

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Partie I

Champ de force centrale

1 Définition

Une **force centrale** est une force portée, en coordonnées sphériques, par le vecteur *radial* \vec{e}_r , c'est-à-dire

$$\vec{F} = F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

Pour être de surcroît conservatif, ce champ de force ne doit dépendre que de la variable de distance r

$$\vec{F}_{\text{cons}} = F(r) \vec{e}_r$$

2 Conservation du moment cinétique

Considérons une unique force centrale \vec{F} s'appliquant sur un point matériel m dans un référentiel galiléen. La loi du moment cinétique au point O, centre de force (fixe) du système, s'écrit alors

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$

La dérivée du vecteur moment cinétique étant nulle, celui-ci se conserve au cours du temps.

$$\vec{\sigma}_O = \vec{C}^{\text{te}}$$

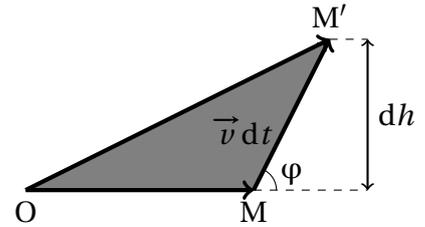
3 Caractère plan du mouvement

Si $\vec{\sigma}_O$ est un vecteur constant, cela veut en particulier dire que sa *direction* reste constante au cours du temps, donc qu'il est à tout instant perpendiculaire à un plan fixe Π . Or comme, par définition, le vecteur \vec{OM} est perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$, \vec{OM} reste à tout instant dans le plan Π qui est fixe. Ainsi,

Le mouvement est plan et $\vec{\sigma}_O$ est perpendiculaire au plan de la trajectoire.

4 Loi des aires

Regardons sur un intervalle de temps élémentaire dt l'évolution du point M . Celui-ci se déplace de $\vec{v} dt$ comme signalé sur le schéma ci-contre. De la sorte, l'aire balayée pendant l'intervalle de temps dt correspond à celle du petit triangle dessiné, que l'on peut calculer à l'aide de la formule



$$d\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{OM \times dh}{2} = \frac{OM \times v dt \sin \varphi}{2} = \frac{\|\vec{OM} \wedge \vec{v}\|}{2} dt = \frac{\|\vec{\sigma}_O\|}{2m} dt$$

La constance de la *norme* du moment cinétique (et de la masse de la particule) permet donc de déduire que la vitesse aréolaire $d\mathcal{A}/dt$ est constante au cours du temps. En particulier, connaissant le caractère plan de la trajectoire, on peut faire le lien avec la projection $\sigma_O = mr^2\dot{\theta}$ du moment cinétique en polaire, ce qui permet notamment d'interpréter le signe¹ de $d\mathcal{A}/dt$ en fonction de celui de $\dot{\theta}$ et de σ_O ,

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}}$$

Partie II

Champ de force centrale conservatif

1 Conservation de l'énergie mécanique

Si la force est conservative en plus d'être centrale, elle est associée à une énergie potentielle $E_p(r)$ telle que

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$$

L'énergie mécanique est alors conservée et s'écrit à l'aide des coordonnées polaires, puisque le mouvement est plan dans le cas d'un champ de force centrale,

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + E_p(r)$$

2 Notion d'énergie potentielle effective

L'écriture de la projection du moment cinétique (qui est une constante du mouvement comme démontré plus haut pour la loi des aires) permet de remplacer $r\dot{\theta}$ par σ_O/mr , de sorte que l'énergie mécanique puisse s'écrire

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{\sigma_O^2}{2mr^2} + E_p(r)}$$

L'avantage de cette écriture est que l'on se ramène, en apparence, à un problème à un seul degré de liberté car l'énergie mécanique ne dépend plus que de r et de sa dérivée temporelle \dot{r} . On peut donc en partie utiliser les artifices développés dans le chapitre *M4 Systèmes à un degré de liberté* comme par exemple les résolution graphique ou l'obtention d'une équation différentielle simple (*ie* non couplée) ne faisant intervenir que $r(t)$ comme fonction inconnue.

Démonstration

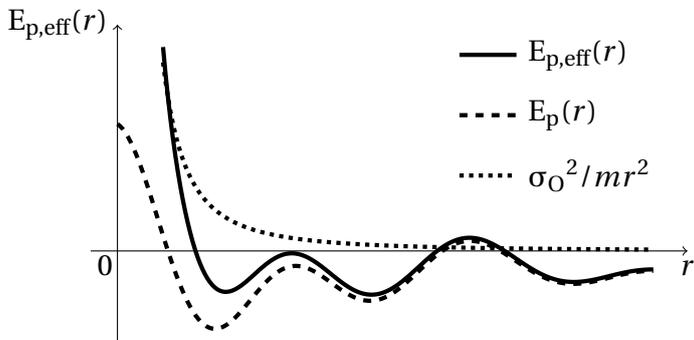
Il suffit d'écrire, comme \dot{r} ne sera pas identiquement nul,

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m \times 2\dot{r} \times \ddot{r} - \frac{\sigma_O^2}{mr^3} \dot{r} + \frac{dE_p}{dr} \dot{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{r} - \frac{\sigma_O^2}{mr^3} + \frac{dE_p}{dr} = 0$$

1. Positif pour une rotation en sens trigonométrique, négatif pour une rotation en sens horaire.

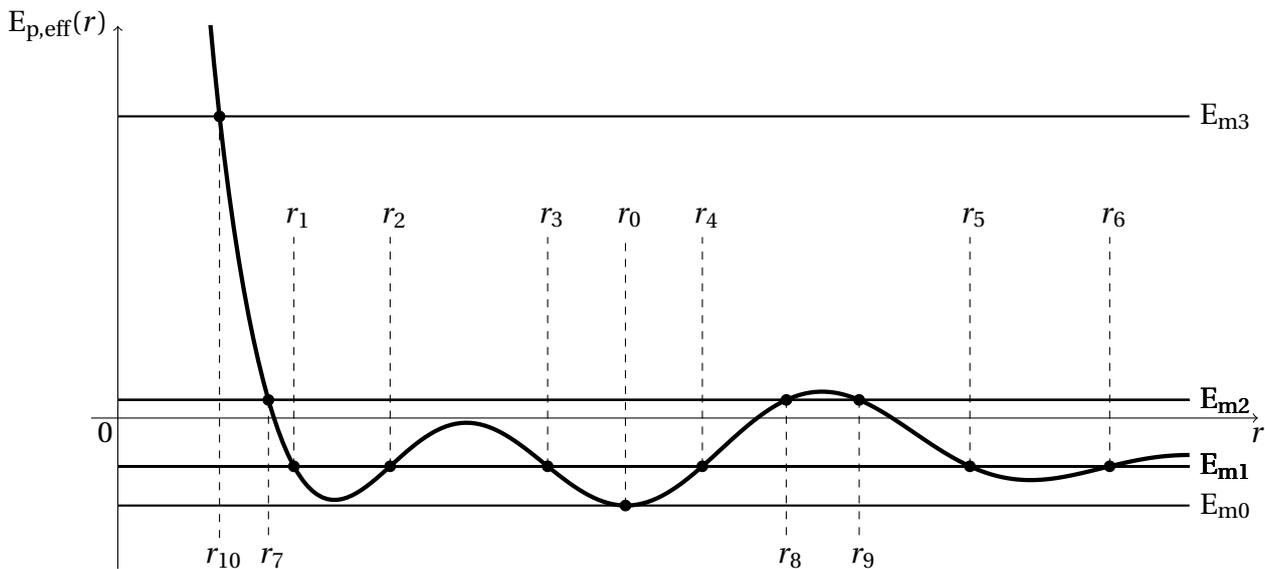
3 État lié, état de diffusion : résolution graphique

Reprenons l'analyse graphique qui a été conduite dans le chapitre *M4 Systèmes à un degré de liberté* sur le même exemple en remarquant que l'énergie potentielle effective se déduit de l'énergie potentielle « simple » par ajout du terme en σ_0^2/mr^2 qui diverge en $r = 0$. On obtient alors un graphique du type présenté ci-dessous.



On remarque que le terme σ_0^2/mr^2 impose la divergence² de l'énergie potentielle effective en 0, ce que l'on nomme parfois « mur centrifuge » en rapport avec le fait que la particule tourne autour du point O et ne peut pas directement y passer sous peine d'annuler son moment cinétique qui est sensé rester constant. En revanche, dès que l'on s'éloigne de l'origine, le comportement de $E_{p,eff}$ se rapproche de celui de l'énergie potentielle puisque le terme cinétique tend vers 0.

Regardons à présent ce qui se passe lorsqu'on donne une certaine énergie mécanique au système (tout en se débrouillant pour avoir le même moment cinétique σ_0 dans tous les cas). La différence entre énergie mécanique E_m et énergie potentielle effective $E_{p,eff}$ est donnée par l'énergie cinétique *radiale* en $m\dot{r}^2/2$. Ainsi, les points d'intersections des courbes (r_1 à r_{10} dans le graphique ci-après) correspondent à des points d'annulation de la vitesse *radiale* (et non de la vitesse elle-même puisque la composante *orthoradiale* en $r\dot{\theta}$ n'est pas nulle du fait de la constante de σ_0 non nul au départ).



Décrivons plus particulièrement les comportements pour les différentes énergies mécanique proposées :

Cas E_{m0} : Il existe un unique point r_0 pour lequel $E_{m0} \geq E_{p,eff}(r)$ et il s'agit en l'occurrence du cas d'égalité, ce qui signifie que l'énergie cinétique *radiale* est nulle : $\dot{r} = 0$ donc $r = C^{te} = r_0$: la trajectoire est *circulaire*. Les minima d'énergie potentielle effective ne représentent pas des équilibres mais des trajectoires circulaires.

Cas E_{m1} : Si le mouvement a commencé entre r_1 et r_2 , il ne pourra jamais en sortir. En effet, quand le mobile arrive en r_2 , \dot{r} s'annule, ce qui signifie que la fonction $r(t)$ atteint un extremum, en l'occurrence un maximum puisque si l'on prend r légèrement supérieur à r_2 , on devrait avoir une énergie cinétique radiale négative, ce qui n'est pas possible. La fonction $r(t)$ se met donc à décroître jusqu'à atteindre r_1 où à nouveau \dot{r} s'annule : $r(t)$ atteint son minimum. On en déduit que le mouvement est *borné* : $r(t)$ est contraint à rester entre r_1 et r_2 . On a un *état lié*.

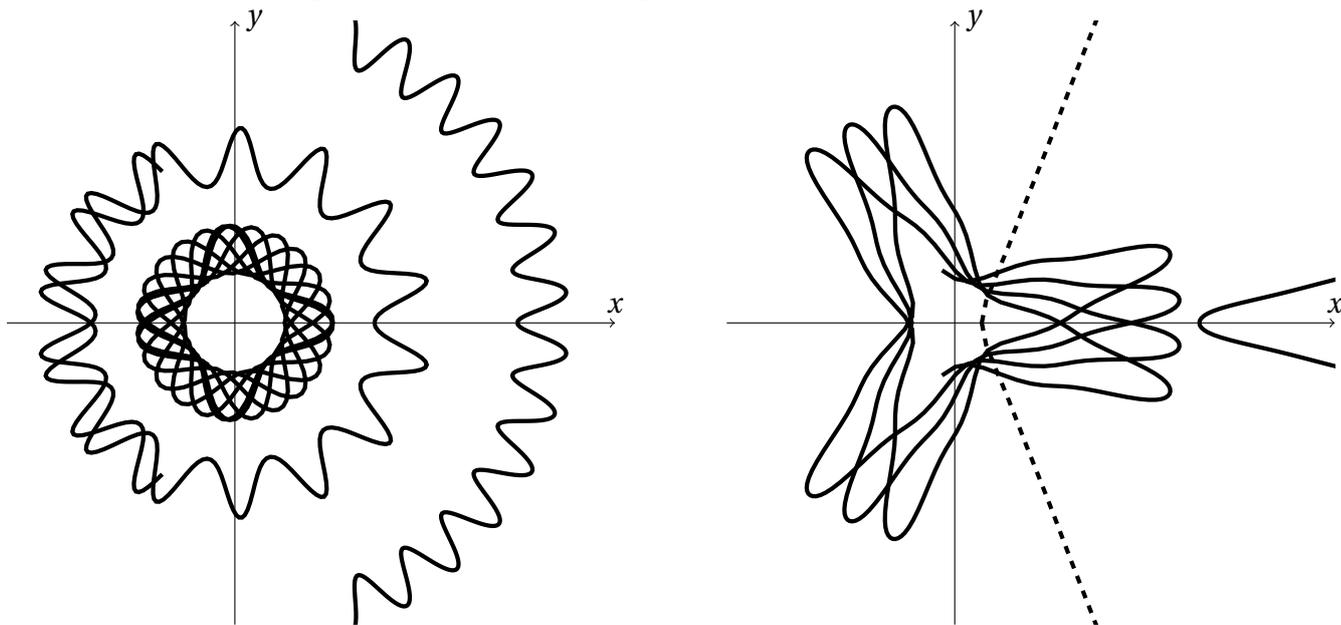
2. Sauf cas très particulier où l'énergie potentielle se comporte exactement à l'opposé de ce terme en 0.

Le même raisonnement peut s'opérer pour les mouvement entre r_3 et r_4 ou r_5 et r_6 qui sont tous les deux *bornés*.

Cas E_{m2} : Si le mouvement a commencé entre r_7 et r_8 , le raisonnement précédent tient toujours : le mouvement est borné entre ces deux valeurs. Néanmoins, on voit que l'énergie cinétique radiale passe par un minimum local lors du passage de la « bosse » en énergie potentielle effective. On peut en déduire que la trajectoire va se rapprocher « moins vite » du centre dans cette zone par rapport aux endroits en creux. En revanche, si r commence plus loin que r_9 , alors il ne peut descendre en-dessous de r_9 (toujours par positivité de l'énergie cinétique radiale), mais le mobile peut s'échapper à l'infini puisqu'il n'existe plus de point où \dot{r} s'annule, ce qui lui permettrait de changer de signe pour faire demi-tour. c'est un *état de diffusion*

Cas E_{m3} : Pour cette énergie mécanique, il n'existe pas d'état lié possible. L'unique point d'intersection des deux courbes indique que le mobile ne peut pas se rapprocher plus près du centre que r_{10} , mais une fois l'approche effectuée il repart vers l'infini sans se retourner : \dot{r} ne change plus de signe.

À noter qu'il n'est plus question ici de trajectoires *périodiques*, du moins pas dans le sens strict : $r(t)$ varie périodiquement entre ses deux valeurs extrêmes pour les états liés mais rien n'indique que $\theta(t)$ le fasse aussi, ce qui mène à des trajectoires qui, en général, ne sont pas fermées comme on peut le voir dans les intégrations numériques suivantes (sur un même temps d'intégration) pour les trois cas décrits précédemment (E_{m1} à gauche, E_{m2} à droite en traits pleins et E_{m3} à droite en pointillés).



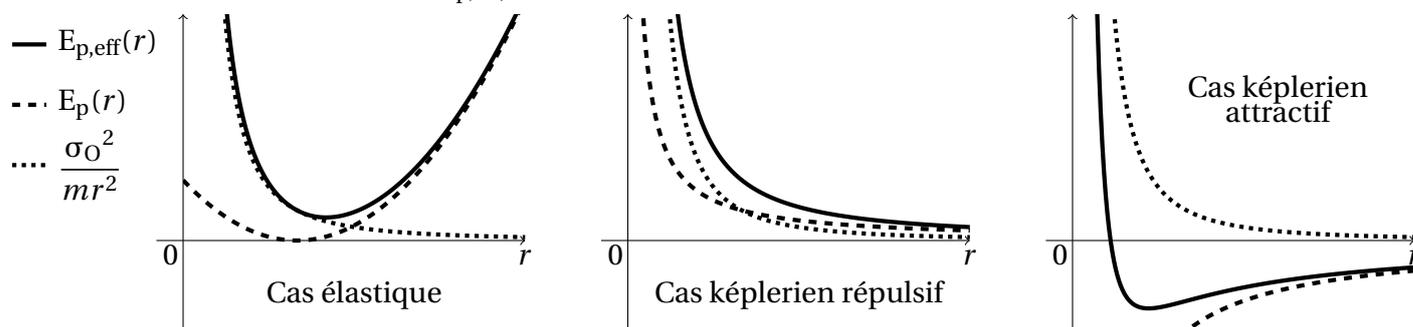
Trois cas particuliers sont présentés ci-dessous :

Cas élastique : Pour la force centrale associée à un ressort, l'énergie potentielle s'écrit $\frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$. Pour un moment cinétique σ_O donné (et non nul), les trajectoires sont toujours bornées. On peut montrer que dans le cas où la longueur à vide est nulle ($\ell_0 = 0$), les trajectoires sont toujours des ellipses centrées sur O donc en particulier fermées. On a un système vraiment périodique et toutes les trajectoires sont de surcroît isochrones (elles ont toutes même période).

Cas képlérien répulsif : Pour une force répulsive en k/r^2 donc une énergie potentielle en k/r , par exemple de type coulombienne comme c'est le cas dans l'expérience de Rutherford, il n'existe que des états de diffusion. La particule étant constamment repoussée par le centre de force, elle ne peut rester bien longtemps dans son voisinage. On peut remarquer que plus l'énergie cinétique radiale est importante initialement (donc plus E_m est grande), plus la particule pourra s'approcher du centre attracteur à moment cinétique σ_O donné.

Cas képlérien attractif: Pour une force attractive en $-k/r^2$, l'énergie potentielle s'écrit en $-k/r$. Plusieurs types d'états sont possibles.

- Si l'énergie mécanique initiale est importante, on a un état de diffusion : la particule s'approche du centre attractif, est déviée de sa trajectoire, mais repart à l'infini. On peut montrer que la trajectoire est alors une branche d'hyperbole.
- Si l'énergie mécanique initiale est nulle, on a toujours un état de diffusion, mais le mobile atteint $r = \infty$ avec une vitesse nulle (La vitesse radiale est nulle car $E_{p,\text{eff}}(\infty) = 0$ et la vitesse orthoradiale l'est aussi car $\sigma_0^2/mr^2 \rightarrow 0$). On peut montrer que la trajectoire est alors une parabole.
- Si l'énergie mécanique est négative et qu'il y a deux points d'intersection avec la courbe $E_{p,\text{eff}}(r)$, alors le mobile évolue sur une trajectoire que l'on peut montrer être elliptique dont O occupe l'un des foyers.
- Enfin, si on a $E_m = E_{p,\text{eff},\text{min}}$, alors la trajectoire est circulaire : la vitesse radiale est toujours nulle.



Partie III

Cas particulier d'un champ newtonien attracteur

1 Champ newtonien

La loi de la gravitation universelle fut énoncée en 1684 par Newton³. Elle stipule que la force gravitationnelle qu'un corps massif M placé en A exerce sur une masse m placée en B ne dépend que des masses en présence et de leur distance $r = \|\overrightarrow{AB}\|$ selon la formule

$$\overrightarrow{F}_{A/B} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \frac{\overrightarrow{AB}}{r}$$

Notez le signe négatif qui en fait une force attractive. Par extension, tous les champs de force dont la dépendance en distance est en $1/r^2$ sont surnommé « champs newtoniens⁴ » en référence à l'exemple de la gravitation.

2 Lois de Képler

Suite aux observations très précises de Tycho Brahe (1546-1601), Johannes Képler (1571-1630) énonce trois lois concernant les trajectoires des planètes dans le système solaire, les deux premières en 1609 et la troisième en 1618 :

Première loi, loi des orbites. Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Deuxième loi, loi des aires. Les aires balayées en des temps égaux par le rayon vecteur allant du Soleil à la planète sont égales en tout point de la trajectoire.

Il en résulte que la vitesse de la planète sur son orbite est maximale lors de son passage au plus près du Soleil (périhélie) et minimale lorsqu'elle en est le plus éloignée (aphélie).

3. Qui la publie dans ses principia en 1687.

4. On parle aussi parfois de champs képlériens.

Troisième loi, loi des périodes. Le rapport du carré de la période T d'une planète par le cube du demi-grand axe a de son orbite vaut une même constante pour toutes les planètes du système solaire.

$$\frac{T^2}{a^3} = C^{\text{te}}$$

Il en découle que les planètes les plus éloignées sont aussi celles qui mettent le plus de temps pour compléter une révolution complète autour du Soleil.

Ces lois sont transposables à la Terre (en lieu et place du Soleil) et à ses satellites artificiels (en lieu et place des planètes) car la situation est complètement analogue.

3 Cas particulier du mouvement circulaire

Plaçons-nous dans le cas particulier d'une orbite circulaire de rayon R d'une particule m soumise uniquement à un champ de force newtonien de la part d'une masse M . La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors en repère polaire centré sur l'astre attracteur M

$$m \vec{a} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{R^2} \vec{e}_r$$

Or, le mouvement étant circulaire, l'accélération peut s'écrire⁵

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

a) Mouvement uniforme

Projetons la relation fondamentale écrite précédemment sur \vec{e}_θ pour faire disparaître la force attractive. Il vient

$$mR\ddot{\theta} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\dot{\theta} = C^{\text{te}} = \omega}$$

La vitesse sur une orbite circulaire s'écrivant $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$, on en déduit que le mouvement est bien *uniforme*

$$\boxed{\|\vec{v}\| = R\omega = C^{\text{te}}}$$

| On aurait aussi pu utiliser la constance du moment cinétique pour montrer que $\dot{\theta} = C^{\text{te}}$.

b) Troisième loi de Képler

Projetons à présent la RFD sur \vec{e}_r pour trouver un lien entre la période T telle que $\dot{\theta} = 2\pi/T$ et le rayon R de la trajectoire circulaire. Il vient

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}Mm}{R^2} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{\mathcal{G}M}{R^3}$$

On en déduit

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}}$$

Le rapport du carré de la période par le cube du rayon donne bien une constante quel que soit l'objet en orbite autour de la masse centrale M .

5. Voir chapitre *M1 Cinématique*.

c) Généralisation au cas elliptique

Le cercle est une ellipse particulière dont le demi-grand axe a est égal⁶ au rayon R . Le calcul complet permet de montrer que pour une ellipse, le résultat est le même que pour l'orbite circulaire à condition de remplacer le rayon R par le demi-grand axe a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$$

d) Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est par définition sans mouvement par rapport au sol, c'est-à-dire qu'il effectue une rotation complète dans le référentiel géocentrique à la même période T_T que met le solide Terre pour faire un tour complet sur lui-même dans ce référentiel⁷. En utilisant la 3^e loi de Képler, on peut en déduire le rayon de la trajectoire :

$$R = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M_T T_T^2}{4\pi^2}} = 42.10^3 \text{ km}$$

L'altitude h étant définie par rapport à la surface de la Terre donc à $R_T = 6,4.10^3$ km, on en déduit

$$h = R - R_T = 36.10^3 \text{ km}$$

Il reste à montrer qu'un satellite géostationnaire doit non seulement se situer à l'altitude h calculée précédemment, mais aussi être dans le plan équatorial. En effet, le plan de la trajectoire passe nécessairement par le centre de la Terre. Supposons par l'absurde qu'il ne s'agisse pas du plan de l'équateur et que le satellite se trouve initialement au-dessus de l'hémisphère Nord. Alors, au bout d'une demi-révolution, le satellite se trouvera au-dessus de l'hémisphère Sud, c'est-à-dire qu'il ne peut pas avoir été stationnaire. *Ergo*, la trajectoire doit avoir lieu dans le plan équatorial car le point survolé doit à la fois appartenir à l'hémisphère Nord et à l'hémisphère Sud.

4 Vitesse cosmiques

a) Vitesse de circularisation, vitesse en orbite basse

Reprenons l'exemple du mouvement circulaire développé précédemment. On a vu que la vitesse était constante *en norme* sur l'orbite et qu'elle valait en norme $v = R|\dot{\theta}|$. De ce fait, l'accélération radiale s'écrit

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_r = -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R}$$

La projection de la RFD selon \vec{e}_r donne alors

$$-m \frac{v^2}{R} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{R^2} \quad \text{soit} \quad v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R}}$$

Pour une orbite basse autour de la Terre avec $M = 6,0.10^{24}$ kg et $R \approx R_T = 6,4.10^6$ m, on trouve

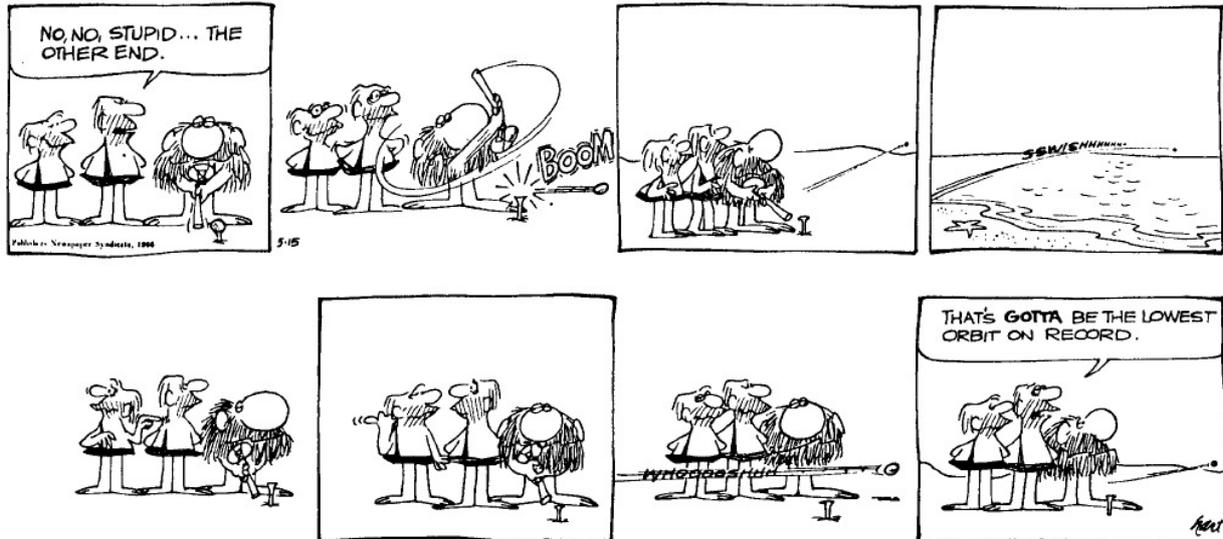
$$v_{\text{circ,orbite basse}} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

On peut aussi calculer le temps nécessaire pour faire une révolution, soit à l'aide de Képler, soit simplement, puisque le mouvement est uniforme,

$$T_{\text{orbite basse}} = \frac{2\pi R}{v_{\text{circ}}} = 5,1.10^3 \text{ s} = 1,4 \text{ h}$$

6. Le demi-petit axe b est lui aussi égal à R , mais le calcul montre que ce n'est pas le point important.

7. C'est-à-dire en fait un jour sidéral, soit 23h56 min = 86164 s, et non un jour solaire de 24h = 86400 s, même si à deux chiffres significatifs le résultat est bien le même.



b) Vitesse de libération

La vitesse de libération est la vitesse v_{lib} nécessaire en un point r pour tout juste atteindre l'infini, c'est-à-dire avec une vitesse nulle. L'énergie mécanique $E_m(r, v)$ étant constante au cours du mouvement, elle doit être identique au point de départ et lorsque la particule « atteint » l'infini⁸. En particulier, on a

$$\frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r} = E_m(r, v_{\text{lib}}) = E_m(r = \infty, v = 0) = 0 - 0 = 0$$

On en déduit

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}}$$

On peut remarquer que la vitesse de libération à une distance r donnée est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la vitesse nécessaire pour être sur une orbite circulaire en ce même point. Pour se libérer de la surface de la Terre, l'application numérique donne $v_{\text{lib}} \approx 11 \text{ km/s}$

5 Énergie mécanique

a) Cas particulier circulaire

Pour un mouvement circulaire de rayon R , la vitesse vaut $v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R}}$, d'où l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{circ}}^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{R} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}Mm}{R} - \frac{\mathcal{G}Mm}{R}$$

soit

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2R}$$

b) Généralisation au cas elliptique

Comme pour la troisième loi de Képler, on peut montrer le même résultat pour des orbites elliptiques à condition de remplacer le rayon R par le demi-grand axe a . Ainsi, pour n'importe quelle orbite elliptique,

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}$$

8. Au bout, bien sûr, d'un temps infini...