masse du prototype international du kilogramme. Ce dernier, en platine-iridium (90% - 10%), est gardé au Bureau international des poids et mesures à Sèvres, en

France (1re CGPM (1889), CR 34-38).

Historiquement Masse d'un décimètre cube d'eau, soit un litre, à 4°C.

https://www.youtube.com/watch?v=q1r9iSm07OU

d) L'ampère (A), unité de courant électrique

Nouvelle définition (> 2018) Définie à partir de la charge élémentaire qui vaut alors très exactement $1{,}602176634.10^{-19}$ quand elle est exprimée en coulomb, soit en A.s.

Ancienne définition ($\leqslant$ 2018) Intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance d'un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à 2.10^{-7} newton par mètre de longueur (9e CGPM (1948), Résolution 7, CR 70).

L'avantage de la nouvelle définition est dans sa réalisation pratique (plus facile à obtenir) et du fait qu'elle ne dépend plus de la définition du mètre et du kilogramme. Néanmoins, la permittivité diélectrique du vide ε_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 perdent leur caractère fixé (du fait de la définition $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ S.I. et de la relation $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$) pour avoir à présent une marge d'erreur expérimentale.
https://www.youtube.com/watch?v=P8zXHQnuD6k

e) Le kelvin (K), unité de température

Nouvelle définition (> 2018) Définie à partir de la constante de Boltzmann qui vaut alors très exactement $1{,}380649.10^{-23}$ quand elle est exprimée en $\mathrm{J.K^{-1}}$, soit en $\mathrm{kg.m^2.s^{-2}.K^{-1}}$.

Ancienne définition ($\leqslant$ 2018) Fraction $1/273{,}16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau (13e CGPM (1967), Résolution 4, CR 104). Cette définition fait du kelvin une mesure de température égale en variation à celle du degré Celsius, mais basée sur le zéro absolu.

Le kelvin dépend donc à présent des définition du kilogramme, du mètre et de la seconde.

Remarque : Avec T la température en kelvin et θ la température en °C, la formule de conversion est

$$\boxed{\mathrm{T} = \theta + 273{,}15}$$

https://www.youtube.com/watch?v=P8zXHQnuD6k

f) La mole (mol), unité de quantité de matière

Nouvelle définition (> 2018) Définie à partir du nombre d'Avogadro qui vaut alors très exactement $6{,}02214076.10^{23}$ quand il est exprimé en $\mathrm{mol^{-1}}$.

Ancienne définition ($\leqslant$ 2018) Quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 gramme de carbone 12 (14e CGPM (1971), Résolution 3, CR 78). Ce nombre est appelé nombre d'Avogadro. Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.

Valeur approximative à retenir $\boxed{\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = 6{,}022.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}}$

https://www.youtube.com/watch?v=hLavUzFWITY

g) La candela (cd), unité d'intensité lumineuse

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de $1/683$ watt par stéradian (16e CGPM (1979) Résolution 3, CR 100).
https://www.youtube.com/watch?v=8MaCc_fojsw

2 Notations

Il faut bien différencier « unité » de « dimension ». Une unité est associée à une unique dimension, mais une dimension peut s'exprimer en plusieurs unités (exemple : une longueur en mètres, pieds, yards, coudées, etc.). Pour pouvoir travailler avec les dimensions, on utilise la notation en crochets telle que $[g]$ signifie « dimension de la grandeur g ». On introduit aussi des raccourcis pour représenter les 7 dimensions utilisés dans le système international :

$$\begin{aligned}
\text{Longueur :}\quad & \mathrm{L} = [x] = [\ell] = [h] = [r] \\
\text{Masse :}\quad & \mathrm{M} = [m] = [\mathrm{M_T}] \\
\text{Temps :}\quad & \mathrm{T} = [t] = [\tau] = [1/\omega] \\
\text{Intensité :}\quad & \mathrm{I} = [i] = [\mathrm{I_0}] \\
\text{Température}\quad & \Theta = [\mathrm{T}] = [\theta] \\
\text{Quantité de matière}\quad & \mathrm{N} = [n] = [n_{\mathrm{H_2O}}]
\end{aligned}$$

3 Et les angles ?

Les angles s'expriment en radian (rad, pour les angles plats) ou en stéradian (sr, pour les angles solides). Ils sont classés dans les unités dérivées car s'expriment comme des rapports de quantités dimensionnées (le rapport étant globalement adimensionné)

Angles plats mesurés en radian qui est le rapport de la longueur de l'arc d'un cercle intercepté par cet angle et du rayon du cercle. De ce fait, la longueur d'un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle α vaur $\mathrm{R}\alpha$ (formule à retenir car très utile). Comme l'arc maximal vaut le périmètre du cercle qui vaut $2\pi\mathrm{R}$, la mesure d'un angle varie donc de 0 à 2π en général.

Angles solides mesurés en stéradian qui est le rapport de la surface de la sphére interceptée par cet angle solide et du carré du rayon de la sphère. L'angle solide maximal vaut donc 4π puisque la surface d'une sphère de rayon R vaut $4\pi\mathrm{R}^2$.

4 Homogénéité des formules littérales

On ne peut jamais être sûr qu'une formule est effectivement juste, en revanche, on peut savoir sans hésitation si une formule est grossièrement fausse : en effet, s'il n'y a pas homogénéité des unités dans les différentes branches de la formule, alors elle est nécessairement fausse. En particulier, on peut noter plusieurs règles de base,

a) Deux termes qui s'additionnent doivent avoir même dimension

Si un calcul fait intervenir la quantité $a+b$, alors a et b doivent être de même dimension, soit $[a]=[b]$ (« On ne peut pas sommer des pommes et des bananes »). Notamment, si l'on tombe sur une expression du type $1+\mathrm{R}$ avec R une quantité dimensionnée, c'est qu'il y a eu un souci quelque part...

b) Deux termes égalés doivent avoir même dimension

Les deux termes de part et d'autre du signe « = » doivent avoir même dimension (une force ne peut pas être égale à une énergie par exemple, ce n'est pas la même chose !). Remarque, cela découle directement de la règle précédente puisque si $a+b=0$, alors $a=-b$ et a et b doivent avoir même dimension ($[a]=[b]$).

c) La dimension du produit est le produit des dimensions

Lorsqu'on multiplie (ou divise) des quantité dimensionnées, les dimensions se multiplient (ou se divisent) de la même façon. Par exemple

$$\left[\frac{1}{2}\,m\,v^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right] \times [m] \times [v]^2 = 1 \times \mathrm{M} \times \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^2 = \mathrm{M.L^2.T^{-2}}$$

d) L'argument d'une fonction mathématique doit être adimensionné

L'application de l'exponentielle, du sinus, du cosinus (normal ou hyperbolique), de la tangente, etc. doit toujours se faire sur une grandeur sans dimension (rapport de deux quantités de même dimension ou produit de deux quantités de dimensions inverses). Par exemple $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ (τ est un temps) ou $\cos(\omega t)$ (ω est l'inverse d'un temps). Seule exception : le logarithme car mathématiquement, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, ce qui rend plus difficile le suivi de la dimension.

e) Le résultat d'une fonction mathématique est sans dimension

Une exponentielle, un logarithme, un cosinus, un sinus, une tangente, etc. renvoient tous des nombres purs, c'est-à-dire des quantité adimensionnées : $\left[\mathrm{e}^{-t/\tau}\right] = 1$

Exercice $\mathcal{S}0$.1 Tout ceci est-il bien homogène ?

Déterminer lesquels des exemples suivants sont grossièrement faux et lesquels ont une chance d'être bons.

1. Relativité $\quad \mathrm{E} = mc^2$
2. Électricité $\quad \mathrm{U} = \mathrm{R}i + \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
3. Thermodynamique $\quad \mathrm{E} = \mathrm{PV}$
4. Mécanique $\quad a = mg - \dfrac{\mathrm{F}_{\mathrm{frott}}}{m}$
5. Électricité $\quad \underline{u}_{\mathrm{s}} = \dfrac{\underline{u}_{\mathrm{e}}}{1 + \mathrm{jRC}\omega}$

Partie II

Incertitudes

1 Vocabulaire

Mesure ou mesurage : En métrologie, « processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur ». NB : les mesurages ne s'appliquent qu'aux propriétés quantitatives ; sont donc exclues les propriétés qualitatives.

Mesurande : Grandeur que l'on veut mesurer.

Grandeurs d'influences Grandeurs (pression, température, vitesse du vent, âge du capitaine) qui peuvent influer sur le résultat du mesurage.

Décalage systématique décalage qui se fait dans le même sens et avec la même valeur à chaque fois que l'on applique le protocole de mesure. Cela peut-être une erreur humaine (on regarde le bas du ménisque plutôt que le haut du ménisque systématiquement) ou une erreur instrumentale (mauvais étalonnage ou réglage du zéro), ou encore une erreur inhérente au protocole utilisé (exemple de la chute d'une bille retenue par un électroaimant pour mesurer la valeur de g).

Décalage aléatoire décalage qui à chaque mesure a une valeur et un signe aléatoire. En valeur moyenne, il vaut 0. Il peut-être humaine (on regarde sans faire attention le bas ou le haut du ménisque, ou on déclenche manuellement un chronomètre) ou instrumental (grandeurs d'influence fluctuantes).

Justesse Aptitude à donner des résultats dont la valeur moyenne est proche de la valeur attendue, donc avec un minimum de décalage systématique

Fidélité Aptitude à donner des résultats reproductibles (deux mesures successives redonnent quasiment la même valeur), donc avec un minimum de décalage aléatoire.

Exactitude Aptitude à être à la fois fidèle et juste.

2 Sources d'incertitude

Savoir identifier les sources d'incertitudes :

— Humaine : être attentif quand on prend des mesures !
— Instrumentale (précision d'une règle) : choisir l'instrument adapté
— Protocolaire (incertitudes induites par le protocole) : sélectionner le meilleur protocole (cf. mesures de tension et de courant pour caractéristique)

3 Détermination de l'incertitude absolue lors d'une mesure

Une mesure expérimentale doit toujours être associée à une incertitude de mesure car ce qui nous intéresse n'est pas tant la valeur mesurée que la précision à laquelle on a mesuré cette valeur : connaître la position d'une aiguille à 10 mètres près dans votre appartement ne vous aidera pas forcément beaucoup à la retrouver alors que connaître à la même précision le site d'atterissage forcé d'un avion dans la jungle amazonienne permettra certainement d'en secourir les occupants !

Mais avant d'aller plus loin, parlons un peu notations. Il existe deux notations prédominantes dans le monde des incertitudes : celle en « Δx » (qui se rapproche d'une notion d'intervalle autour duquel la valeur vraie devrait se trouver) et celle en « $u(x)$ » (« u » pour *uncertainty*) que l'on va réserver aux incertitudes-type que l'on va définir juste après.

Chaque notation a ses avantages et ses inconvénients, ses inconditionnels comme ses détracteurs. En particulier, le $u(x)$ serait problématique en électricité où les tensions sont historiquement notées u alors que le Δx va poser des soucis en mécanique (où la variation d'énergie potentielle se note $\Delta \mathrm{E_p}$) ou encore en thermodynamique (où on considère souvent des variations, comme la variation d'enthalpie $\Delta \mathrm{H}$ ou la variation d'entropie $\Delta \mathrm{S}$).

Bref, comme souvent, il faudra s'adapter aux énoncés et essayer de se fondre dans le décor en fonction des volontés de chacun.

a) Notion d'incertitude-type

L'incertitude sur une mesure, c'est le fait que le résultat de cette mesure soit incertain [1], qu'il y ait une certaine variabilité lors de la mesure. L'incertitude-type, c'est une manière de *mesurer* cette incertitude, cette variabilité. Et attention, il ne va pas falloir confondre avec les différents types d'incertitude (type A et type B) que l'on va décrire juste après...

Vous l'avez compris, cela peut vite tourner à l'imbroglio alors essayons de faire simple : l'incertitude-type sur x, c'est ce qu'on note $u(x)$ et c'est ce qui est relié à l'écart-type des distributions que l'on va considérer. On aura l'occasion d'y revenir dans les capacités numériques qui sont reliées à ce sujet.

b) Incertitude de type A, cas des mesures multiples

Faire l'expérience de la chute de l'aimant dans les tubes PVC ou cuivre avec chronomètres et mesures par la classe.

On adopte pour valeur de mesure la valeur moyenne $\overline{x}$ des différentes mesures x_i et l'incertitude est reliée à l'écart-type « expérimental » défini par

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

c'est-à-dire la dispersion des mesures autour de la valeur moyenne. L'incertitude-type est alors donnée par

$$\boxed{u(\overline{x}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}}$$

1. dans une certaine mesure...

c) Incertitude de type B, cas d'une mesure unique

L'incertitude est donnée par la précision de l'appareil ou de son utilisateur : consulter la notice (multimètre par exemple) ou estimer l'incertitude de lecture (règle par exemple). Voir exemple en TP.

Lorsqu'il y a à la fois une incertitude donnée par le constructeur et une incertitude de lecture (dosage à la burette graduée par exemple), on somme les carrés des incertitudes (genre théorème de Pythagore généralisé) :

$$u(\mathrm{V}) = \sqrt{u_{\text{lecture}}(\mathrm{V})^{\ 2} + u_{\text{constructeur}}(\mathrm{V})^{\ 2}}$$

On voit que si l'une des deux incertitudes précédentes prédomine sur l'autre, elle va rapidement l'emporter. Par exemple, si $u_{\text{lecture}}(\mathrm{V}) = 10u_{\text{constructeur}}(\mathrm{V})$, alors

$$\begin{aligned}
u(\mathrm{V}) &= \sqrt{10^2+1} \times u_{\text{constructeur}}(\mathrm{V}) \\
&= \sqrt{101} \times u_{\text{constructeur}}(\mathrm{V}) \\
&\approx 10\, u_{\text{constructeur}}(\mathrm{V}) \\
u(\mathrm{V}) &\approx u_{\text{lecture}}(\mathrm{V})
\end{aligned}$$

4 Z-score (pour comparer si on a une valeur attendue)

Si on connaît la valeur attendue sur une grandeur mesurée, on peut faire un Z-score pour donner un avis final quant à la compatibilité des résultats :

$$\mathrm{Z} = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{\sqrt{u(x)^2 + u(x_{\text{ref}})^2}}$$

Si $\mathrm{Z} > 2$, on peut dire que les mesures sont incompatibles. Au contraire si $\mathrm{Z} < 2$, les résultats sont compatibles.

Exemple : on fait une mesure censée donner la valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}81$ m.s^{-2} avec $u(g) = 0{,}01$ m.s^{-2}. On mesure $g_{\text{mes}} = 9{,}88$ m.s^{-2} avec $u(g_{\text{mes}}) = 0{,}07$ m.s^{-2}, le Z-score est :

$$\mathrm{Z} = \frac{|9{,}88 - 9{,}81|}{\sqrt{0{,}07^2 + 0{,}01^2}} = 1{,}0$$

Notre mesure est donc compatible avec la valeur tabulée de g.

Si on avait eu $u(g_{\text{mes}}) = 0{,}02$ m.s^{-2}, Z = 3,1 et on aurait eu des mesures incompatibles.

a) Lien entre incertitude-type et intervalle de confiance

L'intérêt des incertitudes-type va être dans la modélisation du processus de propagation des incertitudes. En modélisation gaussienne, l'incertitude-type correspond directement à l'écart-type de la gaussienne que l'on va utiliser pour faire les tirages. En gros, vous vous dites que si on devait choisir au hasard une valeur cohérente avec votre mesure, alors la probabilité d'avoir une valeur donnée va suivre une distribution gaussienne de valeur moyenne x et d'écart-type[2] $u(x)$. Comme on va le voir dans la capacité numérique correspondante, si on fait un grand nombre de tirage, alors l'histogramme des valeurs tirées (on compte pour un petit intervalle donné combien de tirage finissent dans cet intervalle) a la forme d'une gaussienne avec la bonne moyenne et le bon écart-type.

Si on s'amuse à présent à regarder où se trouvent 95% des tirages effectués sur notre histogramme (par exemple 9500 valeurs sur les 10000 tirées), alors on se rend compte que 95% des valeurs tirées se trouvent à moins de deux écarts-type de la valeur moyenne. En d'autre terme, lors d'un tirage aléatoire, on a 95% de chance de se retrouver dans l'intervalle $[x - 2u(x); x + 2u(x)]$ qui est ainsi appelé intervalle de confiance à 95%.

2. d'où le « type » de incertitude-« type ».

Remarquez que ces deux incertitudes-type d'écart correspondent peu ou prou à un Z-score de 2 puisque celui-ci est une mesure de l'écart entre les valeurs comparée à l'incertitude-type.

b) Cas des grandeurs composées

Si l'on essaie d'évaluer une grandeur G qui s'exprime à partir de plusieurs autres variables mesurées (disons x et y) sous la forme $\mathrm{G} = f(x, y)$ avec f une certaine fonction des deux variables x et y, alors on peut montrer qu'une bonne estimation de l'incertitude-type sur la valeur de G trouvée via cette formule est donnée par

$$u(\mathrm{G}) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,u(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,u(y)\right)^2}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à x, c'est-à-dire la dérivée de $f(x, y)$ par rapport à x en considérant que y reste constante lors de l'opération.

NB : par la suite, on confondra allègrement[3] la grandeur G et la fonction $f(x, y)$ qui permet de l'obtenir à partir de x et y de sorte qu'on parlera sans s'embêter de $\mathrm{G}(x, y)$.

Exercice $\mathcal{S}0$.2 Mesure de tension

Estimer l'incertitude-type $u(\mathrm{U})$ sur la valeur d'une tension obtenue via la mesure d'une résistance et d'une intensité à l'aide de la fonction $\mathrm{U} = \mathrm{RI}$. Calculer (et simplifier) aussi l'incertitude relative $u(\mathrm{U})/\mathrm{U}$.

c) Cas particulier des sommes et différences

En particulier, si on mesure une distance ℓ via une différence de deux positions x_1 et x_2, on a $\ell = x_2 - x_1$ (soit bien $\mathrm{G} = f(x, y) = y - x$ avec $\mathrm{G} = \ell$, $x = x_1$ et $y = x_2$), on obtient en appliquant la formule précédente

$$u(\ell) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$$

les carrés des incertitudes s'additionnent à nouveau. Il en va de même si la grandeur est la somme de deux (ou plus) autres grandeurs mesurées.

d) Incertitude relative pour les produits et quotients

Un autre cas qui se présente assez souvent est le produit ou le rapport de grandeurs. Par exemple, si $\mathrm{G} = x/y$ ou $\mathrm{G} = x \times y$, alors on peut montrer[4] que

$$\frac{u(\mathrm{G})}{\mathrm{G}} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$$

Exercice $\mathcal{S}0$.3 Mesure de résistance

Montrer la formule précédente dans le cadre d'une mesure de résistance via la mesure d'une tension et d'un courant : $\mathrm{R} = \mathrm{U}/\mathrm{I}$.

NB : $u(\mathrm{G})/\mathrm{G}$ correspond à l'incertitude *relative*, c'est-à-dire au pourcentage d'erreur quand on compare l'incertitude sur une grandeur à cette grandeur elle-même. Par exemple, mesurer une distance à un mètre près, ce n'est pas terrible dans l'absolu (penser à la taille d'une personne par exemple, 50% d'incertitude

3. À la mode des physiciens...
4. Voir exercices 2 et 3

environ), mais s'il s'agit de mesurer la distance Terre-Soleil à 1 m près, alors l'incertitude relative est de $1/150.10^9 \approx 10^{-9}\%$, ce qui est phénoménal !

Pour un cas un peu plus général, si on a $\mathrm{G} = x^p\,y^q$, alors

$$\boxed{\frac{u(\mathrm{G})}{\mathrm{G}} = \sqrt{p^2\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + q^2\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}}$$

Exercice *S0.4* Et si $\mathrm{G}(x, y) = x^p\,y^q$?

Démontrer la formule précédente.

---

5 Présentation des résultats : chiffres significatifs

a) Définition

Le nombre de chiffres significatifs indique la précision d'une mesure physique. Il s'agit des chiffres connus avec certitude plus le premier chiffre incertain. La précision (ou l'incertitude) avec laquelle on connait la valeur d'une grandeur dépend du mesurage.

b) Cas d'une mesure

Après une mesure, on dispose à la fois de la valeur x mesurée, ainsi que d'une estimation $u(x)$ de son incertitude-type (estimation qu'il faut toujours faire en TP !). Par exemple, si on a mesuré une tension u à la valeur $53,246$ V et que le calcul d'incertitudes a montré que $u(u) = 0,3$ V, alors le résultat final doit adapté le nombre de chiffres significatifs de la mesure à celui imposé par l'incertitude :

$$u = 53,2\ \mathrm{V} \qquad ; \qquad u(u) = 0,3\ \mathrm{V}$$

puisque le premier chiffre incertain est le 2.

Exercice *S0.5* Chiffres significatifs après mesure

La notice d'un ampèremètre indique que la mesure est faite avec l'incertitude $0,2\%\mathrm{L} + 2\mathrm{UR}$ où L (pour « Lecture ») représente la valeur lue sur l'écran et UR (pour « Unité de Représentation ») correspond à la *position* du dernier chiffre affiché à l'écran. Si on lit à l'écran $4,276$ mA, quelle est l'incertitude ?

---

c) Cas d'un calcul

Lors d'un calcul, comme on n'a pas le temps matériel de propager correctement les incertitudes, on se rabat sur des règles empiriques pour garder le bon nombre de chiffres significatifs. En particulier

— *Après une addition ou une soustraction*, le résultat ne peut comporter plus de **décimales** [5] que le terme qui en comporte le moins.

— *Après une multiplication ou une division*, le résultat ne peut comporter plus de **chiffres significatifs** [6] que le terme qui en comporte le moins.

5. C'est lié à la notion d'incertitude *absolue* et son mode de calcul lors d'une addition/soustraction.
6. C'est lié à la notion d'incertitude *relative* et son mode de calcul lors d'une multiplication/division.

Exercice $\mathcal{S}0.6$ Chiffres significatifs après calculs

En suivant la formule $k = \dfrac{m \times a}{\ell_0 - \ell}$ avec les valeurs respectives $m = 1,234$ kg, $a = 5,67$ m.s^{-2}, $\ell = 3,2$ m et $\ell_0 = 3,340$ m, donner la valeur de k avec le bon nombre de chiffres significatifs en détaillant les nombres de chiffres significatifs intermédiaires.

Partie III

Compléments

1 Dérivée de fonctions composées

La formule de dérivation des fonction composées s'écrit, sous forme mathématique avec f et g deux fonctions,

$$(f \circ g)' = f' \circ g \times g'$$

Pour le physicien, cette formule s'écrit de manière plus simple. Supposons que la variable de base soit le temps et que la variable intermédiaire soit une position x. On veut donc trouver la dérivée d'une fonction f de variable x dépendant elle-même du temps t, soit $f(x(t))$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Exercice $\mathcal{S}0.7$ Dérivée de fonctions composées

Dériver par rapport au temps les fonction $f(x) = \mathrm{A}\cos(2\pi x/\lambda)$ et $g(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-x/\delta}$ avec $x(t) = \mathrm{L} \times \omega t$.

2 Formules d'approximation

En physique, on arrive rarement à résoudre exactement les équations qui nous sont proposées, mais comme de toutes façons nos mesures sont forcément faites modulo une certaine incertitude, il n'est pas forcément nécessaire de résoudre exactement les équations. Parfois, une bonne approximation permet de gagner énormément de temps de calcul sans que le résultat soit perturbé plus qu'on ne sait le mesurer pour vérifier la prédiction. Les mathématiques (via les « développement limités » que vous verrez plus tard) nous permettent alors d'utiliser certaines approximations. Les suivantes sont valables pour $\varepsilon \ll 1$ (on parle de développement au premier ordre en ε) :

$$\mathrm{e}^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon) \approx 1 + \varepsilon \qquad \ln(1+\varepsilon) \approx \varepsilon \qquad (1+\varepsilon)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\varepsilon$$

$$\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \mathrm{o}(\varepsilon^2) = 1 + \mathrm{o}(\varepsilon) \approx 1 \qquad \sin(\varepsilon) \approx \varepsilon \qquad \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$$

$$\tan(\varepsilon) = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon$$

Exercice $\mathcal{S}0.8$ Simplifications

Simplifier les expressions suivantes au premier ordre non nul en ε à l'aide des formules fournies

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{1+\varepsilon}\right)$
3. $\dfrac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon}{2}}}$
4. $\dfrac{1-\cos(\varepsilon^2)}{\tan^3\varepsilon}$

Correction $\mathcal{S}0.1$ Tout ceci est-il bien homogène ?

1. Einstein s'est peut-être trompé, mais pas au niveau de l'homogénéité : une masse que multiplie une vitesse au carré est homogène à une énergie (penser énergie cinétique), la formule est donc homogène.
2. Même sans savoir ce que représentent les lettres L et C, vous pouvez vous douter qu'elles représentent des quantité bien distinctes et non homogènes entre elles. On ne peut donc pas avoir à la fois $\mathrm{L}\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C}\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ dans la même somme sans avoir un souci d'homogénéité.
3. Une pression correspond à une force par unité de surface, soit $[\mathrm{PV}] = \left[\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{S}}\right] \times [\mathrm{V}] = \dfrac{[\mathrm{F}]}{\mathrm{L}^2} \times \mathrm{L}^3 = [\mathrm{F}] \times \mathrm{L}$

   Or une force que multiplie une distance est une énergie (penser à l'énergie potentielle de pesanteur $\mathrm{E_p} = mg \times z$), la formule est homogène. C'est d'ailleurs à retenir que le produit d'une pression par un volume est une énergie ou que la pression est homogène à une énergie par unité de volume.
4. L'élève qui a écrit cette équation est certainement parti de la RFD qui s'écrit $ma = \sum \mathrm{F}$ et a divisé chaque côté par m... sauf qu'il a oublié de divisé le poids par m puisque mg est une force et non une force par unité de masse.
5. Sachant que RC est homogène à un temps et que ω est une pulsation (donc s'exprime en rad.s^{-1}), le produit $\mathrm{RC}\omega$ est sans dimension (les radians n'ont pas de dimension),

Correction $\mathcal{S}0.2$ Mesure de tension

Notre fonction $\mathrm{G}(x, y)$ s'écrit ici $\mathrm{U}(\mathrm{R}, \mathrm{I}) = \mathrm{RI}$ des variables R et I. Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{R}} = \frac{\partial (\mathrm{RI})}{\partial \mathrm{R}} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{R}} \times \mathrm{I} = \mathrm{I} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{I}} = \frac{\partial (\mathrm{RI})}{\partial \mathrm{R}} = \mathrm{R} \times \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{I}} = \mathrm{R}$$

Ainsi, $$\boxed{u(\mathrm{U}) = \sqrt{\mathrm{I}^2\,(u(\mathrm{R}))^2 + \mathrm{R}^2\,(u(\mathrm{I}))^2}}$$

L'incertitude-type relative s'obtient en divisant $u(\mathrm{U})$ par l'expression de U, c'est-à-dire RI, ce qui donne

$$\boxed{\frac{u(\mathrm{U})}{\mathrm{U}} = \sqrt{\frac{\mathrm{I}^2\,(u(\mathrm{R}))^2 + \mathrm{R}^2\,(u(\mathrm{I}))^2}{(\mathrm{RI})^2}} = \sqrt{\left(\frac{u(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\right)^2 + \left(\frac{u(\mathrm{I})}{\mathrm{I}}\right)^2}}$$

Correction $\mathcal{S}0.3$ Mesure de résistance

Il faut donc calculer les dérivées partielles par rapport aux deux variables U et I. On a

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{U}} = \frac{\partial (\mathrm{U}/\mathrm{I})}{\partial \mathrm{U}} = \frac{1}{\mathrm{I}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{U}} = \frac{1}{\mathrm{I}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{I}} = \frac{\partial (\mathrm{U}/\mathrm{I})}{\partial \mathrm{I}} = \mathrm{U} \times \frac{\partial 1/\mathrm{I}}{\partial \mathrm{I}} = -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}^2}$$

On peut (on doit !) vérifier que les résultats sont toujours respectivement homogène à une résistance divisée par une tension et une résistance divisée par une intensité.
On calcule alors l'incertitude relative

$$\frac{u(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{(u(\mathrm{U})/\mathrm{I})^2 + (\mathrm{U}\,u(\mathrm{I})/\mathrm{I}^2)^2}}{\mathrm{U}/\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{(u(\mathrm{U})/\mathrm{I})^2 + (\mathrm{U}\,u(\mathrm{I})/\mathrm{I}^2)^2}{(\mathrm{U}/\mathrm{I})^2}} = \sqrt{\left(\left(\frac{u(\mathrm{U})}{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{U}\,u(\mathrm{I})}{\mathrm{I}^2}\right)^2\right) \times \left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{U}}\right)^2}$$

soit bien $$\boxed{\frac{u(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} = \sqrt{\left(\frac{u(\mathrm{U})}{\mathrm{U}}\right)^2 + \left(\frac{u(\mathrm{I})}{\mathrm{I}}\right)^2}}$$

Correction $\mathcal{S}0$.4 Et si $G(x,y) = x^p\, y^q$?

Avec $G(x,y) = x^p\, y^q$, on peut calculer les dérivées partielles et remarquer qu'elles s'écrivent

$$\frac{\partial G}{\partial x} = p\, x^{p-1}\, y^q = p\,\frac{x^p\, y^q}{x} = p\,\frac{G}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = x^p\, q\, y^{q-1} = q\,\frac{x^p\, y^q}{y} = q\,\frac{G}{y}$$

soit $u(G) = \sqrt{\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}u(x)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial G}{\partial y}u(y)\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{pGu(x)}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{qGu(y)}{y}\right)^2} = G\sqrt{p^2\left(\dfrac{u(x)}{x}\right)^2 + q^2\left(\dfrac{u(y)}{y}\right)^2}$

d'où

$$\boxed{\frac{u(G)}{G} = \sqrt{p^2\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + q^2\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}}$$

Correction $\mathcal{S}0$.5 Chiffres significatifs après mesure

L'incertitude constructeur se décompose en

$$u(I) = 0,2\% \times 4,276 + 2 \times 1.10^{-3} = 0,01055 \text{ mA}$$

puisque le dernier chiffre (soit l'unité de représentation) est au niveau des micro-ampère donc en 1.10^{-3} mA. On écrit donc

$$\boxed{I = 4,28 \pm 0,01 \text{ mA}}$$

Correction $\mathcal{S}0$.6 Chiffres significatifs après calculs

Le produit ma fait intervenir des nombres à 4 et 3 chiffres significatifs, on n'en garde donc que 3. La différence $\ell - \ell_0$ ne peut pas être plus précise que deux chiffre après la virgule (car ainsi sont données ℓ et ℓ_0) malgré le fait que les données soient indiquées à 3CS. Finalement, le rapport fait intervenir un nombre à 3CS et un à 2CS, on ne doit donc garder que 2CS.

$$\boxed{k = \frac{m \times a}{\ell_0 - \ell} = \frac{7,00}{0,11} = 64 \text{ N.m}^{-1}}$$

Procédons au calcul complet pour voir si ces règles empiriques ont un lien avec celles données précédemment, comme si on avait mesuré m à $u(m) = 10^{-4}$ kg, a à $u(a) = 10^{-3}$ m.s^{-2}, etc.

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m}\, u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial a}\, u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial \ell}\, u(\ell)\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial \ell_0}\, u(\ell_0)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\, u(m)}{\ell_0 - \ell}\right)^2 + \left(\frac{m\, u(a)}{\ell_0 - \ell}\right)^2 + \left(\frac{ma\, u(\ell)}{(\ell_0 - \ell)^2}\right)^2 + \left(\frac{-ma\, u(\ell_0)}{(\ell_0 - \ell)^2}\right)^2}$$

$\boxed{u(k) = 0,8179 \text{ N.m}^{-1} \approx 1 \text{ N.m}^{-1}}$ C'est cohérent !

Correction S0.7 Dérivée de fonctions composées

Les calculs directs donnent

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \left[-\mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]\right) \times \mathrm{L}\omega} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{-\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-x/\delta}}{\delta}\right) \times \mathrm{L}\omega}$$

Pour ceux qui ont besoin d'un intermédiaire de plus, on peut aussi voir $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ comme la dérivée d'une composée en posant $\mathrm{X} = \dfrac{2\pi x}{\lambda}$ et qu'on a donc $f(\mathrm{X}) = \mathrm{A}\cos(\mathrm{X})$ qu'il est plus facile de dériver. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dX}} \times \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{A}\sin(\mathrm{X}) \times \frac{2\pi}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda} \times \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

comme on l'a utilisé plus haut. De la même manière, en posant $\mathrm{X} = -x/\delta$, on peut regarder $g(\mathrm{X}) = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{X}}$ et calculer

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dX}} \times \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{X}} \times \left(\frac{-1}{\delta}\right)$$

Correction S0.8 Simplifications

1. $$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

2. $$\ln\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) = -\ln(1+\varepsilon) \approx -\varepsilon$$

   ou alors $$\ln\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) \approx \ln(1-\varepsilon) = \ln(1+(-\varepsilon)) \approx -\varepsilon$$

3. $$\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon}{2}}} = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1} - \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1/2} \approx \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right) = -\frac{3}{4}\,\varepsilon$$

4. $$\frac{1-\cos(\varepsilon^2)}{\tan^3\varepsilon} \approx \frac{1-\left(1-\dfrac{(\varepsilon^2)^2}{2}\right)}{\varepsilon^3} = \frac{\varepsilon^4}{2\varepsilon^3} = \frac{\varepsilon}{2}$$
