

Mouvement de particules chargées

Partie I

Force de Lorentz

1 Force électrique

La force électrique exercée sur une charge q plongée dans un champ électrique \vec{E} s'écrit

$$\vec{F}_{\text{él}} = q \vec{E}$$

2 Force magnétique

La force magnétique quant à elle dépend de la vitesse \vec{v} de la particule q plongée dans le champ magnétique \vec{B} dans le référentiel considéré :

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

3 Cas général : force de Lorentz

La réunion de ces deux composantes constitue la force de Lorentz qui s'exerce sur une particule de charge q , se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans une région de l'espace où règne à la fois un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} .

$$\vec{F}_{\text{Lo}} = \vec{F}_{\text{él}} + \vec{F}_{\text{mag}} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Pour cadrer les idées, prenons quelques ordres de grandeurs pour un électron : $E \sim 100 \text{ V/m}$ (ordre de grandeur du champ électrique atmosphérique), $B \sim 100 \mu\text{T}$ (ordre de grandeur du champ magnétique terrestre), $v \sim 100 \text{ m.s}^{-1}$, $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Alors

$$F_{\text{él}} = qE \sim 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ N} \quad F_{\text{mag}} \sim qvB \sim 1,6 \cdot 10^{-21} \text{ N} \quad \text{et} \quad P = m_e g \sim 8,9 \cdot 10^{-30} \text{ N}$$

On remarque que le poids est largement négligeable devant chaque composante de la force de Lorentz et ce serait toujours le cas pour le proton pourtant 2000 fois plus lourd que l'électron. En revanche, force électrique et force magnétique peuvent être du même ordre de grandeur à condition d'évoluer dans des conditions de champ magnétique plus intense (par exemple de l'ordre de 1 T) ou à des vitesses plus importantes (v de l'ordre de $1 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ qui commence à s'approcher doucement de celle de la lumière).

EXERCICE M5.1 Action (négligeable) du poids

Un électron initialement au repos est accéléré par une tension de 4,0 kV. Sa vitesse est alors de direction horizontale. En supposant qu'ultérieurement l'électron n'est soumis qu'à son poids, établir l'équation de sa trajectoire. Calculer la distance qu'il doit parcourir pour que son altitude diminue de 1,0 mm.

4 Puissance et travail

D'après la définition du produit vectoriel, la force *magnétique* est à tout moment orthogonale au déplacement $d\vec{OM} = \vec{v} dt$. De ce fait, *elle ne travaille pas* ($\delta W = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{OM} = 0$) *et ne peut que courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule*. La force *électrique*, au contraire, *travaille dans le cas général* et peut donc *modifier l'énergie cinétique*. En résumé, si la seule force de Lorentz s'applique sur le système, le théorème de l'énergie cinétique sur la particule s'écrit

$$\Delta_{AB} E_c = \int_A^B q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} = \underbrace{\int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{OM}}_{\neq 0 \text{ en général}} + \underbrace{\int_A^B q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM}}_{=0}$$

Partie II

Trajectoires de particules chargées dans le vide**1 Dans un champ électrique uniforme et indépendant du temps****a) Mise en équation via la RFD**

Supposons que la particule de charge q n'est soumise qu'à la seule force électrique induite par un champ électrique \vec{E}_0 homogène¹ et indépendant du temps. La relation fondamentale de la dynamique écrite dans le référentiel d'étude supposé galiléen se met alors sous la forme

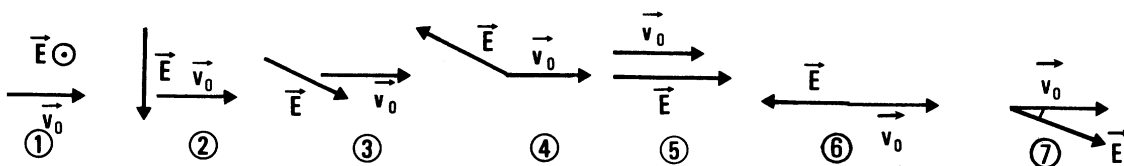
$$m \vec{a} = q \vec{E}_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}_0 = \vec{C}^{\text{te}}}$$

On se retrouve avec un mouvement à vecteur-accélération constant que l'on a déjà résolu dans le chapitre M1, *Cinématique* sous la forme

$$\boxed{\vec{OM}(t) = \frac{q}{m} \vec{E}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0}$$

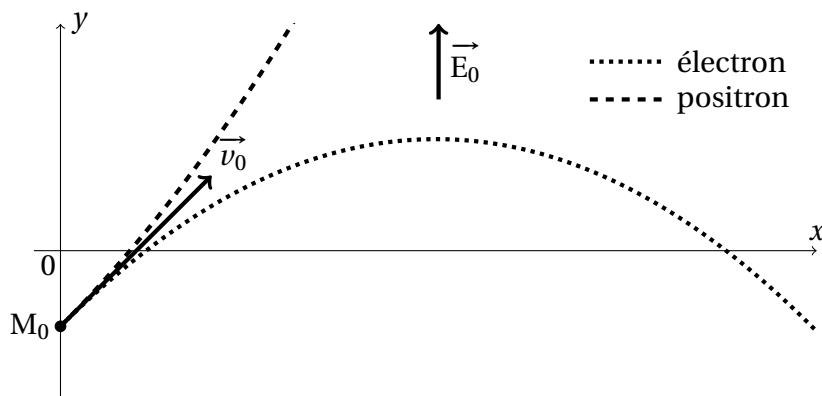
EXERCICE M5.2 Trajectoires dans champ électrique

Une particule de charge positive et de vitesse \vec{v}_0 pénètre dans une région où règne un champ électrique uniforme \vec{E} . Pour chaque cas exposé dans les schémas ci-dessous, préciser dans quel plan se forme la trajectoire (le plan de la feuille est (Oxy)), sa forme et la nature du mouvement.



1. C'est-à-dire identique en tout point de l'espace à un instant t donné.

On a représenté ci-contre la trajectoire d'un électron (pointillés) et d'un positron (tirets) plongés dans un champ uniforme \vec{E}_0 et démarrant avec une vitesse \vec{v}_0 depuis le point M_0 . On peut remarquer que l'électron est dévié sur une trajectoire parabolique à l'opposé de la direction du champ électrique du fait de sa charge négative. Le positron, au contraire, tourne la concavité de sa parabole dans la même direction que le champ électrique. Si l'on avait utilisé un proton plutôt qu'un positron (2000 fois plus lourd), la déviation de la trajectoire rectiligne n'aurait pas du tout été visible sur cette échelle (mais l'aurait été sur une échelle 2000 fois plus grande).



b) Bilan énergétique

On a vu dans le chapitre $\mathcal{M}3$, *Approche énergétique du mouvement d'un point matériel* qu'on pouvait associer une énergie potentielle à la force exercée sur une charge q par un champ électrique uniforme \vec{E}_0 sous la forme

$$E_{p,e,\text{unif}} = -q \vec{E}_0 \cdot \vec{OM}$$

Vous montrerez en seconde année que l'on peut en fait associer à n'importe quel champ \vec{E} un « potentiel » V de sorte que l'énergie potentielle électrique s'écrive $E_{p,e} = qV$. Ainsi, dans le cas particulier d'un champ uniforme, le potentiel s'écrit

$$V(M) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{OM}$$

Le potentiel dont il est question est le même qui définit la tension par une « différence de potentiel » de sorte que si on impose une certaine différence de potentiel $\Delta_{AB}V$ entre deux points A et B, le champ électrique créé est tel que la différence d'énergie potentielle $\Delta_{AB}E_{p,e}$ vaille $q \Delta_{AB}V$. Parés de ces informations, nous pouvons à présent déterminer la vitesse de la particule après accélération par le champ créé par la différence de potentiel. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique à la charge q de masse m soumise uniquement au champ électrique créé par la différence de potentiel $\Delta_{AB}V$. On a alors

$$E_m(A) = E_m(B) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v_A^2 + qV(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 + qV(B)$$

c'est-à-dire

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - \frac{2q}{m} [V(B) - V(A)]}$$

EXERCICE $\mathcal{M}5.3$ Accélérateur linéaire de particules

1. Un proton (de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) est accéléré sous une tension de 4,0 kV en partant sans vitesse initiale. À quelle vitesse sort-il de l'accélérateur? Comparer à celle trouvée pour l'électron pour l'exercice $\mathcal{M}5.1$?
2. Pour améliorer le procédé, on applique au proton une série de n accélérations successives sous la même tension : trouver n tel que le proton atteigne $1/10^6$ de la vitesse de la lumière.

2 Dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

On regarde dans cette partie l'action d'un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ initialement perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ de la particule chargée de charge q et de masse m .

a) Calcul complet (pour mémoire)

EXERCICE M54 Mouvement dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

Supposons que la particule démarre à l'origine du référentiel, c'est-à-dire que l'on ait $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ et ne soit soumis qu'à la seule force de Lorentz magnétique.

1. Montrer que le système différentiel à résoudre s'écrit

$$m \ddot{x} = qB_0 \dot{y} \quad \text{et} \quad m \ddot{y} = -qB_0 \dot{x}$$

2. En déduire que la solution, avec nos conditions initiales, s'écrit

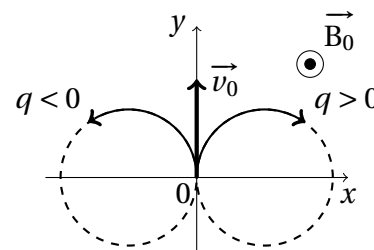
$$\begin{cases} x(t) - \frac{v_0}{\omega_0} = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{cases}$$

3. Montrer que cela correspond à une trajectoire circulaire de rayon R et de centre A (de coordonnées (x_A, y_A) à déterminer), c'est-à-dire qu'à tout moment on a $\|\vec{AM}\|^2 = R^2$.
-

L'exercice précédent permet de montrer de manière purement calculatoire que la trajectoire est bien un cercle de rayon

$$R = \left| \frac{v_0}{\omega_0} \right| = \left| \frac{mv_0}{qB_0} \right|$$

Avec un peu d'habitude (voir correction M5.4), on peut reconnaître l'équation paramétrique d'un cercle de rayon $|v_0/\omega_0|$ centré sur $(v_0/\omega_0, 0)$. Ce cercle est parcouru dans le sens horaire si $\omega_0 > 0$ (donc bien centré sur la droite de l'origine) alors qu'il est parcouru dans le sens trigonométrique si $\omega_0 < 0$ (donc centré sur la gauche de l'origine). En supposant $B_0 > 0$, on en déduit que les particules positives tournent sur une trajectoire circulaire en sens horaire alors que les particules négatives parcourent un cercle en sens trigonométrique, conformément à la direction initiale de la force magnétique qui les dévie ($q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0 = qv_0 B_0 \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = qv_0 B_0 \vec{e}_x$ dont le sens change de droite à gauche en fonction du signe de q).



À retenir!

Plusieurs remarques importantes découlent de cette expression du rayon :

- Plus la quantité de mouvement initiale (mv_0) est grande, plus il sera difficile d'infléchir la course de la particule, d'où un rayon globalement plus grand.
- Plus la charge ou le champ magnétique sont importants, plus la force exercée va être grande donc plus la trajectoire est incurvée, d'où un rayon de courbure plus faible.

La seule « bizarrerie » qui puisse rester à l'esprit est le fait que la force magnétique soit aussi proportionnelle à la vitesse de la particule alors que la dépendance en v_0 de R est inverse comparée à celle en q et B_0 . Ceci va s'expliquer facilement dans la prochaine section qui permet de retrouver très rapidement l'expression du rayon de la trajectoire en la supposant *a priori* circulaire.

 **Astuce**

Le système différentiel

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_0 \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_0 \dot{x} & (2) \end{cases}$$

est d'un type particulier et peut se résoudre plus facilement en passant par un intermédiaire complexe. Posons la fonction du temps à valeurs complexes

$$u(t) = x(t) + i y(t)$$

On remarque que si l'on fait la combinaison membre à membre (1) + i(2), on obtient

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_0 (\dot{y} - i\dot{x}) = -i\omega_0 (i\dot{y} + \dot{x}) \quad \text{soit} \quad \ddot{u} = -i\omega_0 \dot{u}$$

Cette équation est du premier ordre à coefficients constants en \dot{u} . On obtient directement, en utilisant le fait que $\dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = i v_0$,

$$\dot{u}(t) = i v_0 e^{-i\omega_0 t}$$

En intégrant une fois de plus,

$$u(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\omega_0 t} + C^{\text{te}}$$

Afin de faciliter l'interprétation du résultat, choisissons les conditions initiales de sorte que la constante soit nulle (c'est-à-dire que $u(0) = -v_0/\omega_0$). On a alors

$$u(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} e^{-i\omega_0 t}$$

Le point d'affixe u décrit au cours du temps un cercle de centre 0 et de rayon $R = |v_0/\omega_0|$. Ce cercle est bien parcouru dans le sens trigonométrique si $\omega_0 < 0$ et dans le sens horaire si $\omega_0 > 0$.

b) Calcul simplifié sachant que la trajectoire est circulaire (celle à retenir)

Supposons la trajectoire circulaire de rayon R et prenons les conditions initiales de sorte que le centre du cercle soit confondu avec l'origine du repère. Comme la force magnétique ne travaille pas, la vitesse reste constante de sorte que la trajectoire est non seulement circulaire, mais aussi parcourue de manière uniforme. Ainsi, la vitesse² et l'accélération de la particule s'écrivent alors

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta = v_0 \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r$$

La force magnétique s'écrit quant à elle

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = q v_0 B_0 \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = q v_0 B_0 \vec{e}_r$$

L'écriture de la relation fondamentale de la dynamique projetée selon \vec{e}_r permet alors d'en déduire

$$-m \frac{v_0^2}{R} = q v_0 B_0 \quad \text{soit} \quad R = -\frac{m v_0}{q B_0}$$

On retrouve bien l'expression du rayon de la section précédente avec l'information sur le sens de parcours puisque R doit être positif : en supposant $B_0 > 0$, le parcours se fait en sens horaire ($v_0 < 0$) dans le cas d'une charge positive ($q > 0$) alors qu'il se fait en sens trigonométrique ($v_0 > 0$) dans le cas d'une charge négative ($q < 0$).

2. Attention, ici rien n'oblige v_0 à être positif. Au contraire, le signe de v_0 nous renseigne sur le sens (horaire ou direct) du parcours de la trajectoire.

3 Limites relativistes

On a vu que la vitesse pouvait rapidement augmenter en fonction de la différence de potentiel appliquée. En particulier, pour atteindre un tiers de la vitesse de la lumière ($v = c/3$) il suffit pour un électron d'être soumis à une différence de potentiel

$$\Delta V = -\frac{m}{2q} \left(\frac{c}{3}\right)^2 = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \times (1,0 \cdot 10^8)^2 = 28 \text{ kV}$$

ce qui n'est pas une valeur particulièrement importante. Il est donc en général nécessaire de s'appuyer sur la théorie de la relativité qui prend le relais de la mécanique newtonienne quand les vitesses s'approchent de celle de la lumière. En particulier, on note

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Les notions d'énergie cinétique et de quantité de mouvement deviennent alors

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{et} \quad E_c = (\gamma - 1) mc^2}$$

On retrouve bien entendu la limite classique lorsque $v \ll c$, c'est-à-dire pour $\beta \rightarrow 0$ ou $\gamma \rightarrow 1$. Le passage à la limite peut être fait directement dans l'expression de la quantité de mouvement, en revanche il faut prendre garde à bien effectuer le développement limité pour E_c puisque

$$\gamma - 1 = (1 - \beta^2)^{-1/2} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 = \frac{1}{2}\beta^2$$

de sorte qu'il vient bien $E_c = (\gamma - 1) mc^2 \approx \frac{1}{2}\beta^2 mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$

Lors de l'accélération par le champ électrique, l'énergie cinétique peut fortement augmenter ($\gamma \rightarrow \infty$), mais la vitesse ne peut dépasser c puisqu'en inversant

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1$$

Dès lors, il n'est pas pertinent de caractériser l'accélération par la vitesse atteinte, mais plutôt par l'énergie finale obtenue (en électron-volt) après accélération des protons, énergie qui augmenta progressivement dans l'histoire de l'étude des particules subatomiques depuis le MeV (cyclotrons) jusqu'au TeV (LHC) en passant par le GeV (accélérateur linéaire du FermiLab).

Partie III

Applications

1 Accélérateur linéaire de particules (Fermilab)

Il s'agit, dans le cas le plus simple, de créer un champ électrique uniforme à partir de l'application d'une différence de potentielle $\Delta V = V_{\text{sortie}} - V_{\text{entrée}}$ entre deux électrodes. Les particules chargées, lâchées avec une vitesse initiale presque nulle à un bout de l'accélérateur ressortent à l'autre bout de l'accélérateur avec une vitesse donnée par

$$\boxed{v = \sqrt{-\frac{2q}{m} \Delta V}}$$

Le résultat ne semble pas dépendre de la longueur de l'accélérateur, mais en pratique il faut limiter l'intensité du champ électrique ressenti pour éviter certains problèmes (dépassement du champ disruptif de l'air par exemple).

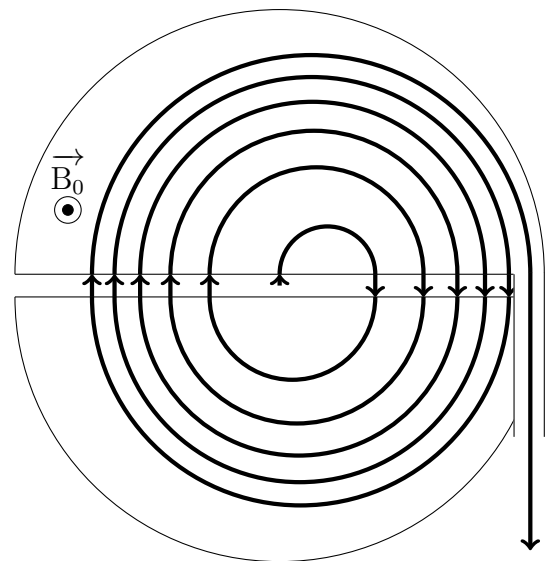
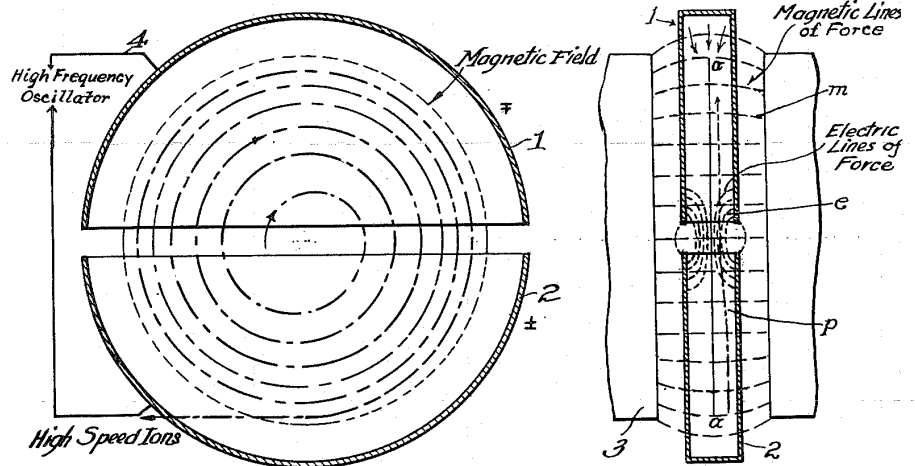
Pour éviter ce dernier écueil, on a conçu des accélérateurs linéaire hyperfréquence (celui du FermiLab en était un exemple) dans lequel le champ électrique varie sinusoïdalement dans le temps. Le parcours est « tronçonné » de cages de Faraday qui isolent les particules chargées (continuant donc d'avancer à vitesse constante) le temps que les polarités s'inversent pour connaître une nouvelle phase d'accélération lors de la sortie de la cage³. De la sorte, on limite l'usage de très hautes tensions, mais l'on doit particulièrement soigner l'introduction des particules pour être en phase avec le champ oscillant.

2 Accélérateurs circulaires : cyclotrons

Le cyclotron est un type d'accélérateur de particules circulaire inventé par Ernest Orlando Lawrence et Milton S. Livingston de l'université de Californie à Berkeley au début des années 1930 (un schéma du dépôt de brevet est donné ci-contre). Le premier modèle de cyclotron de Lawrence, d'un diamètre d'une dizaine de centimètres⁴ et fait de fils et de cire à cacheter, a coûté probablement 25\$ en tout. Il est fabriqué en 1931 par un étudiant, Stanley Livingstone, travaillant au laboratoire de Lawrence. Avec une tension de seulement 1 800 volts, ils obtiennent des protons de 80 keV, après avoir fait subir à ceux-ci plus de 80 accélérations successives.

Le principe est relativement simple : deux zones hémicylindriques sont soumises à un champ magnétique uniforme de sorte que les particules chargées voyageant dans chacune des deux zones se trouvent sur des orbites demi-circulaires. Dans l'intervalle entre les deux zones, un champ électrique sinusoïdal est créé de sorte qu'il pointe toujours dans la bonne direction pour accélérer une particule qui sort d'un hémicylindre⁵. Ceci est facilité par le fait que la période de parcours d'un demi-cercle *ne dépend pas* de la vitesse de la particule puisque le rayon de la trajectoire croît linéairement avec la vitesse. De la sorte, les particules les plus énergétiques se retrouvent naturellement déportées vers l'extérieur du dispositif, jusqu'à ce qu'elles atteignent la « porte de sortie ».

Notons que, contrairement à l'accélérateur linéaire hyperfréquence, le déphasage de la particule avec les variations du champ électrique est relativement peu importante : l'incrément énergétique étant toujours le même, la particule mettra plus de temps à sortir de l'accélérateur, mais en sortira au même rayon donc à la même énergie. Il suffit juste qu'il y ait un bon accord entre la pulsation dudit champ et la pulsation cyclotron $\omega_0 = qB_0/m$.



```

1 import numpy as np
2 import scipy as sp
3 import scipy.integrate
4
5 #####

```

3. Voir l'animation sur <http://tinyurl.com/linac-hyperfreq>

4. Donc tenant dans une main!

5. Voir l'animation <http://tinyurl.com/cyclotron-htm>

```

6  # Préparation du travail: là où on peut modifier les paramètres de la
7  # simulation
8  #####
9
10 tmax,nb_points = 30,10000 # Temps d'intégration et nombre de points
11 m,q = 1.0,1.0           # Masse et charge de la particule
12 d = 0.3                 # Largeur de l'ouverture où s'exerce le champ électrique
13 phi = 0                 # Déphasage du champ électrique
14 OMO= np.zeros(3)       # Position initiale
15 v0 = np.zeros(3)       # Vitesse initiale
16 B0 = np.array([0,0,1.0]) # Champ magnétique selon uz
17 E0 = np.array([1.0,0,0]) # Champ électrique selon ux
18
19 #####
20 # À présent intégration de l'équation du mouvement, on essaie de travailler
21 # vectoriellement en réarrangeant les dimensions des objets dont on dispose
22 # pour se rapprocher de ce qu'on connaît en physique.
23 #####
24
25 # Pulsation cyclotron
26 wc = q*np.linalg.norm(B0) / m
27
28 def E(position,t):
29     """ Champ électrique subit en fonction de la position dans le système : Il
30     n'est non nul qu'entre les deux parties hémicylindriques où il varie
31     sinusoidalement pour être toujours bien orientée quand la particule passe."""
32     x,y,z = position
33     if abs(x) < d: return E0 * np.cos(wc*t+phi) # Champ variable dans l'entrefer
34     else:         return np.zeros(3)           # Sinon champ électrique nul
35
36 def f(y,t):
37     """ Fonction d'intégration du système différentiel: l'accélération est
38     donnée par l'expression de la force de Lorentz """
39     y = y.reshape(2,3) # Passage d'un vecteur 6D à deux vecteurs 3D
40     position, vitesse = y
41     # Le produit vectoriel s'écrit np.cross
42     acceleration = q/m * (E(position,t) + np.cross(vitesse,B0))
43     # Renvoi du résultat avec retour de deux vecteur 3D à un vecteur 6D
44     return np.array([vitesse,acceleration]).reshape(6)
45
46 y0 = np.array([OMO,v0]).reshape(6) # Condition initiales (remises à 6D au vol)
47 t = np.linspace(0,tmax,nb_points) # Temps d'intégration
48 solution = sp.integrate.odeint(f,y0,t) # Intégration proprement dite
49
50 # On redistribue les nb_points vecteurs 6D en nb_points fois deux vecteurs 3D
51 solution = solution.reshape(nb_points,2,3)
52 position = solution[:,0] # La récupération est alors simplifiée pour la position
53 vitesse = solution[:,1] # et la vitesse
54

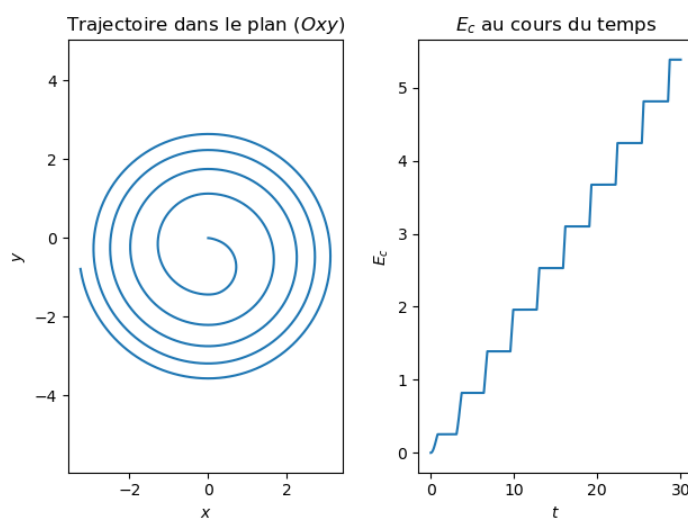
```



```

55 # La transposition (maintenant que vous connaissez les matrices) permet de
56 # passer à 3 lignes à nb_points colonnes donc récupérer dans X, Y et Z
57 # l'évolution de chaque coordonnée au cours du temps.
58 X,Y,Z = position.transpose()
59 # Récupération du carré de la vitesse (noter l'usage de axis=1)
60 Vcarree = np.linalg.norm(vitesse,axis=1)**2
61
62 #####
63 # Ne reste plus qu'à faire la partie graphique
64 #####
65
66 import matplotlib.pyplot as plt
67
68 plt.subplot(121) # Une ligne, deux colonnes, premier graphique
69 plt.plot(X,Y) ; plt.xlabel('$x$') ; plt.ylabel('$y$')
70 plt.axis('equal') ; plt.title('Trajectoire dans le plan $(Oxy)$')
71 plt.subplot(122) # Une ligne, deux colonnes, deuxième graphique
72 plt.plot(t,0.5*m*Vcarree) ; plt.xlabel('$t$') ; plt.ylabel('$E_c$')
73 plt.title("$E_c$ au cours du temps")
74 plt.tight_layout()
75 plt.savefig('PS/M5_cyclotron.png') ; plt.savefig('PS/M5_cyclotron.eps')

```



3 Spectromètre de masse

Qui n'a pas déjà rêvé de savoir comment fonctionner le superbe spectromètre de masse de la mystérieuse Abby⁶. Armés du présent cours, nous avons les moyens de comprendre comment il fonctionne. La substance à analyser est tout d'abord bombardée par des électrons de manière à l'ioniser et la fragmenter partiellement. Les ions résultants sont alors accélérés par un champ électrique jusqu'à atteindre une vitesse

$$v = \sqrt{2 \left| \frac{q}{m} \Delta V \right|}$$



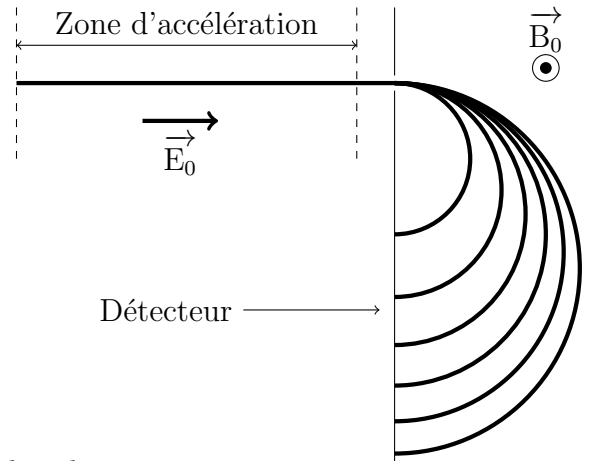
6. Voir la série NCIS, mais *après* les concours!

à l'entrée de la zone où est appliquée un champ magnétique uniforme. Celui-ci dévie plus ou moins les ions selon leur rapport q/m avec un rayon de courbure donné par

$$R = \left| \frac{mv}{qB_0} \right| = \left| \frac{m}{qB_0} \right| \sqrt{2 \left| \frac{q}{m} \Delta V \right|} = \frac{\sqrt{2|\Delta V|}}{B_0} \sqrt{\left| \frac{m}{q} \right|}$$

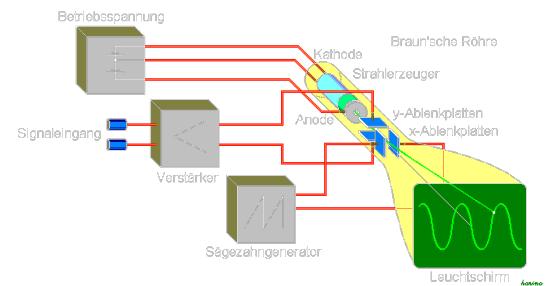
Il est à noter que, contrairement à ce qu'on aurait pu penser de prime abord, le rayon n'est pas directement proportionnel au rapport m/q mais à sa racine. Ceci est dû au fait qu'il faut d'abord accélérer les particules et qu'une même différence de potentielle accélèrera moins (à charge constante) les particules les plus massives.

On remarque que le rayon de courbure (donc le point d'impact sur le détecteur) sera d'autant plus grand que le rapport m/q est important : le spectromètre de masse permet la séparation des divers constituant du composé à déterminer. La comparaison à une banque de spectre permet alors en général d'en déduire la nature du composé étudié.



4 Principe de l'oscilloscope

Un oscilloscope n'est rien d'autre que deux plaques conductrices en regard portées à la différence de potentiel imposée par la tension à mesurer. Ainsi, tout faisceau d'électron passant entre les deux plaques sera dévié par le champ uniforme créé entre ces deux plaques chargées. La déviation mesurée sur l'écran à la sortie des deux plaques est simplement proportionnelle au champ électrique exercé et donc à la différence de potentiel imposée. Il suffit alors de rajouter le balayage horizontal (via un autre système de plaques, perpendiculaire au premier, affecté d'une tension en dents de scie) pour obtenir une représentation temporelle de la tension mesurée. La figure ci-contre, issue de wikipedia . de, résume bien la situation



Démonstration

Supposons que la différence de potentiel entre les deux plaques crée un champ $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$. Les particules chargées de charge q arrivent avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. La vitesse restant constante suivant \vec{e}_x puisque $\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$, les charges traversent la largeur L des plaques en un temps $t_{\text{vol}} = L/v_0$. La déviation suivant l'axe vertical est donc donnée par

$$z_{\text{max}} = \frac{qE_0}{2m} t_{\text{vol}}^2 = \frac{qE_0}{2m} \left(\frac{L}{v_0} \right)^2$$

c'est-à-dire bien directement proportionnel à E_0 donc à la tension appliquée.

CORRECTION M51 Action (négligeable) du poids

La mécanique nous a déjà appris qu'un électron soumis à une différence de potentiel de 1 V acquiert une énergie de 1 eV sous forme d'énergie cinétique. Celui-ci acquiert donc une énergie de $E_c = 4,0 \text{ keV} = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$, soit une vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,4 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 3,8 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

On est à $1/10^6$ de la vitesse de la lumière donc pas encore relativiste mais on s'en approche. Selon l'axe vertical, l'équation du mouvement est simplement $\ddot{z} = g$ (avec z vers le bas) avec une vitesse verticale initialement nulle, soit $z = gt^2/2$ en prenant un électron initialement à l'origine du repère. En revanche, selon \vec{e}_x , on a $\ddot{x} = 0$, soit $x(t) = v_0 t$. On en déduit

$$z(x) = \frac{g}{2} \times \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \quad \text{ou inversement} \quad x(z) = v_0 \sqrt{\frac{2z}{g}} = 3,8 \cdot 10^7 \times \sqrt{\frac{2 \times 1,0 \cdot 10^{-3}}{9,81}} = 5,4 \cdot 10^2 \text{ km}$$

À l'échelle du laboratoire, on peut bien entièrement négliger l'action du poids pour modéliser la trajectoire d'un électron.

CORRECTION M52 Trajectoires dans champ électrique

1. Mouvement uniformément accéléré : parabole dans le plan (Oxz) . Concavité selon \vec{e}_z .
2. Mouvement uniformément accéléré : parabole dans le plan (Oxy) . Concavité selon $-\vec{e}_y$.
3. Mouvement uniformément accéléré : parabole dans le plan (Oxy) . Concavité selon $-\vec{e}_y + 2\vec{e}_x$.
4. Mouvement uniformément accéléré : parabole dans le plan (Oxy) . Concavité selon $\vec{e}_y - 2\vec{e}_x$.
5. Mouvement rectiligne uniformément accéléré vers la droite (selon $+\vec{e}_x$).
6. Mouvement rectiligne uniformément accéléré vers la gauche (selon $-\vec{e}_x$).
7. Mouvement uniformément accéléré : parabole dans le plan (Oxy) . Concavité selon $-\vec{e}_y + 2\vec{e}_x$.

CORRECTION M53 Accélérateur linéaire de particules

1. Initialement, le proton possède uniquement une énergie mécanique sous forme d'énergie potentielle qU que l'on convertit entièrement en énergie cinétique. Ainsi,

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 4,0 \cdot 10^3}{1,7 \cdot 10^{-27}}} = 8,8 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

ce qui représente une vitesse 42 fois plus faible que pour un électron accéléré par la même tension.

2. À chaque passage accélérateur, l'énergie cinétique augmente de la même quantité qU , au bout de n passages, l'énergie cinétique vaut nqU de sorte que, pour atteindre $c/10$, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{2} m_p \left(\frac{c}{10}\right)^2 = nqU \quad \text{soit} \quad n = \left\lceil \frac{m_p c^2}{200 qU} \right\rceil = 1175$$

CORRECTION M54 Mouvement dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps

1. La seule force s'exerçant sur la particule est la force de Lorentz magnétique $q \vec{v} \wedge \vec{B}_0$, de sorte que la relation fondamentale de la dynamique s'écrive

$$m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

La projection suivant \vec{e}_z donne directement $\ddot{z} = 0$. Or, la vitesse initiale suivant z étant nulle, $\dot{z} = C^{te} = 0$, de sorte que le mouvement se limite au plan Oxy et la vitesse s'écrit $\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$. Ainsi,

$$q \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = q (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) \wedge B_0 \vec{e}_z = qB_0 (-\dot{x}\vec{e}_y + \dot{y}\vec{e}_x)$$

Les projections suivant \vec{e}_x et \vec{e}_y donnent respectivement

$$m \ddot{x} = qB_0 \dot{y} \quad \text{et} \quad m \ddot{y} = -qB_0 \dot{x}$$

2. Une première méthode consiste à voir la première équation comme

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = qB_0 \frac{dy}{dt} \quad \text{soit} \quad m \dot{x} = qB_0 y + C^{te}$$

Or, d'après les conditions initiales, on a à la fois $\dot{x}(0) = 0$ (car \vec{v}_0 est suivant \vec{e}_y) et $y(0) = 0$, d'où l'on déduit $C^{te} = 0$, c'est-à-dire $\dot{x} = qB_0 y/m$ que l'on peut alors remplacer dans la seconde équation

$$m \ddot{y} = -qB_0 \left(\frac{qB_0}{m} y \right) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 y = 0$$

Posons $\omega_0 = qB_0/m$. (Notez que, pour une fois, rien n'empêche ω_0 d'être négatif selon les signes respectifs de q et B_0). La solution générale de cette équation s'écrit

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Comme $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_0$, on a $y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

Il reste à intégrer une fois la relation $\dot{x} = qB_0 y/m = \omega_0 y(t)$ pour obtenir, en utilisant $x(0) = 0$,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t)$$

En résumé,

$$\begin{cases} x(t) - \frac{v_0}{\omega_0} = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{cases}$$

3. La caractérisation d'un cercle sous la forme $\|\vec{AM}\|^2 = R^2$ s'écrit, lorsqu'on passe aux composantes ;

$$(x(t) - x_A)^2 + (y(t) - y_A)^2 = R^2$$

Or, les expressions précédentes de $x(t)$ et $y(t)$ permettent d'isoler $\cos \omega_0 t$ et $\sin \omega_0 t$ dont la somme des carrés donnent directement 1. Ainsi, on remarque que

$$\left(x(t) - \frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 + y(t)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2 = R^2$$

On en déduit que

$$R = \left| \frac{v_0}{\omega_0} \right| = \left| \frac{m v_0}{q B_0} \right|$$