

## Systemes à un degré de liberté et oscillateurs

Partie I

### Systeme à un degré de liberté

#### 1 Définition

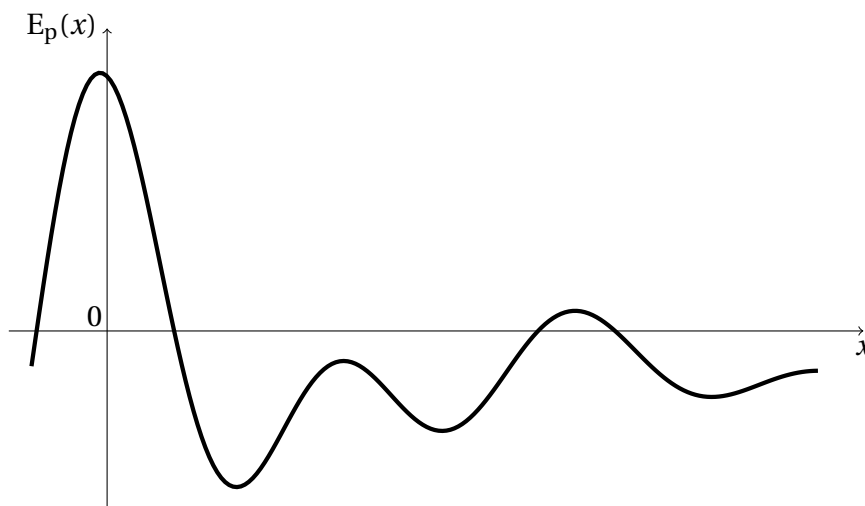
Les phénomènes physiques dépendant du temps sont généralement décrits par des équations différentielles. Dans le cas le plus simple, il y a une seule grandeur qui varie et on parle de système à *un degré de liberté*, la plupart du temps régi par une équation différentielle du second ordre. Pour notre étude, nous supposons que l'énergie mécanique du système peut s'exprimer en fonction d'une unique variable (par exemple  $x$ ) et de sa dérivée temporelle ( $\dot{x}$  pour notre exemple) sous la forme :

$$E_m = E_m(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x)$$

#### 2 Graphe d'énergie potentielle

Dans le chapitre précédent, on a vu comment associer une énergie potentielle à une force conservative ou une somme de forces conservatives. On va à présent utiliser ces informations de manière graphique pour déduire les caractéristiques des mouvements considérés. Plaçons-nous dans le cas où toutes les forces sont conservatives et supposons que l'énergie potentielle totale ait la forme suivante.

extrema

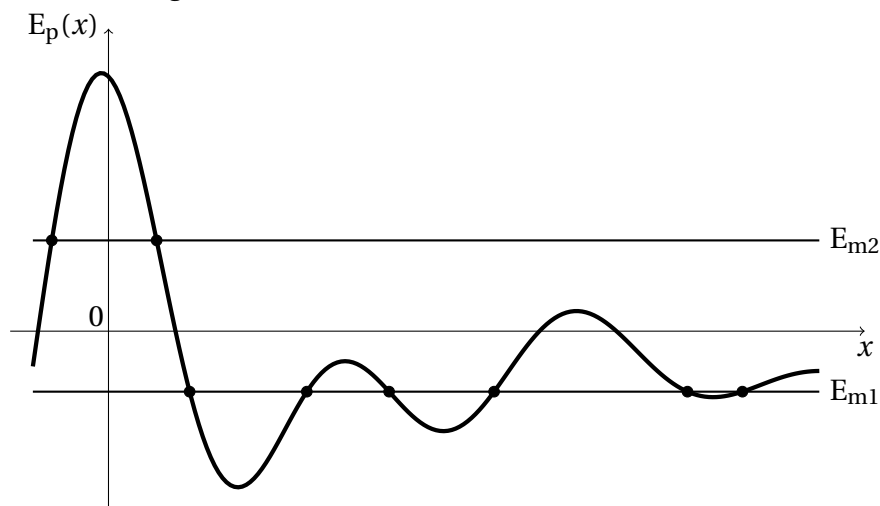


### a) Positions de vitesse nulle

L'énergie mécanique étant conservée par hypothèse, on a  $E_m = C^{te}$  sur toute la durée du mouvement. On peut donc écrire

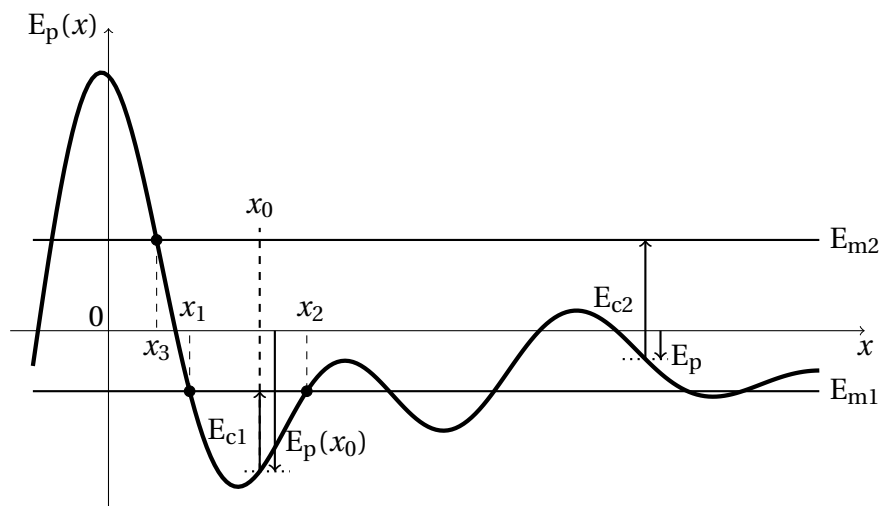
$$E_c = E_m - E_p(x) = C^{te} - E_p(x)$$

Les points de vitesse nulle correspondent donc aux positions  $x$  telles que l'énergie potentielle égale la valeur (fixée) de l'énergie mécanique, c'est-à-dire aux points d'intersection de la courbe  $E_p(x)$  avec la droite horizontale correspondant à  $E_m$ . Sur l'exemple suivant on trouve 6 positions de vitesse nulle avec l'énergie  $E_{m1}$  contre seulement 2 avec l'énergie  $E_{m2}$ .



### b) États liés et de diffusion

Néanmoins, l'énergie cinétique possède une caractéristique dont l'énergie potentielle ne s'embarasse pas : elle est toujours positive<sup>1</sup>. De ce fait, pour une énergie mécanique  $E_m$  donnée, les positions  $x$  accessibles doivent vérifier  $E_p(x) \leq E_m$  : la courbe  $E_p(x)$  doit toujours être *en dessous* de la droite horizontale représentative de l'énergie mécanique allouée pour le mouvement considéré. Prenons par exemple un mobile placé en  $x_0$  à qui l'on communique la vitesse adéquate pour avoir l'énergie mécanique souhaitée. Si l'on suppose de plus que la vitesse est initialement dirigée vers la gauche ( $\dot{x} < 0$  donc  $x$  diminue initialement), la particule se rapproche de  $x = 0$  dans les deux situations. L'énergie cinétique commence par croître, passe par un maximum quand l'énergie potentielle est à son minimum puis décroît et finit par s'annuler (en  $x_1$  pour  $E_{m1}$  et  $x_3$  pour  $E_{m2}$ ).

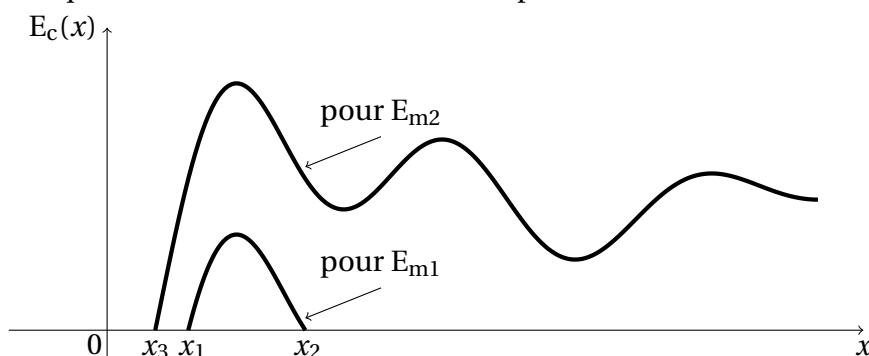


1. Car pour obtenir une vitesse qui soit imaginaire pure, il faut se lever de bonne heure...

La particule ne pouvant aller plus à gauche (sous peine de voir sa vitesse devenir imaginaire), elle fait demi-tour et repart en direction des  $x$  croissants : l'énergie cinétique croît, passe par un maximum et décroît. Mais là, il y a un changement de comportement :

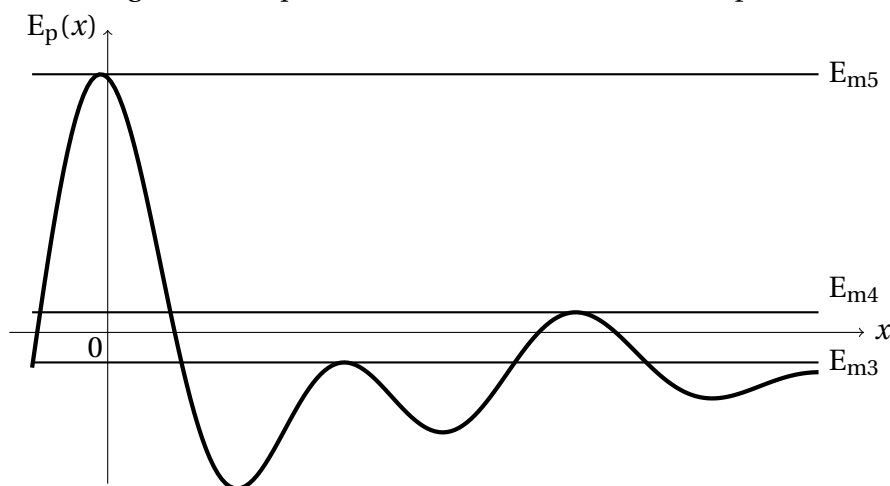
- Pour  $E_m = E_{m1}$ , la vitesse s'annule à nouveau en  $x_2$  et la particule fait à nouveau demi-tour, ne pouvant aller plus loin. Elle repasse donc par  $x_0$  avec exactement la même énergie cinétique qu'initialement et va donc suivre le même chemin dans le même temps : la trajectoire est à la fois *bornée* ( $x$  est contraint à varier entre  $x_1$  et  $x_2$ ) et *périodique* puisque la particule repasse en chaque point dans les mêmes conditions que précédemment et aura donc la même évolution temporelle. On parle d'*état lié*.
- Pour  $E_m = E_{m2}$ , l'énergie cinétique de la particule connaît un minimum local lors du passage par le premier maximum local de l'énergie potentielle, mais elle ne s'annule pas. D'ailleurs, aussi loin que l'on connaît  $E_p(x)$ , il n'y a plus de point d'intersection avec  $E_{m2}$  : la particule peut s'enfuir jusqu'à l'infini, il s'agit d'un *état de diffusion*.

Si l'on représente à présent l'évolution de l'énergie cinétique en fonction de la position (à l'aide de la relation  $E_c(x) = E_m - E_p(x)$ ) pour les deux cas, on remarque que l'information était déjà contenue dans le graphique précédent pour qui veut bien faire l'effort de l'interpréter dans son ensemble.



### c) Barrière de potentiel

Dans l'exemple précédent, le mouvement avec l'énergie  $E_{m1}$  était un *état lié* qui restait contraint à se déplacer dans le premier « creux » du graphique de l'énergie potentielle. Pour réussir à passer la première barrière de potentielle<sup>2</sup>, il faut fournir une énergie mécanique strictement<sup>3</sup> supérieure à une valeur  $E_{m3}$  visible sur la courbe suivante. Pour permettre au mobile de s'échapper à l'infini vers la droite, il faut lui communiquer une énergie mécanique initiale strictement supérieure à  $E_{m4}$ . Enfin, pour lui permettre de s'échapper à la fois par la droite et par la gauche, l'énergie mécanique initiale doit être strictement supérieure à  $E_{m5}$ .

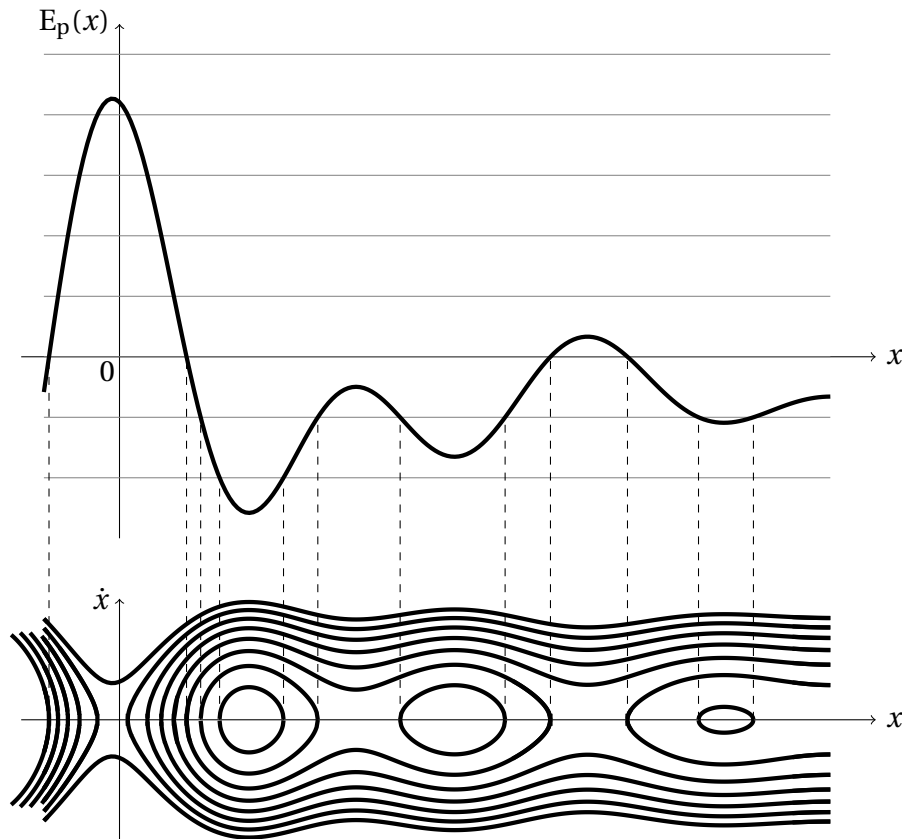


2. C'est-à-dire la première « bosse » dans la courbe de  $E_p(x)$ .

3. On peut montrer qu'en cas de stricte égalité (ce qui, bien entendu, n'est jamais le cas en réalité), le mobile met un temps infini à atteindre le haut de la bosse.

### d) Lien avec le portrait de phase

Graphe en énergie potentielle et portrait de phase sont comme regarder un même objet sous deux angles différents. On peut dire que le profil énergétique est la « vue de profil » alors que le portrait de phase correspond à la « vue de dessus ». De ce fait, les informations qu'ils contiennent sont en large partie redondantes mais selon le problème que l'on cherche à traiter, on interprétera plutôt l'un ou l'autre (ou l'un sera plus facile à tracer que l'autre à partir de mesures expérimentales).



La figure de la page suivante fait apparaître plus particulièrement l'aspect tridimensionnel du lien profil énergétique/portrait de phase : le profil énergétique correspond à la section  $\dot{x} = 0$  alors que les trajectoires du portrait de phase correspondent aux lignes de niveaux de la surface tridimensionnelle  $E_m(x, \dot{x})$

## 3 Position d'équilibre

### a) Définition

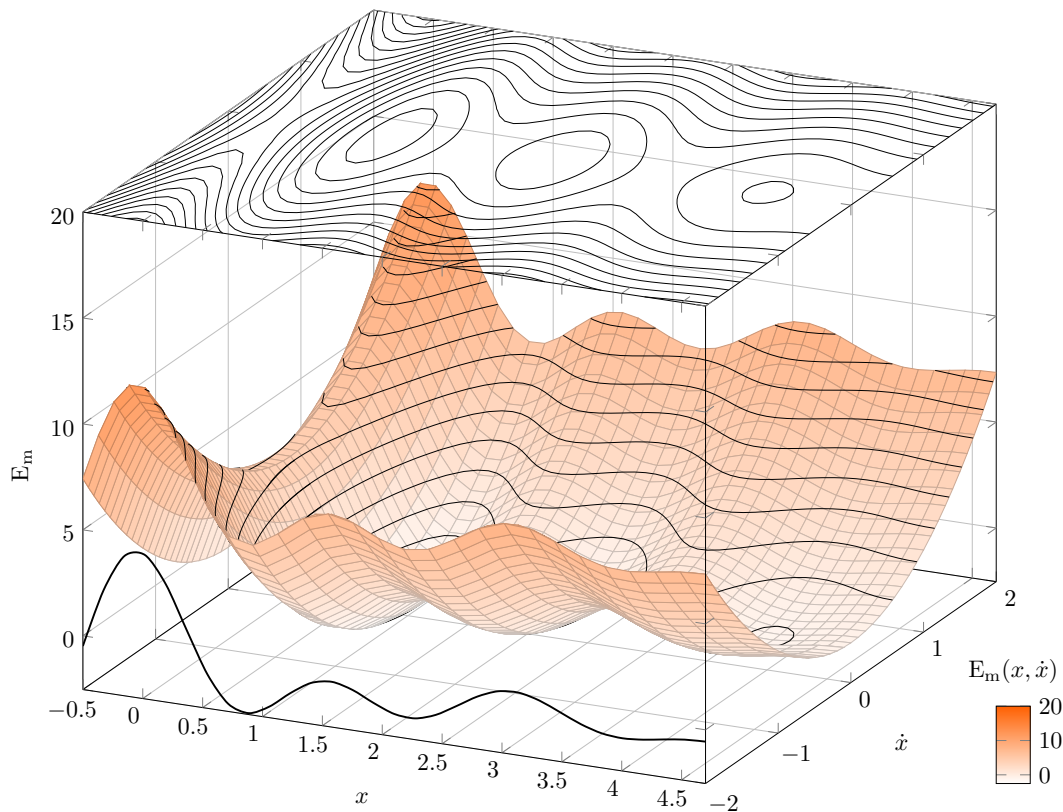
Une position d'équilibre est une position telle que, si on y laisse le mobile avec une vitesse nulle ( $\vec{v} = \vec{0}$ ) alors il n'en bouge pas : la vitesse ne varie pas, ce qui se traduit par  $\vec{a} = \vec{0}$  à tout instant.

On en déduit immédiatement, par application de la RFD, que la résultante des forces s'exerçant sur le système doit être nulle.

#### ⚠ Attention!

On peut très bien passer par une position d'équilibre sans s'y arrêter (comme le point le plus bas de la trajectoire d'un pendule simple). On peut aussi très bien avoir une position où la somme des forces est nulle *sans que ce soit* une position d'équilibre, pour la simple raison que les forces (par exemple de frottement) qui font intervenir la vitesse peuvent annuler la résultante en des points qui ne sont pas des équilibres en l'absence de ces forces. Pour chercher une position d'équilibre, il faut donc imposer dans la RFD à la fois

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{0}.$$



### b) Stabilité

On dit qu'une position d'équilibre est

**stable** s'il existe une force de rappel qui, quand on s'éloigne de l'équilibre, ramène le mobile vers la position d'équilibre;

**instable** si au contraire lorsqu'on s'éloigne de l'équilibre la résultante des forces tend à éloigner encore plus le mobile de la position d'équilibre.

### c) Lien avec l'énergie potentielle

D'après la définition de l'énergie potentielle totale du système, celle-ci est liée à la résultante  $\vec{F}$  des forces conservatives via la relation

$$dE_p = -\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Si l'on se place sur une position d'équilibre, la résultante est nulle et on en déduit que si on se déplace un peu autour de la position d'équilibre

$$x_{\text{éq}} \text{ est position d'équilibre} \iff dE_p = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$$

### ⚠ Attention!

Il est important de noter que l'on dérive toujours l'énergie potentielle par rapport à la *position* et non par rapport au temps car la recherche d'une position d'équilibre se fait indépendamment de l'existence de tout mouvement constaté. De plus, lors d'un mouvement donné, l'énergie potentielle est toujours maximale (donc de dérivée temporelle nulle) lorsque la particule fait demi-tour du fait de l'annulation de la vitesse à cet instant, mais ça n'en fait pas une position d'équilibre pour autant!

De la relation précédente, on déduit que les positions d'équilibre correspondent aux *extrema* de la fonction  $E_p(x)$ . Reste à déterminer lesquelles sont stables et lesquelles ne le sont pas.

Une position d'équilibre est dite *stable* si, lorsqu'on s'en éloigne légèrement, la résultante des forces tend à nous ramener vers elle, c'est-à-dire que la résultante  $\vec{F}$  est toujours opposée au déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  de sorte que leur produit scalaire soit négatif, soit

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} > 0$$

Que l'on s'éloigne à droite ou à gauche de la position d'équilibre,  $E_p$  ne peut que croître, ce qui s'exprime

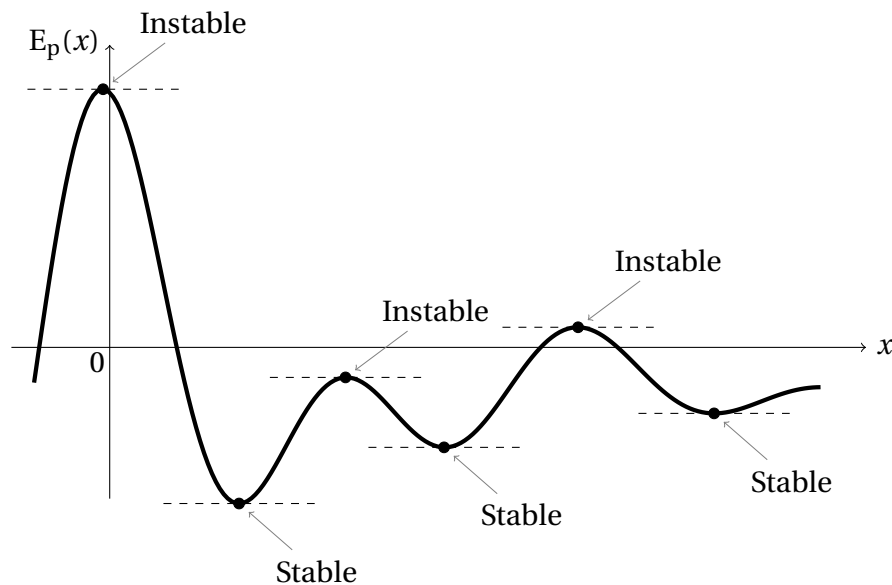
$$x_{\text{éq}} \text{ équilibre stable} \iff x_{\text{éq}} \text{ minimum de } E_p(x) \iff \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) > 0$$

Une position d'équilibre est dite *instable* si au contraire, lorsqu'on s'en éloigne légèrement, la résultante des forces tend à nous éloigner encore plus de la position d'équilibre, c'est-à-dire que la résultante  $\vec{F}$  est toujours dans le même sens que le déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  de sorte que leur produit scalaire soit positif, c'est-à-dire

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} < 0$$

Que l'on s'éloigne à droite ou à gauche de la position d'équilibre,  $E_p$  ne peut que décroître, ce qui s'exprime

$$x_{\text{éq}} \text{ équilibre instable} \iff x_{\text{éq}} \text{ maximum de } E_p(x) \iff \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) < 0$$

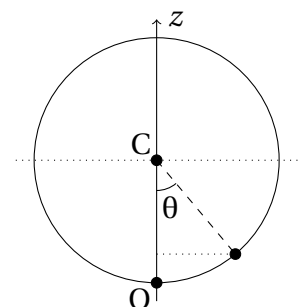


## 4 Exemples

### a) Perle sur un cercle vertical sans frottement

Le problème de la perle coulissant sans frottement sur un cercle vertical de rayon  $R$  est en tout point identique à celui du pendule simple, si ce n'est qu'il n'y a plus à s'inquiéter du fait que le « fil » ait à rester tendu. Sur les deux forces s'exerçant (poids et réaction du support), seul le poids travaille et est associé à l'énergie potentielle<sup>4</sup>

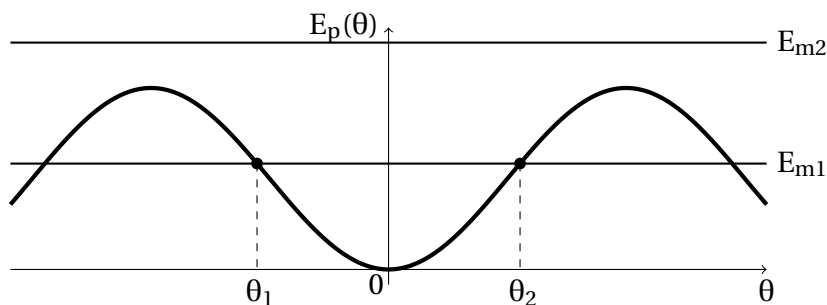
$$E_p = mgz = mgR(1 - \cos\theta)$$



4. Avec  $z$  vers le haut et l'origine prise, pour changer, au bas du cercle, d'où  $z = R - R\cos\theta$ .

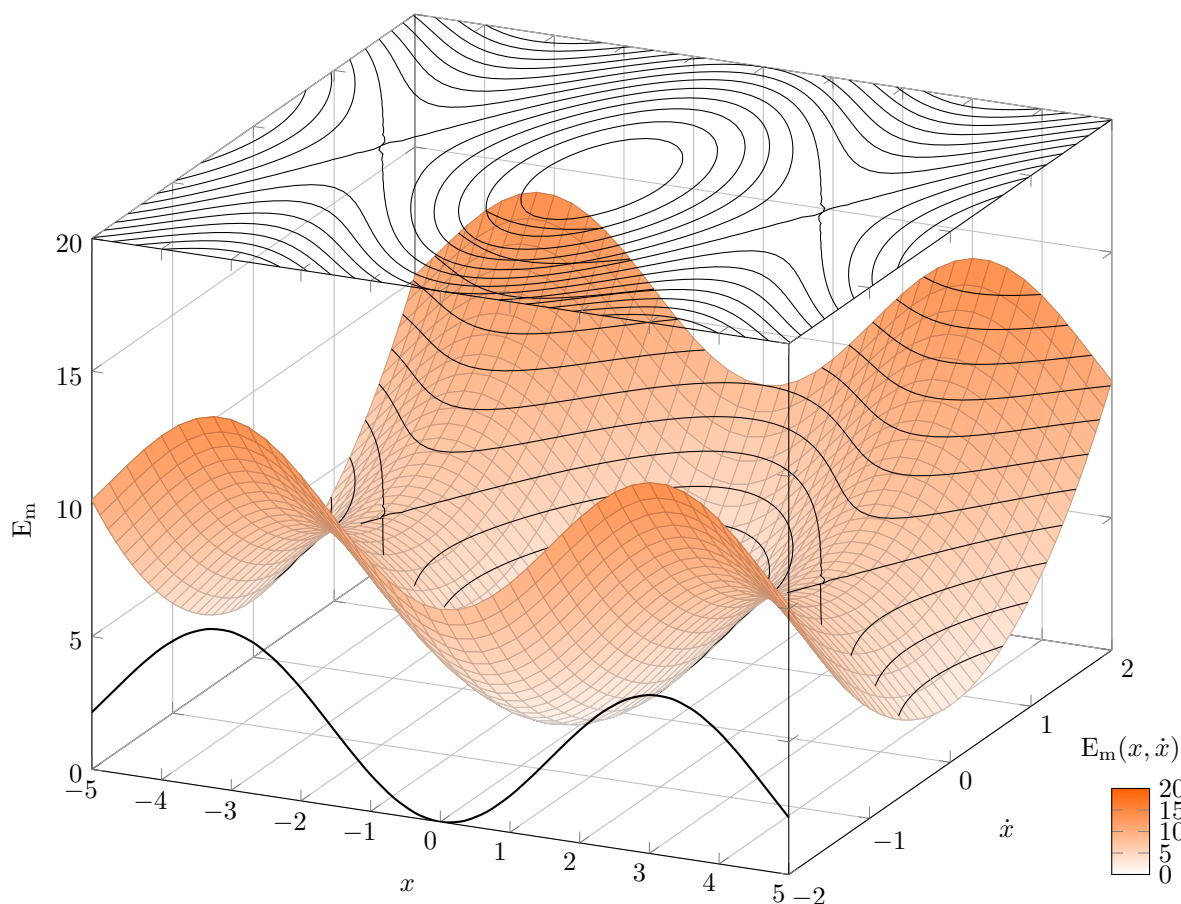
Plusieurs comportements différents peuvent apparaître :

- La situation où l'énergie mécanique est négative ne peut pas exister car l'énergie cinétique devrait toujours être strictement négative, ce qui ne peut arriver<sup>5</sup>.
- Si l'énergie mécanique est comprise entre 0 et  $2mgR$  (cas  $E_{m1}$ ), le mouvement est contraint entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par le puit de potentiel :  $\theta$  varie périodiquement<sup>6</sup> entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en passant par un maximum de vitesse pour  $\theta = 0$ .
- Si l'énergie est supérieure à  $2mgR$  (cas  $E_{m2}$ ), le mobile franchit les barrières de potentiel : on a un état de diffusion en  $\theta$ , c'est-à-dire que dans l'espace physique la perle fait des tours de cercle toujours dans le même sens.



La représentation tridimensionnelle ci-dessous permet de se rendre compte que

- pour l'énergie  $E_{m1}$ , le mobile reste à tourner dans la « vallée » centrale sans pouvoir s'en échapper ;
- pour l'énergie  $E_{m2}$ , le mobile reste à « flanc de montagne » toujours du même côté que ce soit<sup>7</sup> « l'ubac » ou « l'adret ».



5. Toujours pas de vitesse imaginaire...

6. Attention, le comportement n'est sinusoïdal que si  $|\theta| \ll 1$ .

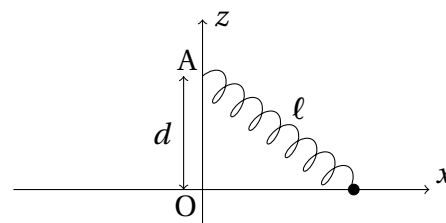
7. Révisez vos cours de géographie! Ou alors visitez les pages wikipédia éponymes.

### b) Oscillateur de Landau

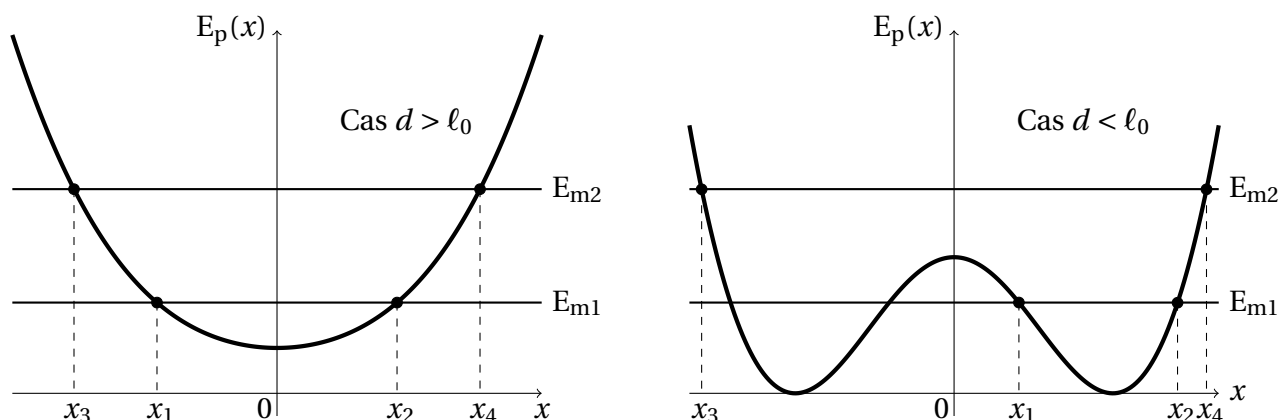
L'oscillateur dit « de Landau<sup>8</sup> » traduit le mouvement d'une perle coulissant sans frotter le long d'un axe horizontal et attachée à un ressort excentré de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Dans ces conditions, seule la tension du ressort travaille et l'on a

$$E_p = \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k(\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0)^2$$

Il est intéressant de remarquer que le profil énergétique n'est pas le même selon que  $d$  est plus grand ou plus petit que  $\ell_0$  :



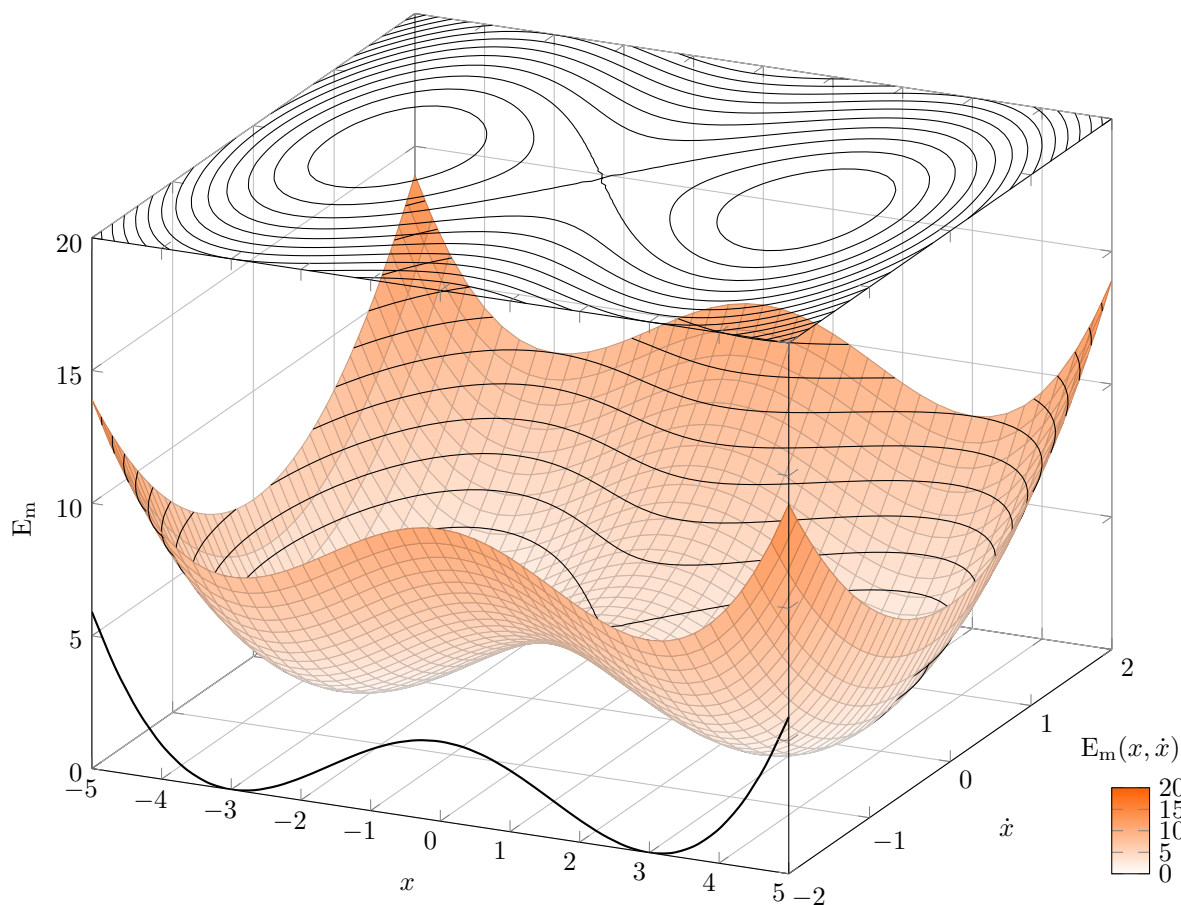
- Si  $d > \ell_0$ , le ressort est à tout moment étiré et va donc toujours tenter de ramener le mobile vers le point O, qui constitue la seule position d'équilibre stable.
- Si  $d < \ell_0$ , le ressort est comprimé si jamais il passe au point O. Cette position d'équilibre (si l'on est à l'arrêt en O, les forces sont toutes verticales et il n'y a donc pas de raison de se déplacer horizontalement) est instable puisqu'à la moindre occasion, le ressort cherche à se décompresser en éloignant la particule de O. Il apparaît donc deux nouvelles positions d'équilibre stables de part et d'autre du point O : les points  $x$  où la longueur  $\ell$  du ressort vaut exactement  $\ell_0$ .



Dans le cas  $d > \ell_0$ , quelle que soit l'énergie mécanique disponible, le mobile oscille autour du point O. En revanche, dans le cas  $d < \ell_0$ , le comportement est différent selon que le mobile possède une énergie mécanique  $E_{m1}$  ou  $E_{m2}$ . Dans le premier cas, le mouvement est contraint d'un côté du point O (ici du côté droit, entre  $x_1$  et  $x_2$ ) avec une vitesse maximale lors du passage par la position d'équilibre stable. Dans le second cas, le mouvement est symétrique de part et d'autre du point O (ie de  $x_3$  à  $x_4$ ) mais avec un minimum local d'énergie cinétique lors du passage par le point milieu, la tension du ressort freinant le mobile lors de la phase d'approche alors qu'elle le réaccélère en le poussant dès la position O franchie. Le graphe en trois dimension de la page suivante montre plus particulièrement le cas  $d < \ell_0$  avec les deux puits de potentiels pouvant retenir la particule lorsque l'énergie mécanique est inférieure à  $E_p(0)$  et le tracé du portrait de phase correspondant sur lequel on reconnaît bien la présence des deux équilibre stables (fond des vallées) et de l'équilibre instable (point col)

8. Du nom de Lev Landau, théoricien russe (1908 – 1968) dont le « cours de physique théorique » en 10 volumes qu'il a rédigé avec son élève Evguéni Lifchitz est très connu, notamment pour son niveau élevé et ses raccourcis saisissants (« Un calcul élémentaire montre que... », ledit calcul pouvant bien prendre trois pages pourtant fortement condensées...)





Partie II

## Oscillateurs

### 1 Approximation harmonique

En mathématiques, la théorie des développements limités permet d'estimer la valeur d'une fonction<sup>9</sup> aux alentours d'un point donné. Par exemple, en écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction  $f$  autour d'un point  $a$ , il vient

$$f(x) = f(a) + \frac{df}{dx}(a) \times (x - a) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(a) \times (x - a)^2 + o((x - a)^2)$$

Cela revient en fait à approximer localement la courbe représentative de la fonction  $f$  par une parabole. En physique, pour raison de commodité, on fait souvent « sauter » le petit  $o$  en signalant que le développement est alors une approximation à l'aide du signe  $\approx$ . Appliquons donc cette « approximation parabolique » à la fonction énergie potentielle  $E_p(x)$  pour connaître le comportement du système aux alentours d'une position d'équilibre  $x_{\text{éq}}$  (jouant le rôle du  $a$  des mathématiciens). Pour bien faire apparaître l'aspect « epsilonlesque » de l'écart à l'équilibre, on note  $x = x_{\text{éq}} + \varepsilon$  et de ce fait

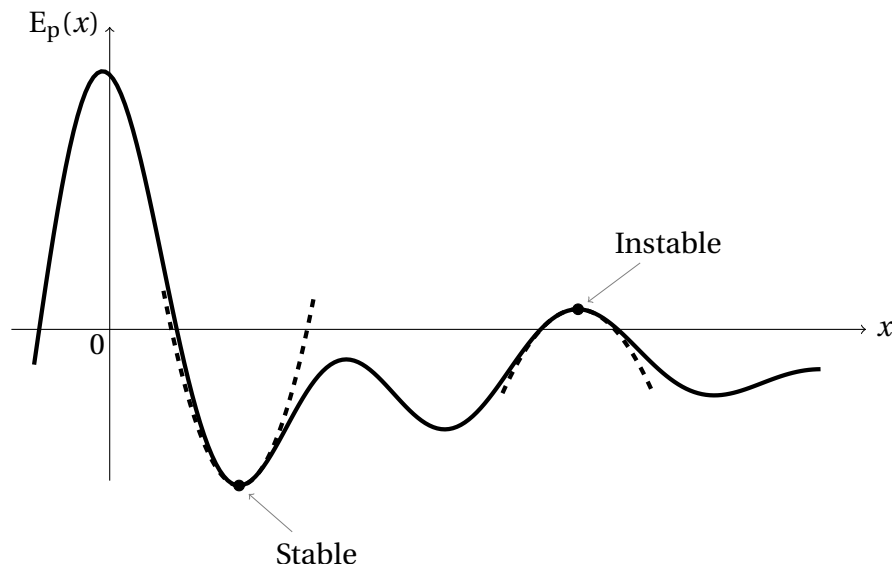
$$E_p(x_{\text{éq}} + \varepsilon) \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) \times \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) \times \varepsilon^2$$

Comme on s'est placé autour d'un équilibre où l'énergie potentielle est extrême, on a  $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$  et

$$E_p(x_{\text{éq}} + \varepsilon) \approx E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) \times \varepsilon^2$$

9. suffisamment dérivable, comme c'est extrêmement souvent le cas en physique.

Graphiquement, cela revient à caler le mieux possible une parabole dans le creux correspondant à l'extremum d'énergie potentielle considéré. Sur l'exemple suivant, on constate d'une part que cette approximation (en tirets) est appropriée tant que l'on ne s'éloigne « pas trop » de la position d'équilibre et on retrouve d'autre part le fait que la dérivée seconde de l'énergie potentielle est positive pour un équilibre stable (concavité de la parabole tournée vers le haut) alors qu'elle est négative pour un équilibre instable (concavité vers le bas).



Il reste à faire le lien avec le terme « approximation *harmonique* » qui renvoie à l'équation d'évolution d'un oscillateur *harmonique*. En effet, si l'on pose  $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$  alors  $\dot{x} = \dot{\varepsilon}$ , de sorte que l'énergie mécanique du système puisse s'écrire

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2 + E_p(x_{\text{éq}} + \varepsilon) \approx \frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2 + a + b\varepsilon^2 \quad \text{avec} \quad a = E_p(x_{\text{éq}}) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}})$$

Le système étant supposé conservatif, l'énergie mécanique se conserve au cours du temps et  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , ce qui se traduit par

$$0 = \frac{1}{2} m \times 2\dot{\varepsilon} \times \ddot{\varepsilon} + 0 + 2b\varepsilon \times \dot{\varepsilon}$$

soit

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{2b}{m} \varepsilon = 0$$

puisque l'on recherche un mouvement, c'est-à-dire que  $\dot{\varepsilon}$  n'est pas identiquement nulle. On retombe bien sur l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution s'écrit

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{max}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2b}{m}}$$

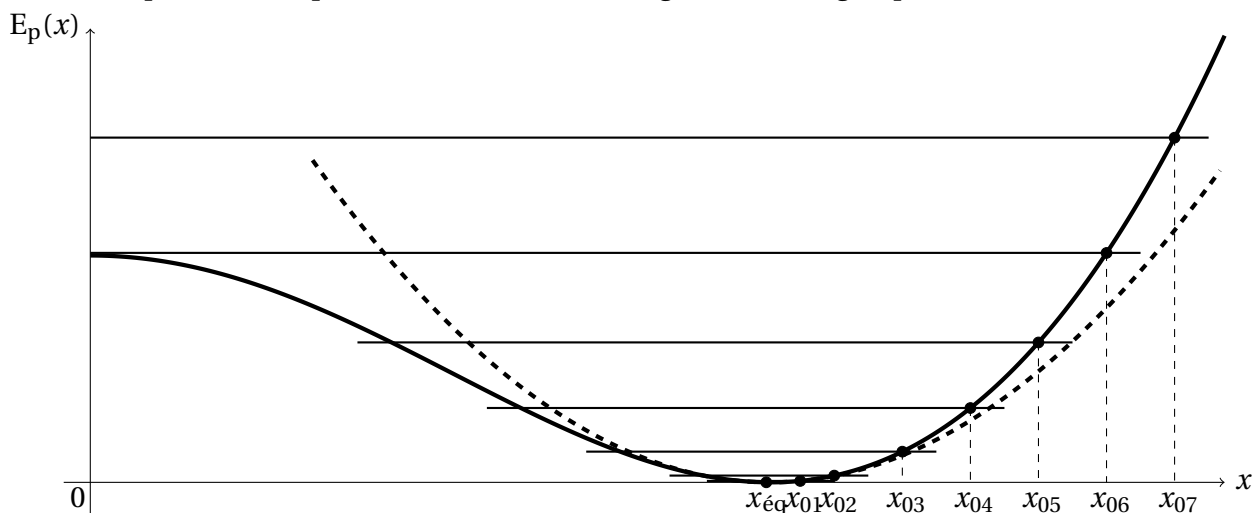
On aurait aussi pu reconnaître, en notant  $k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}})$  que l'énergie potentielle s'écrit à une constante près

$$E_p(\varepsilon) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2$$

c'est-à-dire exactement celle d'un ressort dont on connaît bien le comportement harmonique quand la masse peut se déplacer dans le sens de l'allongement du ressort.

## 2 Oscillateur de Landau

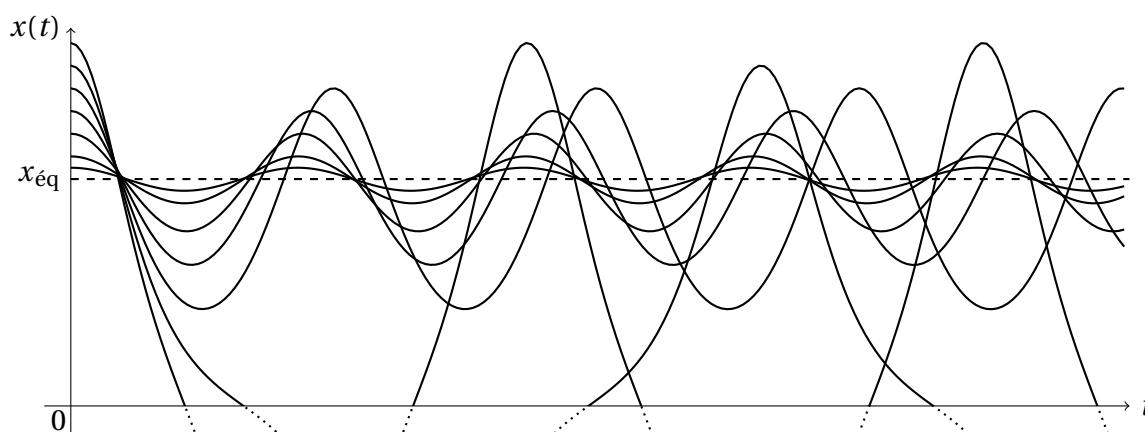
Revenons sur l'oscillateur de Landau et plus particulièrement au cas à deux puits de potentiel. Regardons plus particulièrement ce qui se passe du côté droit du diagramme quand on lâche le mobile sans vitesse initiale depuis une position de plus en plus éloignée à droite de l'équilibre. D'après le paragraphe précédent et le pouvoir des mathématiques, tant qu'on part « assez proche » de la position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$ , les oscillations devraient être harmoniques, c'est-à-dire sinusoïdale (ce qui n'est pas forcément aisé à détecter) et toutes de même période (ce qu'il est bien plus facile de voir!). Le diagramme énergétique ressemble à cela :



L'équation différentielle générale, que l'on peut obtenir en dérivant l'énergie mécanique et en simplifiant par  $\dot{x}$ , est non linéaire.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \frac{\sqrt{d^2 + x^2} - \ell_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} x = 0$$

Néanmoins, une intégration numérique permet d'obtenir l'évolution temporelle des  $x(t)$  pour chacune des conditions initiales spécifiées dans le graphique précédent. Il vient alors, en se restreignant aux  $x$  positifs,



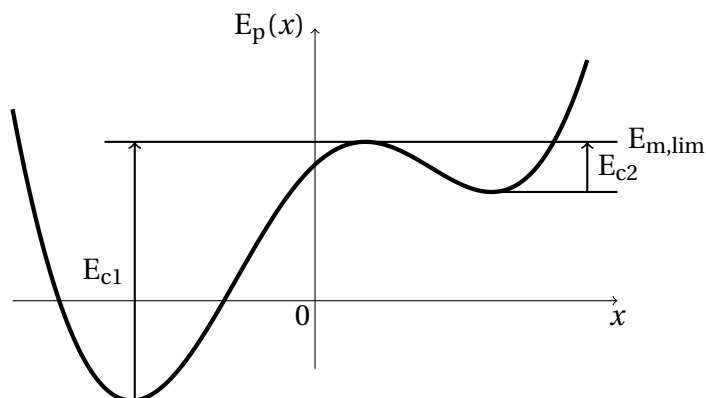
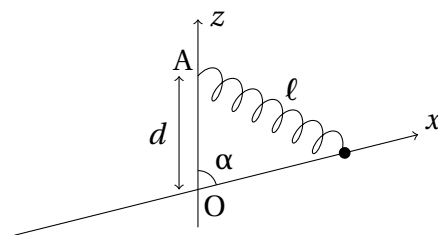
Les deux mouvements d'amplitude les plus faibles sont quasi-isochrones, conformément aux prédictions de l'approximation harmonique. À partir de la troisième trajectoire, l'écart à la modélisation harmonique se fait sentir (ce qui peut s'observer sur la représentation énergétique) et ne fait que s'accroître sur les quatrième et cinquième trajectoires qui deviennent asymétriques. Quant aux sixième et septième trajectoires, la barrière de potentiel est franchie et le mobile explore périodiquement les valeurs négatives de  $x$  (non représentées) avant de revenir vers les  $x$  positifs et à nouveau repartir. Il est intéressant de remarquer que la sixième trajectoire, dont l'énergie est tout juste égale à celle de la barrière centrale, est celle de plus longue période<sup>10</sup>.

10. Celle-ci devrait en fait être infinie, mais les inévitables erreurs de l'intégration numérique nous rattrapent ici.

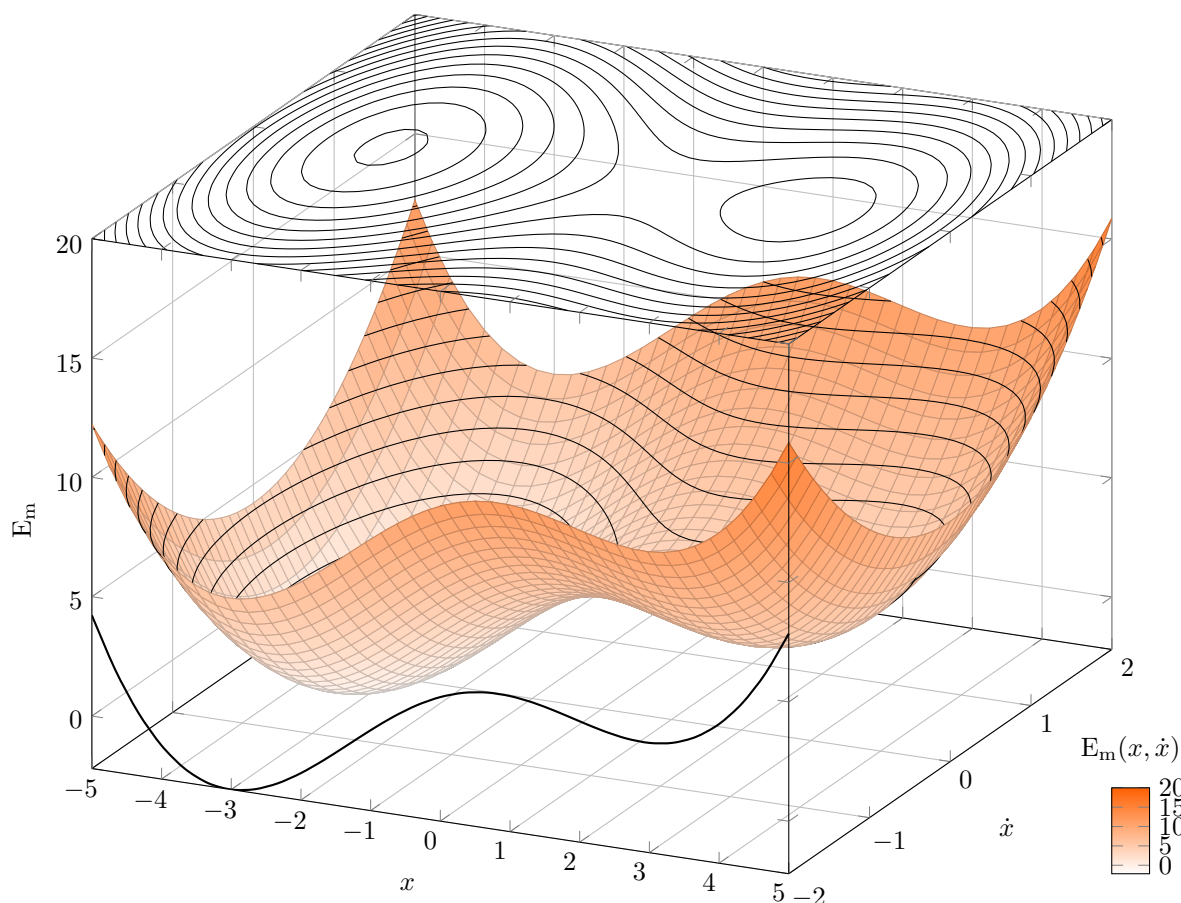
### 3 Oscillateur de Landau « tilté », brisure de symétrie

Que se passerait-il si, au lieu de considérer la barre horizontale, on lui faisait faire un angle  $\alpha$  avec la verticale comme représenté ci-contre? À présent le poids travaille aussi et l'énergie potentielle totale à considérer s'écrit donc, en utilisant la formule d'Al Kashi,

$$E_p = mgz + \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 = mgx \cos \alpha + \frac{1}{2} k \left( \sqrt{d^2 + x^2} - 2xd \cos \alpha - \ell_0 \right)^2$$



La symétrie du profil énergétique est à présent brisée du fait du poids qui tend toujours à déséquilibrer la masse vers la gauche. On se retrouve avec deux<sup>11</sup> puits de potentiels de profondeurs différentes, donc des barrières énergétiques différentes selon que l'on veut aller de droite à gauche (en partant de la position d'équilibre au repos) ou de gauche à droite, ce dernier déplacement étant plus gourmand en énergie. La dissymétrie apparaît aussi dans le portrait de phase (quand les courbes de niveau énergétique sont choisies équidistantes), puisque le puit le plus profond correspond à la position d'équilibre qui compte le plus de trajectoires tournant uniquement autour d'elle (sa « zone d'influence » est plus importante).



11. En fait, si l'angle est assez relevé ou le ressort pas assez raide, on peut même n'avoir qu'un unique puit, celui de gauche.