M6

Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

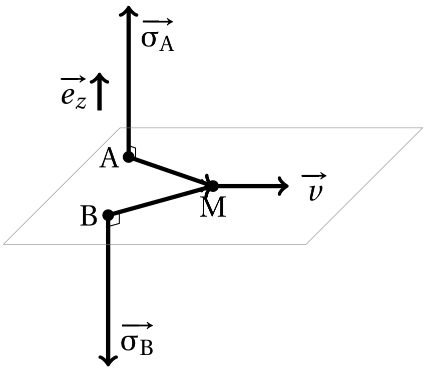
Partie I

Définitions

1 Moment cinétique pour un point matériel

a) Vecteur moment cinétique

Le moment cinétique d'un point matériel de masse m par rapport au point A, noté $\overrightarrow{\sigma_A}$ ou $\overrightarrow{L_A}$ selon les cas [1], s'écrit



$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_A} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v}}$$

où M est la position de la masse m et $\overrightarrow{v}$ sa vitesse dans le référentiel choisi. Par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{\sigma_A}$ est perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire au plan tangent de la trajectoire autour du point A. La direction de $\overrightarrow{\sigma_A}$ indique donc celle de l'axe instantané de rotation [2] autour de A alors que son sens détermine si le mobile tourne dans le sens trigonométrique (projection positive sur l'axe, comme pour le point A ci-contre) ou horaire (projection négative sur l'axe, comme pour le point B ci-contre) autour de A.

b) Moment cinétique scalaire

On définit aussi le moment cinétique par rapport à un axe Δ contenant le point A et dirigé par le vecteur directeur $\overrightarrow{k}$ par

$$\boxed{\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_A} \cdot \overrightarrow{k}}$$

Ce moment cinétique, dit « scalaire » car c'est un nombre et non un vecteur, peut bien sûr être positif ou négatif selon que $\overrightarrow{\sigma_A}$ et $\overrightarrow{k}$ pointent ou non globalement dans le même sens. Le signe indique si la particule tourne plutôt dans le sens direct ($\sigma_\Delta > 0$) ou indirect ($\sigma_\Delta < 0$) autour de l'axe Δ.

> À noter que σ_Δ ne dépend pas du point de l'axe choisi pour le calculer. En effet, si A et B appartiennent tous deux à Δ, alors
>
> $$\overrightarrow{\sigma_B} = \overrightarrow{BM} \wedge m\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\sigma_A}$$
>
> Or, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires donc $(\overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{k} = 0$, de sorte que $\overrightarrow{\sigma_A} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{\sigma_B} \cdot \overrightarrow{k}$.

1. ou selon les personnes.
2. Visuellement s'entend.

c) Cas particulier des coordonnées polaires

Supposons que le mouvement soit plan et choisissons l'origine O à l'endroit où l'on veut calculer le vecteur moment cinétique. Notons Δ l'axe passant par O et dirigé par $\overrightarrow{e_z}$. Alors, en coordonnées polaires, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = \dot r\,\overrightarrow{e_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

de sorte que $$\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}}} = (r\,\overrightarrow{e_r}) \wedge m(\dot r\,\overrightarrow{e_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) = mr\dot r\,\overbrace{\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_r}}^{=\overrightarrow{0}} + mr^2\dot\theta\,\overbrace{\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_\theta}}^{=\overrightarrow{e_z}}$$

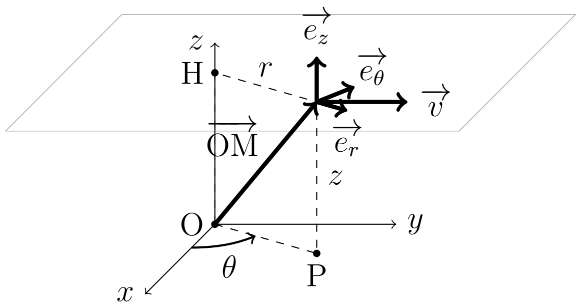
soit $$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}}} = mr^2\dot\theta\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{et} \qquad \sigma_\Delta = mr^2\dot\theta}$$

On retrouve alors l'interprétation directe du signe du moment cinétique scalaire : s'il est positif, la rotation se fait dans le sens trigonométrique ($\dot\theta > 0$) alors que s'il est négatif, elle se fait dans le sens horaire ($\dot\theta < 0$).

d) Cas particulier des coordonnées cylindriques

Si l'on se place à présent en coordonnées cylindriques où $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$ mais dans le cas particulier où le mouvement reste plan à $z = \mathrm{C^{te}}$ (cas courant, notamment pour les rotations autour d'un axe fixe), alors, en notant H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ (de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{HM}} = r\,\overrightarrow{e_r}$), on retrouve le même moment cinétique scalaire :

$$\boxed{\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}}}\cdot\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{H}}}\cdot\overrightarrow{e_z} = mr^2\dot\theta}$$



2 Moment cinétique d'un système discret de points matériels

Pour un système de points matériels $\{\mathrm{M}_i\}$, où chaque point M_i a une masse m_i et se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v_i}$, le moment cinétique total est la somme des moments cinétiques de chaque point pris isolément.

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{A}}} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{AM}_i} \wedge m_i\,\overrightarrow{v_i}}$$

Supposons que tous ces points soient contraints à se déplacer en mouvement circulaire autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire commune $\dot\theta$ (ils sont donc tous fixes les uns par rapport aux autres, on a affaire à une espèce de solide « discret »). Alors, en se plaçant en coordonnées cylindriques, le moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Δ de rotation commun s'écrit

$$\sigma_\Delta = \sum_i m_i\,{r_i}^2\dot\theta = \Big(\sum_i m_i\,{r_i}^2\Big)\dot\theta$$

On note J_Δ le **moment d'inertie** par rapport à l'axe Δ défini par

$$\boxed{\mathrm{J}_\Delta = \sum_i m_i\,{r_i}^2 \qquad \text{de sorte que} \qquad \sigma_\Delta = \mathrm{J}_\Delta\,\dot\theta}$$

3 Généralisation au solide en rotation autour d'un axe fixe : moment d'inertie

Par analogie avec le « solide discret » vu précédemment, lorsqu'un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ à une vitesse angulaire $\dot\theta$, on définit le **moment d'inertie** J_Δ du solide de sorte à faire le lien entre le moment cinétique et la vitesse angulaire

$$\boxed{\sigma_\Delta = J_\Delta\,\dot\theta}$$

Pour aller plus loin

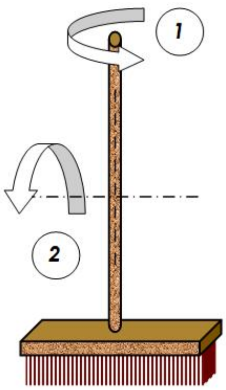
Il est possible de déterminer explicitement l'expression de ce moment d'inertie dans le cas d'une distribution continue de masse comme notre solide. Découpons le solide en une série de volumes élémentaires dV, chacun centré sur un point P, situé à une distance r de l'axe de rotation et contenant donc une masse $\mathrm{d}m = \rho(\mathrm{P})\,\mathrm{dV}$ où $\rho(\mathrm{P})$ est la masse volumique du solide autour du point P. L'expression discrète

$$J_\Delta = \sum_i m_i\, {r_i}^2 \qquad \text{devient} \qquad \boxed{J_\Delta = \iiint_{\text{solide}} \mathrm{d}m\, r^2 = \iiint_{\text{solide}} \rho(\mathrm{P})\, r^2\,\mathrm{dV}}$$

Par exemple, si on veut calculer le moment d'inertie d'un cylindre homogène de rayon R, de hauteur h et de masse volumique ρ_0 (donc de masse $M = \rho_0\,\pi R^2 h$) par rapport à son axe de révolution, il suffit de sommer toutes les contributions en considérant les volumes élémentaires $\mathrm{dV} = \mathrm{d}r\; r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} \rho_0\, r^2 \times r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \rho_0 \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \times \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_0^h \mathrm{d}z \\ &= \rho_0 \times \frac{R^4}{4} \times 2\pi \times h \end{aligned}$$

$$\boxed{J_\Delta = \frac{1}{2} M R^2}$$



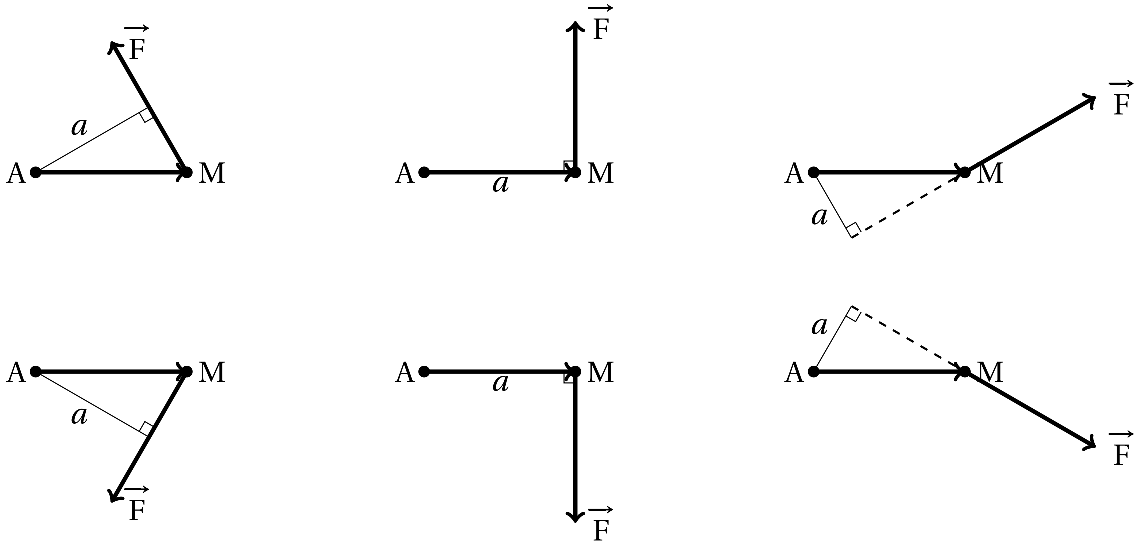
Lorsque l'on prend un balai en main au milieu du manche et qu'on le fait tourner comme sur la figure ci-contre, il est plus aisé de le faire tourner autour de l'axe du manche ①, qu'autour de l'axe transversal indiqué ②. Cela est dû au fait que dans le deuxième cas, la matière constituant le balai se trouve plus éloignée de l'axe de rotation (r_i plus grand pour une même masse m_i, donc $J_② > J_①$). Comme pour un solide en rotation, la vitesse linéaire d'un point croît en proportion avec cet éloignement, il est nécessaire de communiquer une plus grande énergie cinétique aux points éloignés. D'où la plus grande résistance du balai à tourner autour d'un axe transversal qu'autour de l'axe du manche.

4 Moment d'une force

Par définition, le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathrm{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}})$ en un point A d'une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de point d'application M s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathrm{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{F}}}$$

Toutes les techniques usuelles de calculs de produit vectoriel sont licites pour calculer le moment d'une force, mais celle dite du « bras de levier » peut rapidement donner le bon résultat. Un bon dessin valant mieux qu'un long discours, sur les 6 cas présentés ci-dessous, les trois premiers donnent un moment $a\|\overrightarrow{F}\|\overrightarrow{e_z}$ et les trois derniers $-a\|\overrightarrow{F}\|\overrightarrow{e_z}$



5 Couple

De façon générale, un ensemble de forces $\overrightarrow{F_i}$ de points d'application A_i constitue un couple de force si sa résultante est nulle $\sum\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$, mais dont la somme des moments (appelée le *couple*) ne l'est pas.

L'exemple le plus simple est celui de deux forces opposées $\overrightarrow{F}$ appliquée en A et $-\overrightarrow{F}$ appliquée en B, points distincts d'un même système : leur somme est évidemment nulle. Cet exemple est au demeurant à la base de l'appelation « couple de forces ».

La nullité de la résultante d'un couple de forces n'implique absolument pas la nullité de la somme des moments de ces forces, appelée simplement « moment du couple de force », ou tout simplement « couple résultant » $\overrightarrow{\Gamma}$. En effet, dans l'exemple donné il vient, en considérant un point de pivot P pour le calcul des moments,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma} &= \overrightarrow{\mathscr{M}_P}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathscr{M}_P}(-\overrightarrow{F})\\ &= \overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{F} + \overrightarrow{PB}\wedge(-\overrightarrow{F})\\ &= (\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\wedge\overrightarrow{F}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{F}}$$

Le moment du couple de force est *indépendant* du point de pivot P considéré. Cette quantité est appelée couple. Il n'est pas besoin de préciser le point de rotation. Les deux forces constituent alors un couple de forces.

Outre les autres cas évidents, le couple est nul lorsque les deux forces ont la même droite d'action. Le couple augmente avec l'intensité commune des forces, mais aussi avec l'éloignement des points. Il est maximal lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{F}$ sont orthogonaux.

6 Liaison pivot

La liaison pivot est la plus rencontrée dans les systèmes mécaniques. Elle guide en rotation une pièce en ne permettant qu'une rotation autour de l'axe de la liaison. La définition de cette liaison doit préciser la *position* de son axe, c'est-à-dire d'une droite. En effet pour une porte, de la position des gonds dépend le sens d'ouverture ; de même un coffre de voiture est guidé par un pivot de direction horizontale placé en haut.

Lors de l'étude du mouvement d'un solide accroché à cette liaison, il peut apparaître un terme de « moment de liaison » dû par exemple aux frottements des gonds sur eux-mêmes pour une portes mal huilée et dont il faudra tenir compte dans l'inventaire des moments s'exerçant sur le solide étudié.

7 Moteurs et freins

Moteurs et freins ont des fonctionnement antagonistes : les premiers cherchent à augmenter (en valeur absolue) la vitesse de rotation d'un solide (le *rotor*) autour d'un axe alors que les seconds tentent au contraire de le ralentir. Pour ce faire, il faut pouvoir « prendre appui » sur un objet statique appelé *stator*. Prenons des exemples :

Force simple : Si vous devez ouvrir une lourde porte[3], vous devez prendre appui sur le sol pour exercer le moment permettant la rotation ; de même pour essayer de stopper son mouvement. Cela ne sera pas possible si le sol se transformait soudainement en glace sans aucun frottement.

Couple : Pour tourner le volant de votre voiture, vous exercer un couple[4] qu'il n'est possible de transmettre *que* si vous êtes solidement arrimé à votre siège (sinon vous êtes emporté par le mouvement ou l'absence de mouvement du volant).

Dans tous les cas, il est bien nécessaire d'avoir un *stator* pour transmettre un couple (moteur ou résistant) au *rotor*.

Partie II

Loi du moment cinétique

1 Version vectorielle

La loi du moment cinétique énonce que, dans un référentiel *galiléen* et pour un point *fixe* A, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_A}$ du système par rapport au point A est égale à la somme des moments (par rapport à A) des forces *extérieures* $\overrightarrow{F_i}$ qui s'exercent sur le système. En appelant B_i les points d'application respectifs des forces $\overrightarrow{F_i}$, cela s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_A}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_A}(\overrightarrow{F_i}) = \sum_i \overrightarrow{AB_i} \wedge \overrightarrow{F_i}}$$

En particulier, le moment cinétique sera conservé ($\overrightarrow{\sigma_A} = \overrightarrow{C^{te}}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$) si l'on est dans l'un des cas suivants :

- absence de forces extérieures ;
- les moments des différentes forces extérieures se compensent ($\sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_A}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{0}$) ;
- les forces extérieures sont des forces centrales (chaque moment individuel est nul) ;
- une combinaison des deux derniers points (forces centrales de moments nuls et le reste des moments qui se compensent).

3. La porte du coffre-fort de l'Oncle Picsous par exemple.
4. Position « 9h15 » des mains.

2 Version scalaire

Soit Δ un axe *fixe* passant par le point A et dirigé par le vecteur $\overrightarrow{k}$. La prise du produit scalaire membre à membre de la loi du moment cinétique avec le vecteur $\overrightarrow{k}$ donne

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{A}}}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{k} = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathrm{A}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}_i})\cdot\overrightarrow{k} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{\mathrm{F}_i})$$

Or, comme $\overrightarrow{k}$ est un vecteur fixe, on peut le rentrer dans la dérivée temporelle pour faire apparaître le moment cinétique scalaire σ_Δ par rappor à l'axe Δ, d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{\mathrm{F}_i})}$$

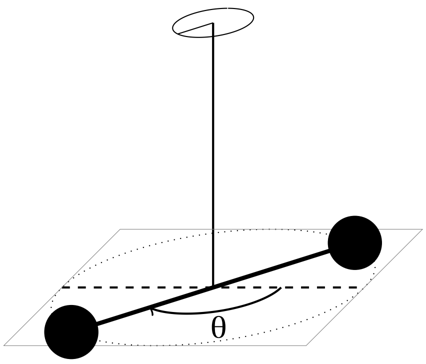
Très souvent, on utilisera la version faisant intervenir le moment d'inertie J_Δ (tel que $\sigma_\Delta = \mathrm{J}_\Delta\dot{\theta}$, avec θ l'angle déterminant la position du solide autour de l'axe Δ), de sorte que la loi se réduise à

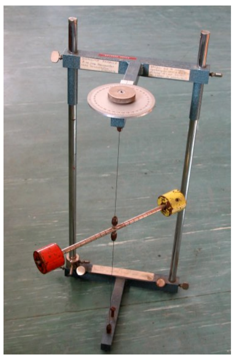
$$\boxed{\mathrm{J}_\Delta\ddot{\theta} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{\mathrm{F}_i})}$$

3 Pendule de torsion

Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil de torsion (cf. photo et modélisation ci-contre). Ce fil d'acier exerce un couple de rappel, proportionnel à l'angle de torsion qu'on lui impose

$$\overrightarrow{\Gamma} = -\mathrm{C}\theta\,\overrightarrow{e_z}$$





Les masses permettent de changer facilement le moment d'inertie J du système {masse+barre} étudié ici.

Appliquons la loi du moment cinétique scalaire selon l'axe vertical. Comme le poids est lui aussi vertical, son moment par rapport à l'axe de rotation est nul. En l'absence de frottements, il n'y a donc que le couple de rappel qui s'exerce et on obtient

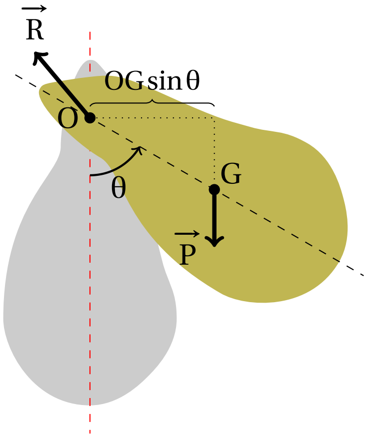
$$\mathrm{J}\ddot{\theta} = -\mathrm{C}\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{J}}}}$$

c'est-à-dire très exactement l'équation différentielle régissant l'évolution d'un oscillateur harmonique, où l'on a aussi que la force de rappel (ici le moment) est proportionnelle au déplacement par rapport à l'équilibre (ici à l'écart angulaire à l'équilibre).

Il suffit de multiplier l'équation d'évolution par $\dot{\theta}$ et d'intégrer une fois par rapport au temps pour faire apparaître une quantité conservée qui s'apparente en fait à l'énergie mécanique du système comme on le verra dans la partie suivante.

$$\mathrm{J}\ddot{\theta}\dot{\theta} + \mathrm{C}\theta\dot{\theta} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{J}\dot{\theta}^2}{2}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{C}\theta^2}{2}\right) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\frac{\mathrm{J}\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\mathrm{C}\theta^2}{2} = \mathrm{C^{te}}}$$

4 Pendule pesant



a) Équation du mouvement

Pour le pendule pesant, et en l'absence de forces dissipatives, seul le poids (de point d'application G) admet un moment non nul par rapport à l'axe Ox puisque la force permettant l'accrochage du pendule au point O passe nécessairement par cet axe [5]. Ainsi, en notant J le moment d'inertie du pendule pesant, la loi du moment cinétique scalaire permet d'écrire

$$\mathrm{J}\ddot{\theta} = -mg\,\mathrm{OG}\sin\theta \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\,\mathrm{OG}}{\mathrm{J}}\sin\theta = 0}$$

Notez le signe négatif dans l'expression du moment puisque sur le schéma, le moment du poids tend à faire tourner le système dans le sens horaire et non trigonométrique (alors qu'on a bien fait le schéma de sorte que $\sin\theta > 0$).

À condition de poser $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg\,\mathrm{OG}}{\mathrm{J}}}$, on retombe sur l'équation différentielle vérifiée par le pendule simple

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0$$

qui revient à celle de l'oscillateur harmonique dans l'approximation des petits angles ($\theta \ll 1$ donc $\sin\theta \approx \theta$) :

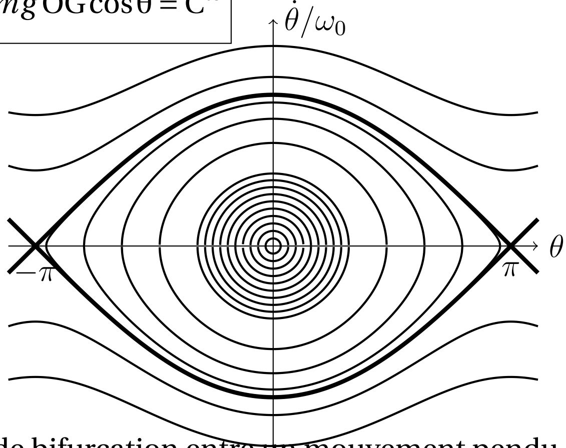
$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$$

Il suffit de multiplier l'équation d'évolution par $\dot{\theta}$ et d'intégrer une fois par rapport au temps pour faire apparaître une quantité conservée qui s'apparente en fait à l'énergie mécanique du système comme on le verra dans la partie suivante.

$$\mathrm{J}\ddot{\theta}\times\dot{\theta} + mg\,\mathrm{OG}\sin\theta\times\dot{\theta} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{J}\dot{\theta}^2}{2}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-mg\,\mathrm{OG}\cos\theta\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{\frac{\mathrm{J}\dot{\theta}^2}{2} - mg\,\mathrm{OG}\cos\theta = \mathrm{C^{te}}}$$

b) Portrait de phase



Le portrait de phase du pendule pesant est données ci-contre en coordonnées normalisées (c'est-à-dire en utilisant $\dot{\theta}/\omega_0$ au lieu de $\dot{\theta}$ sur l'axe des ordonnées). Comme pour le pendule simple, les trajectoires isochrones sont des cercles dans ce système de coordonnées (contre des ellipses en coordonnées $(\theta,\dot{\theta})$), ce qui permet de facilement repérer à partir de quelle valeur de θ_{max} apparaissent des écarts significatifs à l'isochronisme (on s'éloigne de « l'iris » de « l'œil » du pendule).

La séparatrice (en gras sur le schéma) correspond à la courbe de bifurcation entre un mouvement pendulaire et un mouvement révolutif :

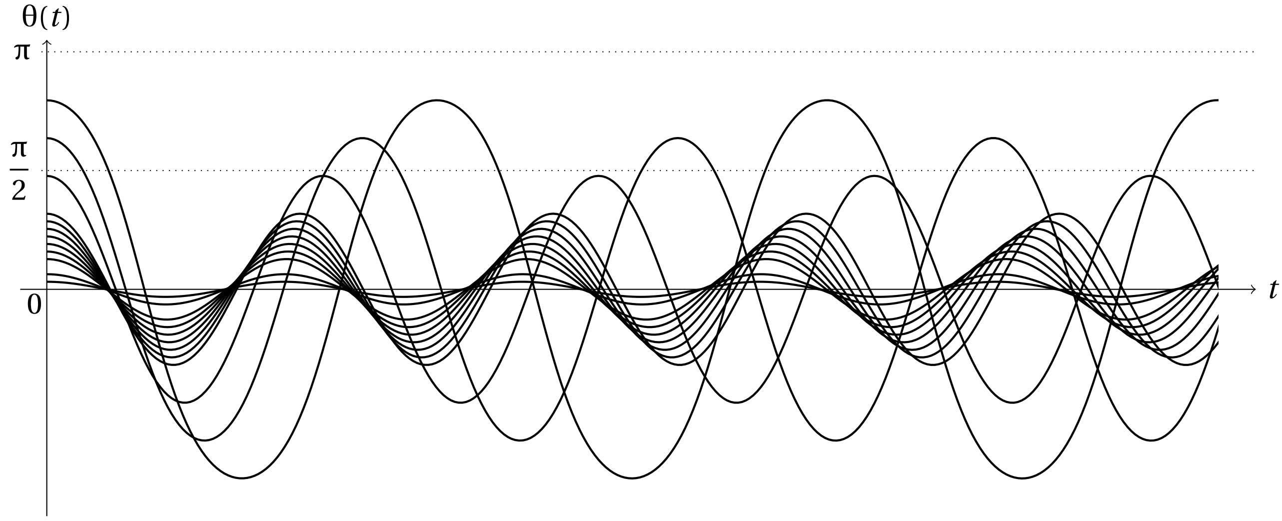
- à l'extérieur de l'œil [6], la vitesse $\dot{\theta}$ ne s'annule plus : θ continue toujours, soit à augmenter, soit à diminuer sans changer de sens de variation : le pendule « fait des tours » ;
- alors qu'à l'intérieur de l'œil, θ garde des valeurs bornées entre $-\theta_{max}$ et θ_{max}.

La résolution numérique de l'équation d'évolution non-linéaire permet de mettre en évidence plusieurs comportement intéressants :

- Les deux mouvements d'amplitude la plus faible restent isochrones sur toute la durée de l'intégration numérique ;

5. Il pourrait néanmoins exister un couple résistant tel celui que des gonds mal huilés exercent sur le battant d'une porte.
6. Que ce soit au-dessus ou en dessous.

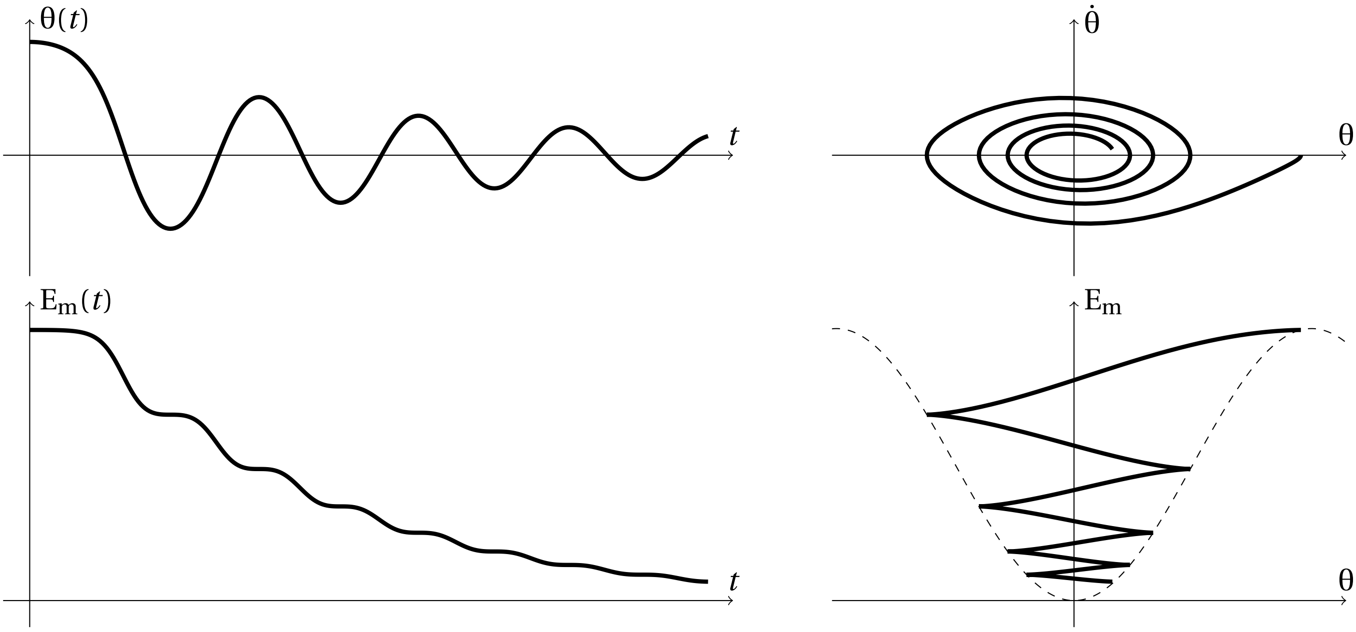
— On observe en revanche une dérive progressive de la période pour les mouvements de plus grande amplitude, écart qui devient parfaitement visible dès la première période pour des amplitudes supérieures à $\pi/2$.



L'acquisition informatique en TP permet d'obtenir une courbe donnant l'évolution de l'angle θ en fonction du temps représentée ci-après (cf. TP sur le pendule pesant). L'énergie mécanique est donnée par l'intégrale première déterminée précédemment dans un cas conservatif :

$$\mathrm{E_m} = \frac{\mathrm{J}\dot{\theta}^2}{2} - mg\,\mathrm{OG}\cos\theta(t) = \mathrm{J}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\overbrace{mg\,\mathrm{OG}}^{\omega_0{}^2}}{\mathrm{J}}\cos\theta(t)\right)$$

L'énergie mécanique est donc proportionnelle au terme $\dot{\theta}^2/2 - \omega_0{}^2\cos\theta(t)$ dont θ et $\dot{\theta}$ sont calculables via l'acquisition et où ω_0 peut se déterminer par mesure de la période $\mathrm{T_0} = 2\pi/\omega_0$ dans le cadre des oscillations de faibles amplitudes. Les différentes représentations graphiques que l'on peut faire sont données ci-après (dans la courbe donnant $\mathrm{E_m}$ en fonction de θ, on a rajouté en pointillés celle (théorique) de l'énergie potentielle $\mathrm{E_p}$ en fonction de θ) :



Partie III

Approche énergétique

1 Énergie cinétique pour un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à une vitesse angulaire Ω autour d'un axe fixe et de moment d'inertie J par rapport à cet axe est donné par la formule

$$\boxed{\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{J}\,\Omega^2}$$

Démonstration

Prenons un ensemble discret de points matériels M_i situés chacun à une distance r_i de l'axe commun de rotation. La vitesse angulaire commune étant Ω, l'énergie cinétique totale s'écrit

$$\mathrm{E_c} = \sum_i \mathrm{E_c}_i = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,(r_i\Omega)^2 = \left(\sum_i m_i\,{r_i}^2\right)\frac{\Omega^2}{2} \qquad \text{soit bien} \qquad \boxed{\mathrm{E_c} = \frac{1}{2}\mathrm{J}\,\Omega^2}$$

puisque par définition du moment d'inertie $\mathrm{J} = \sum m_i\,{r_i}^2$. Le même raisonnement peut se faire pour un ensemble continu de points matériels en remplaçant les sommes par des intégrales et les masses m_i par des masses élémentaires $\mathrm{d}m$.

2 Loi de l'énergie cinétique pour un solide

Pour un solide, seul le travail des forces externes compte dans l'expression de la loi de l'énergie cinétique. Ainsi, entre un instant t_1 et un instant t_2

$$\boxed{\underset{t_1\to t_2}{\Delta}\mathrm{E_c} = \sum_i \underset{t_1\to t_2}{\mathrm{W}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext},i})}$$

où le travail de chaque force extérieure se calcule à partir du mouvement de *son* point d'application B_i, soit

$$\underset{t_1\to t_2}{\mathrm{W}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext},i}) = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext},i}\cdot\overrightarrow{v_{\mathrm{B}_i}}\,\mathrm{d}t$$

Montrons l'équivalence de la loi scalaire du moment cinétique et de celle de l'énergie cinétique dans le cas d'un solide. Partons de la loi scalaire du moment cinétique exprimée par rapport à l'axe Δ de rotation du système à la vitesse angulaire $\Omega = \dot\theta$. On a alors, en utilisant le caractère circulaire du produit mixte,

$$\mathrm{J}\,\ddot\theta = \sum_i(\overrightarrow{\mathrm{AB}_i}\wedge\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{ext},i}})\cdot\overrightarrow{k} = \sum_i(\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AB}_i})\cdot\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{ext},i}} = \sum_i r_i\,\overrightarrow{e_{\theta_i}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{ext},i}}$$

où r_i représente la distance de B_i à l'axe Δ (par projection orthogonale) et $\overrightarrow{e_{\theta_i}}$ est le vecteur orthoradial des coordonnées cylindriques d'axe Δ repérant la position de B_i. Remarquons pour continuer que B_i est sur une trajectoire circulaire autour de Δ donc sa vitesse s'écrit $\overrightarrow{v_{\mathrm{B}_i}} = r_i\dot\theta\,\overrightarrow{e_{\theta_i}}$, de sort que la multiplication de l'équation précédente par $\dot\theta$ fasse naturellement apparaître cette vitesse :

$$\mathrm{J}\,\ddot\theta\,\dot\theta = \sum_i r_i\dot\theta\,\overrightarrow{e_{\theta_i}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{ext},i}} = \sum_i \overrightarrow{v_{\mathrm{B}_i}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{ext},i}}$$

Il ne reste qu'à intégrer l'équation précédente par rapport au temps entre t_1 et t_2 pour obtenir

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{J}\,\ddot\theta\,\dot\theta\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\overrightarrow{v_{\mathrm{B}_i}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{ext},i}}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{2}\mathrm{J}\dot\theta^2\right]_{t_1}^{t_2} = \sum_i \underset{t_1\to t_2}{\mathrm{W}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext},i})}$$

3 Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

Dans le cas d'un système déformable, il faut rajouter au travail des forces externes celui, non nul en général, des forces internes :

$$\boxed{\underset{t_1\to t_2}{\Delta} E_c = \sum_i \underset{t_1\to t_2}{W}(\overrightarrow{F}_{ext,i}) + \sum_j \underset{t_1\to t_2}{W}(\overrightarrow{F}_{int,j})}$$

Il suffit de penser par exemple au « tourbillon de la patineuse » décrit dans l'exercice présenté en page suivante. Au contraire, pour un système indéformable, le travail des forces internes et toujours nuls car il dépend d'un mouvement des points du système *les uns par rapport aux autres* et est donc nul dans le cas d'un solide.

Démonstration

Considérons deux points M_1 et M_2 du solide. Ces deux points interagissent l'un sur l'autre de telle sorte que $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$ (loi des actions réciproques). De plus, ces forces d'interaction à distance sont nécessairement dirigées selon la même direction que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Le travail élémentaire combiné de ces deux forces s'écrit

$$\delta W_{int,12} = \overrightarrow{F_{1/2}}\cdot\overrightarrow{v_{M_2}}\,dt + \overrightarrow{F_{2/1}}\cdot\overrightarrow{v_{M_1}}\,dt = \overrightarrow{F_{1/2}}\cdot\left(\overrightarrow{v_{M_2}} - \overrightarrow{v_{M_1}}\right)dt = \overrightarrow{F_{1/2}}\cdot\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\,dt$$

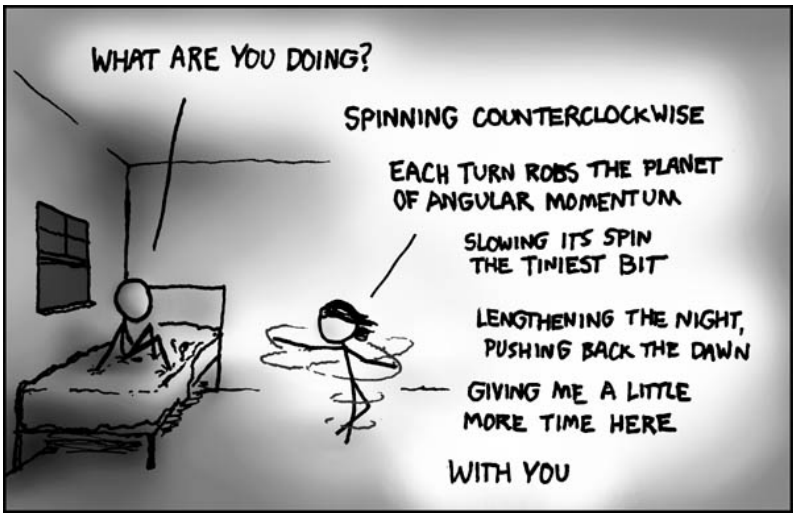
Si M_1 et M_2 appartiennent à un même solide, la norme du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est fixe au cours du temps, donc $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = C^{te}$. En dérivant cette relation par rapport au temps, il vient que

$$2\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = 0$$

c'est-à-dire que le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}$ est toujours orthogonal au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, ce dernier ne pouvant qu'effectuer une rotation sur lui-même et non se contracter. Comme $\overrightarrow{F_{1/2}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$, on en déduit que

$$\boxed{\delta W_{int,12} = \overrightarrow{F_{1/2}}\cdot\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\,dt = 0}$$

Les forces internes ne travaillent pas dans un solide.

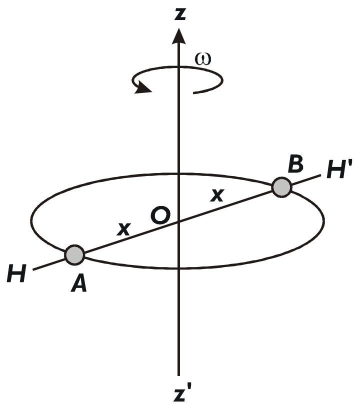


xkcd.com

```
With reasonable assumptions about latitude and body shape,
how much time might she gain them?
Note: whatever the answer, sunrise always comes too soon.
(Also, is it worth it if she throws up?)
```

Exercice

Deux sphères de même masse m, assimilables à deux points matériels, peuvent glisser le long d'une tige horizontale de masse négligeable H′H soudée en O à un axe vertical $z'z$. Les centres A et B des sphères sont constamment maintenus à égale distance de l'axe (OA = OB = r). L'ensemble du système tourne autour de $z'z$ avec une vitesse angulaire ω. La distance r peut être modifiée au cours de la rotation par un observateur faisant partie du système en rotation.



1. Les sphères étant à la distance $r = r_1$ de l'axe, le système est mis en rotation uniforme à la vitesse ω_1. Calculer le moment cinétique σ_1 des deux sphères par rapport à O, ainsi que l'énergie cinétique E_{c1} du système.
2. Pendant la rotation, un opérateur diminue la distance des sphères à l'axe. Elle devient $r = r_2 < r_1$. En l'absence d'intervention des forces extérieures (la force exercée par l'opérateur est une force interne), quelles sont, en fonction de r_1, r_2, ω_1 et E_{c1} les nouvelles valeurs de la vitesse angulaire ω_2 et de l'énergie cinétique E_{c2} ?
3. L'opérateur amène les sphères de la distance r_1 à la distance r_2 dans un déplacement quasi-statique, c'est-à-dire que les sphères sont à tout instant sur des trajectoires quasi-circulaires En déduire la force de l'opérateur sur chacune des sphères lorsque celles-ci sont à la distance r de l'axe. Calculer alors le travail W_{op} fourni par l'opérateur pour amener le système des deux sphères de la position r_1 à la position r_2. Comparer la valeur trouvée à la variation d'énergie cinétique du système.

Solution

1. Comme les deux sphères sont toutes deux situées à la distance r de l'axe de rotation, le moment d'inertie du système des deux sphères vaut $\mathrm{J} = m{r_1}^2 + m{r_1}^2 = 2m{r_1}^2$, de sorte que

$$\boxed{\sigma_1 = \mathrm{J}\omega_1 = 2m{r_1}^2\,\omega_1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E_{c1}} = \frac{1}{2}\mathrm{J}\omega_1 = m{r_1}^2\,{\omega_1}^2}$$

2. Aucune force extérieure ne s'exerçant sur le système, le moment cinétique est conservé : $\sigma_2 = \sigma_1$, soit

$$2m{r_2}^2\,\omega_2 = 2m{r_1}^2\,\omega_1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

On se rend compte que si l'on étend les bras ($r_2 > r_1$ donc $\omega_2 < \omega_1$) la vitesse angulaire décroît alors que si on contracte les bras ($r_2 < r_1$ donc $\omega_2 > \omega_1$), la vitesse angulaire augmente, ce qui explique en partie comment les patineuses peuvent partir « en toupie » puis stopper leur rotation par simple action des bras. Concernant l'expression de l'énergie cinétique, il suffit de remplacer ω_2 par son expression précédente pour obtenir

$$\mathrm{E_{c2}} = m{r_2}^2\,{\omega_2}^2 = m{r_1}^2\,{\omega_1}^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{E_{c2}} = \mathrm{E_{c1}}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

Contrairement au moment cinétique, on remarque que l'énergie cinétique, elle, n'est pas conservé lors d'une modification de l'écartement r des sphères. Par conséquent, il faut bien que « quelque chose » travaille à ce changement d'énergie cinétique.

3. L'accélération nécessaire pour qu'une sphère soit sur une orbite (quasi-)circulaire à la vitesse angulaire (quasi-)constante ω s'écrit $\overrightarrow{a} = -r\omega^2\,\overrightarrow{e_r}$. Ainsi, la force exercée par l'opérateur sur une sphère vaut

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F_{op}}} = m\,\overrightarrow{a} = -m\,r\,\omega^2\,\overrightarrow{e_r} = -m\,r\,{\omega_1}^2\left(\frac{r_1}{r}\right)^4\overrightarrow{e_r} = -m\,r_1\,{\omega_1}^2\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\overrightarrow{e_r}}$$

Le travail sur les deux sphère vaut le double du travail sur une seule sphère, soit

$$\begin{aligned}
\mathrm{W_{op}} &= 2\int_{r_1}^{r_2}\overrightarrow{\mathrm{F_{op}}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&= 2\int_{r_1}^{r_2}\left(-m\,r_1\,{\omega_1}^2\left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right)\mathrm{d}r \\
&= 2\left[m\,r_1\,{\omega_1}^2\frac{1}{2}\,\frac{{r_1}^3}{r^2}\right]_{r_1}^{r_2} \\
&= m\,{r_1}^2\,{\omega_1}^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - m\,{r_1}^2\,{\omega_1}^2
\end{aligned}$$

On retrouve bien $\boxed{\mathrm{W_{op}} = \mathrm{E_{c2}} - \mathrm{E_{c1}} = \Delta\mathrm{E_c}}$

Les forces internes sont bien à prendre en compte lors de l'écriture de la loi de l'énergie cinétique pour les systèmes déformables.