M3

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Partie I

Puissance et travail

1 Puissance d'une force

Dans un référentiel $\mathscr{R}$, la puissance $\mathscr{P}$ d'une force $\overrightarrow{F}$ s'écrit

$$\boxed{\mathscr{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la particule considérée dans ce référentiel. La puissance s'exprime en Watts (W). Elle correspond à l'énergie que fourni la force au système par unité de temps et est donc homogène à une énergie par unité de temps.

2 Travail d'une force entre deux instants

a) Intervalle de temps élémentaire $\mathrm{d}t$

Le travail [1] élémentaire δW effectué par une force $\overrightarrow{F}$ pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ correspond à l'énergie ramené par la force pendant cet intervalle de temps. Ainsi,

$$\boxed{\delta W = \mathscr{P}\,\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

b) Intervalle de temps non élémentaire $\Delta t = t_2 - t_1$

Sur un intervalle de temps non élémentaire, il suffit de sommer les contributions de tous les « petits » travaux pour trouver le travail total. En supposant que la particule se trouve en A à $t = t_1$ et en B à $t = t_2$, cela s'écrit

$$\boxed{W_{\overset{\frown}{AB}} = \int \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t = \int_{A}^{B} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

1. Le travail se note « W » en référence au mot anglais « Work ».

3 Travail du poids

Le poids est un cas particulier important où la force est uniforme, c'est-à-dire ne dépend pas de l'endroit où l'on se trouve, ce qui va permettre de simplifier l'intégration. Ainsi, en orientant l'axe des z vers le haut, on a $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -mg\overrightarrow{e_z}$ et il vient

$$\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{P}}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{P}} \cdot \left(\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} -mg\,\mathrm{d}z = -mg\int_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}} \mathrm{d}z$$

soit

$$\boxed{\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{P}}) = -mg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})}$$

Généralisation

Si une force est uniforme, c'est-à-dire si elle reste constante en norme et direction tout au long du chemin qui va de A à B, alors on peut sortir le produit scalaire de l'intégrale de sorte que

$$\boxed{\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{F}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

4 Caractère moteur ou résistant d'une force

Une force est dite **motrice** si elle apporte effectivement de l'énergie au système lors du trajet de A vers B, c'est-à-dire si son travail le long de ce chemin est effectivement positif. Au contraire, elle est dite **résistante** si elle ponctionne de l'énergie au système, c'est-à-dire si son travail le long du chemin de A vers B est négatif. Sur l'exemple du poids, celui-ci est moteur ($\mathrm{W} > 0$) à condition que $z_{\mathrm{B}} < z_{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire que le mobile « descende » lors de son mouvement. Au contraire, le poids est résistant dans une phase de montée où $z_{\mathrm{B}} > z_{\mathrm{A}}$.

Partie II

Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

1 Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, le théorème de la puissance cinétique met en relation la variation d'énergie cinétique $\mathrm{E_c} = mv^2/2$ du système au cours du temps et la puissance des forces $\overrightarrow{\mathrm{F}_i}$ s'appliquant sur le système. En particulier,

$$\boxed{\frac{\mathrm{dE_c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{P}(\overrightarrow{\mathrm{F}_i}) = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{F}_i} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Démonstration

Étant dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, on peut appliquer la relation fondamentale de la dynamique

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{F}_i}$$

En prenant le produit scalaire avec la vitesse $\overrightarrow{v}$, on reconnaît dans le membre de droite l'expression de la somme des puissances de toutes les forces. Il reste à montrer que le membre de gauche correspond bien à la dérivée de l'énergie cinétique. Celle-ci peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{dE_c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right) = m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v}$$

et on retrouve bien le résultat annoncé.

2 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique n'est rien d'autre que la version « intégrée » du théorème de la puissance cinétique : la variation d'énergie cinétique entre l'instant initial (au point A) et l'instant final (au point B) est donnée par le travail des forces s'exerçant sur le système durant cet intervalle.

$$\boxed{\Delta_{AB}E_c = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \sum_i W_{\overset{\frown}{AB}}(\overrightarrow{F_i})}$$

Démonstration

Il suffit d'écrire la définition du travail $W_{\overset{\frown}{AB}}(\overrightarrow{F}) = \int_{t_i}^{t_f} \mathscr{P}(\overrightarrow{F})\,dt$ et de réaliser que

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dE_c}{dt}\,dt = \int_A^B dE_c = [E_c]_A^B = E_c(B) - E_c(A) = \Delta_{AB}E_c$$

3 Choix de la loi idoine

La grande difficulté dans les exercices est de savoir quelle loi ou théorème utiliser dans quel contexte. Voici quelques pistes permettant de faire un choix.

a) Quand appliquer le TEC ?

Dès qu'il faut calculer l'expression de la vitesse en un point précis de la trajectoire et que l'on connaît facilement l'expression du travail des forces (par exemple si elles ne travaillent pas ou si elles sont associées à une énergie potentielle [2]), le théorème de l'énergie cinétique est un bon candidat.

Exemple : pendule simple sans frottement

Supposons qu'on veuille déterminer la vitesse v_B du pendule en un point B d'angle θ_B connaissant la vitesse v_A en un point A d'angle θ_A. Seul le poids travaille puisqu'il n'y a pas de frottement et que la tension du fil est orthogonale au mouvement. On a donc, puisque $z = -\ell\cos\theta$ en choisissant l'origine au centre du cercle,

$$\Delta_{AB}E_c = W_{\overset{\frown}{AB}}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_B - z_A) = mg\ell(\cos\theta_B - \cos\theta_A)$$

d'où $$\boxed{{v_B}^2 = {v_A}^2 + 2g\ell(\cos\theta_B - \cos\theta_A)}$$

b) Quand appliquer le TPC ?

Dès que l'on cherche plutôt une équation différentielle ou qu'il y a des forces dont on ne connaisse pas l'expression intégrée du travail, le théorème de la puissance cinétique est souvent mieux adapté.

2. Voir plus loin dans le chapitre

Partie III

Forces conservatives et énergies potentielles

1 Exemple du poids : énergie potentielle de pesanteur

On a montré plus haut que le travail du poids sur un trajet AB pouvait s'écrire, si z est orienté vers le haut,

$$\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{P}}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \int_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}} -mg\,\mathrm{d}z = -\left[mgz\right]_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}}$$

On remarque que le travail du poids ne dépend que de la position (ici plus particulièrement de l'altitude) initiale et finale et absolument pas du chemin suivi pour aller de A à B. Pour appuyer sur ce fait, on introduit une fonction qui ne dépend que de la **position** de l'objet et que l'on nomme énergie potentielle de pesanteur

$$\boxed{\mathrm{E_p} = mgz}$$

de sorte que

$$\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{P}}) = -\Delta_{\mathrm{AB}}\mathrm{E_p}$$

Attention!

L'énergie potentielle va s'interpréter plus loin comme la quantité d'énergie que l'on peut « potentiellement » transformer en énergie cinétique lors d'un mouvement. Par conséquent, plus on est « haut », plus l'énergie potentielle de pesanteur est importante. Ainsi, si vous décidez pour une raison ou pour une autre d'orienter l'axe des z *vers le bas*, alors plus z est grand, plus vous êtes bas, donc *moins* vous avez d'énergie potentielle. Si z est vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur fait apparaître un signe négatif :

$$\mathrm{E_p} = -mgz$$

2 Définition

Une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est dite **conservative** si on peut lui associer une fonction $\mathrm{E_p}$ ne dépendant que de la *position* de l'objet telle que le travail de la force sur n'importe quel trajet AB ne dépende pas du chemin suivi et s'écrive simplement

$$\boxed{\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}}) = -\Delta_{\mathrm{AB}}\mathrm{E_p} = -\big(\mathrm{E_p}(\mathrm{B}) - \mathrm{E_p}(\mathrm{A})\big)}$$

3 Énergie potentielle gravitationnelle

En coordonnées sphériques, la force gravitationnelle exercée par une masse $\mathrm{M_O}$ au centre O du système de coordonnées sur une masse m au point M s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{F_g}} = -\frac{\mathrm{GM_O}m}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Or le déplacement élémentaire s'exprime quant à lui par

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$, de sorte que

$$\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{F_g}}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{F_g}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} -\frac{\mathrm{GM_O}m}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\left[-\frac{\mathrm{GM_O}m}{r}\right]_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}}$$

On peut donc poser $$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{p,grav}}(r) = -\frac{\mathrm{GM_O}\,m}{r}}$$

en choisissant par convention une énergie potentielle nulle à l'infini et de sorte que le travail de la force de gravitation s'écrive comme l'opposé de la variation de cette fonction « énergie potentielle ».

4 Énergie potentielle élastique

La force de tension élastique exercée par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k fixé au point O (donc de longueur $\ell = r$) s'écrit, en coordonnées sphériques,

$$\overrightarrow{\mathrm{T}} = -k\,(r-\ell_0)\,\overrightarrow{e_r}$$

De même que précédemment $$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} \qquad \text{avec } \mathrm{d}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r} = 0$$

de sorte que $$\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{F_g}}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \int_{r_\mathrm{A}}^{r_\mathrm{B}} -k\,(r-\ell_0)\,\mathrm{d}r = \int_{\mathrm{X_A}}^{\mathrm{X_B}} -k\mathrm{X}\,\mathrm{dX} = -\left[\frac{1}{2}\,k\mathrm{X}^2\right]_{\mathrm{X_A}}^{\mathrm{X_B}}$$

où l'on a fait le changement de variable via l'allongement du ressort $\mathrm{X} = r - \ell_0$.

Ainsi, on peut définir $$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{p,él}} = \frac{1}{2}\,k\mathrm{X}^2} \qquad \text{avec X l'allongement du ressort}$$

5 Énergie potentielle électrostatique

a) Champ uniforme

La force électrique exercée par un champ uniforme $\overrightarrow{\mathrm{E_0}}$ sur une particule de charge q s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{F_e}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{E_0}}$$

Son travail s'exprime alors par

$$\mathrm{W}_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{F_e}}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} q\,\overrightarrow{\mathrm{E_0}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{E_0}}\cdot\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = q\,\overrightarrow{\mathrm{E_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\left[-q\,\overrightarrow{\mathrm{E_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$$

de sorte que $$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{p,e,unif}} = -q\,\overrightarrow{\mathrm{E_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

en choisissant l'énergie potentielle nulle à l'origine.

> Pour une force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ uniforme (comme le poids par exemple), le travail sur un trajet AB s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et l'énergie potentielle s'exprime donc par $-\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en choisissant l'origine en O.

b) Champ créé par une particule ponctuelle

La force électrique exercée par une charge ponctuelle Q placée en O sur la charge q en M s'écrit en coordonnée sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{F_e}} = \frac{\mathrm{Q}q}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

On retombe sur le cas gravitationnel : il suffit de dérouler la démonstration en replaçant $-\mathrm{GM_O}m$ par $\mathrm{Q}q/4\pi\varepsilon_0$ et on obtient

$$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{p,élec}}(r) = \frac{\mathrm{Q}q}{4\pi\varepsilon_0\,r}}$$

Partie IV

Mouvement conservatif

1 Conservation de l'énergie mécanique

Si toute les forces s'exerçant sur le système sont associées à une énergie potentielle, alors on peut réécrire partiellement le théorème de l'énergie cinétique sous la forme

$$\Delta_{\mathrm{AB}}\mathrm{E_c} = \sum_i \mathrm{W}_{\widehat{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}_i}) = \sum_i (-\Delta_{\mathrm{AB}}\mathrm{E}_{\mathrm{p},i}) = -\Delta_{\mathrm{AB}}\Big(\sum_i \mathrm{E_{p,i}}\Big)$$

En basculant le terme en énergie potentielles du côté gauche, il vient

$$\Delta_{\mathrm{AB}}\mathrm{E_c} + \Delta_{\mathrm{AB}}\Big(\sum_i \mathrm{E}_{\mathrm{p},i}\Big) = 0$$

soit

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{AB}}\mathrm{E_m} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \sum_i \mathrm{E}_{\mathrm{p},i}}$$

où $\mathrm{E_m}$ est appelée **énergie mécanique** du système considéré.

2 Applications

a) Évolution de la vitesse

Reprenons l'exemple du pendule simple sans frottement déjà développé plus haut à l'aide du théorème de l'énergie cinétique. L'énergie mécanique du système s'écrit, avec z vers le haut et l'origine prise au point de fixation du pendule,

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_{p,p}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta$$

Connaissant la vitesse initiale v_0 et la position initiale θ_0 et écrivant la conservation de l'énergie mécanique, c'est-à-dire le fait que $\mathrm{E_m}(t) = \mathrm{E_m}(t=0)$, il vient

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mg\ell\cos\theta_0$$

soit

$$\boxed{v^2 = {v_0}^2 + 2g\ell\,(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

b) Obtention de l'équation différentielle

Sur le même exemple, on utilise la constance de l'énergie mécanique au cours du mouvement

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}m(\ell\dot\theta)^2 - mg\ell\cos\theta = \mathrm{C^{te}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{dE_m}}{\mathrm{d}t} = 0$$

soit

$$\frac{1}{2}m\ell^2 \times 2\dot\theta \times \ddot\theta - mg\ell \times (-\sin\theta) \times \dot\theta = 0$$

Il ne reste plus qu'à simplifier par $\dot\theta$ non uniformément nul puisque l'on recherche un mouvement pour obtenir

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

3 Généralisation au cas non conservatif

L'énergie mécanique ayant été introduite en basculant les travaux des forces conservatives du côté énergétique en tant que variation d'énergie potentielle, s'il reste des forces non conservatives, il suffit de les garder du côté droit de l'équation.

a) Théorème de la puissance mécanique

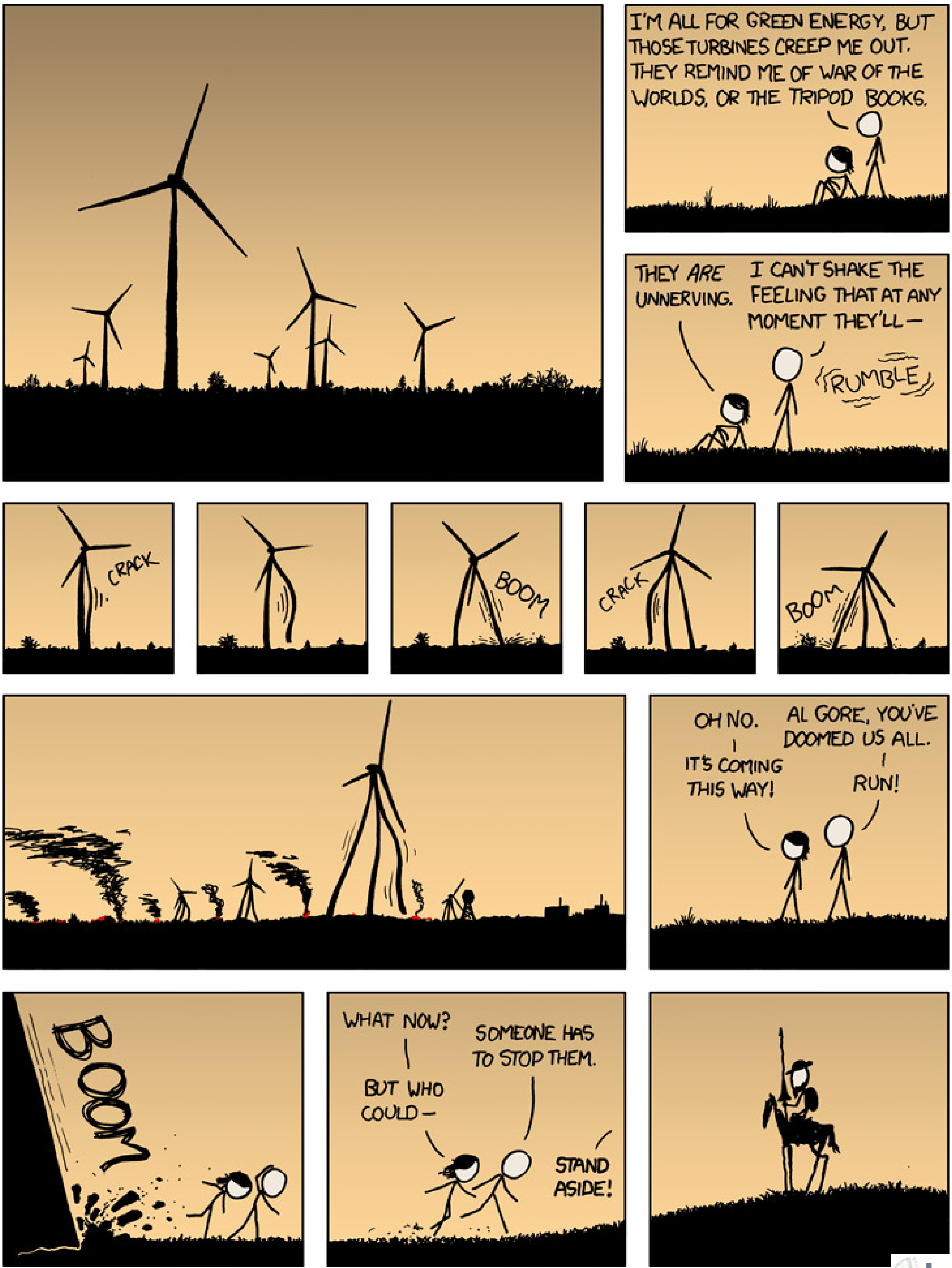
On obtient donc $$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}_{\text{forces non conservatives}}}$$

b) Théorème de l'énergie mécanique

et dans la version intégrée $$\boxed{\Delta_{AB}E_m = \sum W_{\overset{\frown}{AB}}(\overrightarrow{F}_{\text{non conservatives}})}$$

xkcd.com

```
Not to be confused with
"making money selling this stuff to OTHER people who think it works",
which corporate accountants and actuaries have zero problems with.
```



xkcd.com

```
The moment their arms spun freely in our air, they were doomed --
for Man has earned his right to hold this planet against all comers,
by virtue of occasionally producing someone totally batshit insane.
```