

Relation Fondamentale de la Dynamique (loi de la quantité de mouvement)

La dynamique est une discipline de la mécanique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces auxquelles ils sont soumis. Contrairement à la cinématique qui se contentait de décrire les mouvements, la dynamique s'intéresse de surcroît aux causes de ces mouvements, à savoir les forces.

Partie I

Forces et quantité de mouvement

1 Interactions fondamentales

Il existe dans la nature quatre interactions fondamentales dont toutes les « forces » que l'on observe à notre échelle sont issues. Ces quatre interactions sont :

La gravitation. C'est la plus « faible » des quatre interactions et pourtant c'est elle qui détermine le devenir de l'Univers à grande échelle. Elle gouverne le mouvement des planètes autour du Soleil, la forme (sphérique) des dites planètes, les mouvements du Soleil dans la Voie Lactée, de la Voie Lactée dans le Groupe Local, du Groupe Local dans l'amas de la Vierge, etc. En norme, et quand on se place à faible distance (quelques picomètres à quelques mètres), c'est de loin la plus faible des interactions. Et pourtant, comme elle n'est pas écrantée à grande distance (il n'existe pas de masse négative), c'est elle qui finit par l'emporter.

L'électromagnétisme. C'est l'interaction qui régit le mouvement des particules chargées et celle qui nous concerne le plus au quotidien puisque toutes les forces dites « de contact » qui nous entourent sont en fait le résultat d'interactions électromagnétiques, notamment les effets de répulsion des nuages électroniques des molécules qui nous constituent. La lumière elle-même est une manifestation électromagnétique. L'électromagnétisme ne cède le pas à la gravitation que du fait du phénomène d'écrantage : les actions cumulées des charges positives et négatives se compensent à grande distance du fait du caractère globalement électroneutre de notre Univers.

L'interaction forte. Elle est responsable de la cohésion des protons et des neutrons sous forme d'assemblage de trois quarks. Elle permet aussi la cohésion des noyaux atomiques (qui devraient exploser sous l'action des répulsions électrostatiques entre protons) en permettant aux neutrons de se transformer en protons et réciproquement, de sorte que la force électrostatique répulsive globale exercée sur cette mer changeante de particules soit bien nulle en moyenne. La portée de l'interaction est très réduite (de l'ordre du femtomètre, 10^{-15} m), ce qui fait qu'en pratique, nous ne nous y intéresserons pas dans ce cours.

L'interaction faible. Elle est responsable de la désintégration radioactive de particules subatomiques et est à l'origine de la fusion nucléaire dans les étoiles. Comme son homologue forte, le fait qu'elle soit confinée aux particules subatomiques l'exclut de notre sujet d'étude.

2 Principe des actions réciproques (3^e loi de Newton)

Le principe des actions réciproques stipule que si deux corps A et B sont en interaction, la force que le corps A exerce sur le corps B est exactement opposée à celle que B exerce sur A. En notation vectorielle standard, on peut l'écrire

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Il faut bien noter que les deux forces ne s'exercent pas sur le même objet, ce qui fait qu'elles ne peuvent « se compenser » que si les deux objets font partie du même système¹. En revanche, cela permet de « transmettre » une information, comme le fait le pèse-personne pour mesurer le poids de l'individu qui a pris place dessus.

3 Inventaire des forces s'exerçant sur un système

Pour un système donné, un certain nombre de forces peuvent s'exercer. Celles-ci sont définies par un **vecteur force** qui donne direction, sens et norme de la force ainsi que par un **point d'application**. Ce dernier n'est pas important en mécanique du point² mais le devient en mécanique du solide, en particulier lors des calculs de **moments**³. Le plus important est de savoir faire un schéma clair sur lequel figurent les forces, leur direction et sens ainsi que leur point d'application si le système n'est pas ponctuel.

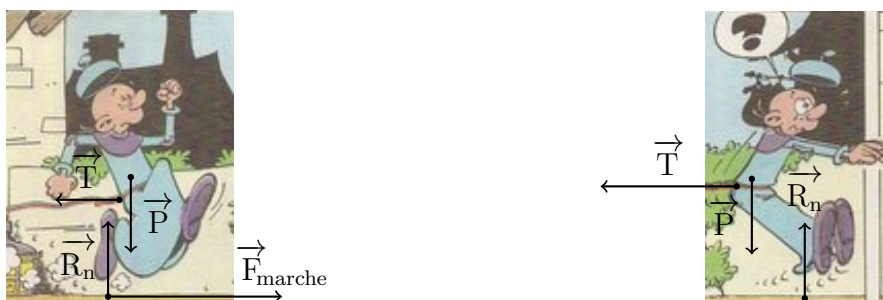


FIGURE 2.1 – Exemples faisant apparaître l'inventaire des forces s'exerçant sur le système *Discipulus Simplex*.

4 Forces usuelles

a) Poids

Il s'agit (presque⁴) de l'interaction gravitationnelle que la Terre exerce sur tout objet à sa surface. Il s'écrit *toujours*

$$\vec{P} = +m\vec{g}$$

En revanche selon que l'on oriente l'axe Oz vers le haut ou vers le bas, la projection aura un signe différent car le vecteur accélération de la pesanteur \vec{g} est toujours tourné vers le bas⁵. On note généralement g (sans flèche) la norme de \vec{g} qui vaut, en moyenne⁶, $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Avec cette convention, si l'on note \vec{e}_z le vecteur

1. Une chance quand on étudie des systèmes non ponctuels qui contiennent quelques 10^{23} particules...
2. Si une force s'exerce sur un **point** matériel, le **point** d'application de la force est nécessairement confondu avec le point matériel lui-même.
3. Voir chapitre « M5: Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe »
4. Vous verrez en seconde année qu'en plus de l'interaction gravitationnelle que la Terre exerce sur nous, on compte dans le poids le terme en force d'inertie d'entraînement dû à la rotation de la Terre sur elle-même.
5. C'est d'ailleurs lui qui définit ce qu'on appelle la verticale du lieu.
6. La valeur dépend de la latitude, de $9,832 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ aux pôles jusqu'à $9,780 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ à l'équateur en passant par $9,809 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ à Paris.

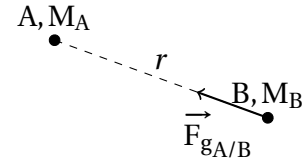
dirigé selon la verticale *ascendante* et \vec{e}_z' le vecteur dirigé selon la verticale *descendante*, on aura

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_z = -mg \quad \text{mais} \quad \vec{P} \cdot \vec{e}_z' = +mg$$

En d'autres termes, le choix de votre verticale va avoir une influence directe sur le signe de la projection du poids sur ladite verticale.

b) Attraction gravitationnelle

On considère la force gravitationnelle qu'un corps ponctuel A de masse M_A exerce sur un corps ponctuel B de masse M_B selon le schéma ci-contre. L'expression de la force gravitationnelle que A exerce sur B s'écrit alors



$$\vec{F}_{gA/B} = -\frac{\mathcal{G}M_A M_B}{r^2} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

où $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I. est la constante de gravitation universelle et $r = \|\vec{AB}\|$ la distance entre les deux points. Le vecteur directeur $\vec{AB}/\|\vec{AB}\|$ pointe du centre attracteur vers le point soumis à la force de sorte que le signe négatif en facteur représente le fait que la force considérée est **attractive**. Dans les notations usuelles des énoncés, lorsqu'une masse M est placée en O et que l'on regarde la force qu'elle exerce sur un point P de masse m tel que $\vec{OP} = r \vec{e}_r$ (soit en coordonnées sphériques ou polaires), on a

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \vec{e}_r$$

Attention!

Suite à l'expression précédente, on voit que la force gravitationnelle est une force « en $1/r^2$ », mais il peut arriver que l'on écrive cette force sous la forme

$$\vec{F}_{gA/B} = -\frac{\mathcal{G}M_A M_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

qui n'est qu'en apparence en $1/\|\vec{AB}\|^3$ puisque le vecteur choisi pour porter la force n'est pas de norme unitaire. En regardant la norme, on retrouve bien une force en $1/r^2$:

$$\|\vec{F}_{gA/B}\| = \frac{\mathcal{G}M_A M_B}{\|\vec{AB}\|^3} \times \|\vec{AB}\| = \frac{\mathcal{G}M_A M_B}{\|\vec{AB}\|^2} = \frac{\mathcal{G}M_A M_B}{r^2}$$

c) Lien entre poids et force gravitationnelle

Nous avons dit plus haut que le poids n'est autre que l'expression de l'attraction terrestre sur un corps à sa surface. L'application du théorème de Gauss gravitationnel⁷ permet de considérer l'ensemble de la Terre comme si elle était une masse ponctuelle rassemblée en son centre. Un corps de masse m à la surface de la Terre est donc situé à une distance $R_T \approx 6400$ km du centre attracteur (fictif) qui rassemble toute la masse M_T de la Terre. La force qui s'exerce sur ce corps est donc

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2} \vec{e}_r = m \vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$

7. Cf cours de deuxième année sur la question

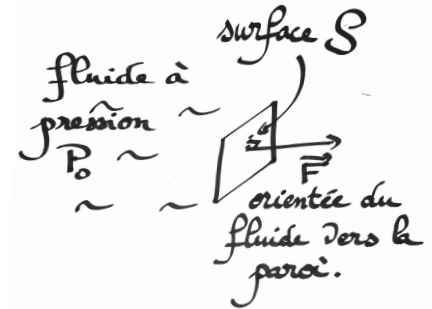
En procédant à l'application numérique, on obtient bien

$$g = \|\vec{g}\| = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{(6,4 \cdot 10^6)^2} \approx \frac{10^{-11} \times 10^{24}}{10^{12}} = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

d) Forces de pression

Les forces de pression seront traitées plus en détail dans le chapitre « $\mathcal{T}0$ Statique des fluides ». Néanmoins pour l'usage que l'on pourra en faire dans le cours de mécanique, dans le cas particulier où la pression P_0 est uniforme sur toute la surface \mathcal{S} sur laquelle elle s'exerce, on a

$$\|\vec{F}\| = P_0 \times \mathcal{S}$$



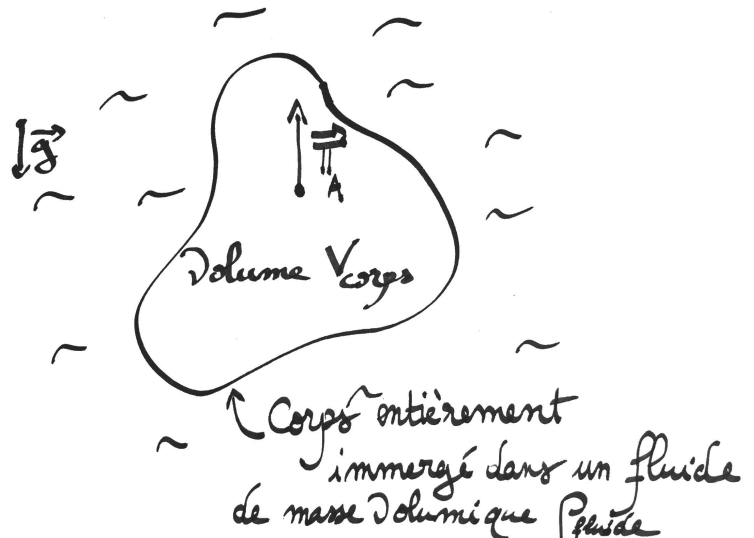
avec une orientation qui va toujours du fluide qui l'exerce vers la paroi sur laquelle la force est exercée.

NB : on déduit de l'expression précédente qu'une pression est homogène à une force par unité de surface.

e) Poussée d'Archimède

Là encore, l'expression de la poussée d'Archimède sera plus détaillée (et même démontrée) dans le chapitre « $\mathcal{T}0$ Statique des fluides ». Ce qu'il faut retenir, ce sont les conditions d'applications du théorème correspondant. Pour un corps de volume V_{corps} entièrement plongé dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide} , la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur toutes les parois du corps s'écrit comme l'opposé du poids du fluide qui occuperait le volume du corps :

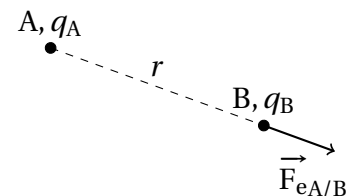
$$\vec{\Pi}_A = -\vec{P}_{\text{fluide déplacé}} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}} \vec{g}$$



Il est à noter que le point d'application de la poussée d'Archimède est au centre de gravité du fluide déplacé et non de l'objet initial, ce qui peut mener à des instabilités (cas d'un bateau dont les cales sont vides et le pont trop chargé et qui risque de se retourner à la moindre vague). Notons aussi que ce qui fait monter une montgolfière, ce n'est *pas* la pression de l'air chaud⁸ qui est la même que celle de l'air frais extérieur mais bien la poussée d'Archimède du fait de la différence de densité entre l'air chaud et l'air froid.

f) Force électrostatique

On considère la force électrostatique qu'une charge ponctuelle q_A placée en A exerce sur une charge ponctuelle q_B placée en B selon le schéma ci-contre. L'expression générale est très proche⁹ de celle de la force gravitationnelle si ce n'est qu'elle est répulsive pour les charges de même signe.



$$\vec{F}_{eA/B} = \frac{q_A q_B}{4\pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

8. qui la pousserait vers le haut avec ses petits bras musclés?

9. C'est d'ailleurs l'analogie de ces deux formes qui permettra de généraliser le théorème de Gauss (démontré dans le cadre électrostatique) au cas gravitationnel.

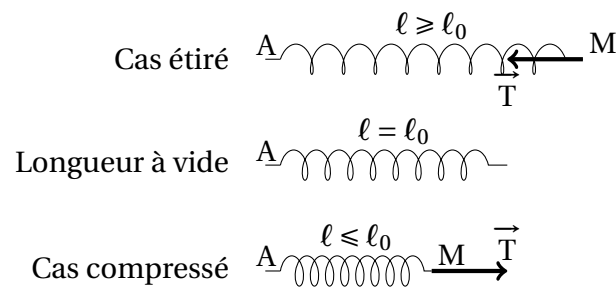
g) Tension élastique du ressort

Un ressort possède deux extrémités :

- un point de « fixation ¹⁰ » que l'on notera A ;
- et un point M sur lequel est attaché l'objet sur lequel s'exerce la force du ressort (appelée tension et donc notée \vec{T} en règle générale).

Il possède aussi deux comportements que l'on peut voir sur les schémas ci-dessous :

- s'il est étiré, il va avoir tendance à tirer le point M vers le point A de fixation ;
- alors que s'il est comprimé, il va avoir tendance à repousser le point M à l'opposé du point A de fixation.



Une seule formule doit pouvoir rendre compte des deux comportements, en y rajoutant en outre le caractère linéaire de la force : plus on s'éloigne (d'un côté comme de l'autre) de la longueur à vide du ressort, plus la force doit être importante, proportionnellement à cet écart. En notant $\vec{u} = \overrightarrow{AM}/\|\overrightarrow{AM}\|$ le vecteur unitaire qui pointe du point de fixation vers le point d'application de la force, on peut vérifier que l'expression

$$\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}}$$

convient. Elle fait en outre intervenir deux caractéristiques du ressort :

- la longueur à vide ℓ_0 du ressort (qui est une longueur donc s'exprime en mètres dans les unités du système international)
- et sa constante de raideur k (qui est une force par unité de longueur donc s'exprime en N.m^{-1} dans les unités du système international).

La longueur ℓ correspond quant à elle à la longueur instantanée $\ell = \|\overrightarrow{AM}\|$ qui dépend généralement du temps dans les problèmes étudiés. On a bien le comportement voulu puisque

- si le ressort est étiré, on a $\ell \geq \ell_0$, d'où $\vec{T} \cdot \vec{u} = -k(\ell - \ell_0) < 0$: la force tend à recomprimer le ressort ;
- si le ressort est comprimé, on a $\ell \leq \ell_0$, d'où $\vec{T} \cdot \vec{u} = -k(\ell - \ell_0) > 0$: la force tend à étirer le ressort.

h) Tension d'un fil

Pour un fil inextensible et parfaitement flexible, la tension \vec{T} du fil est dirigée selon l'axe du fil. Si on se place en coordonnées polaire avec le point de fixation du fil au point O, on peut écrire

$$\boxed{\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{e}_r}$$

Bien sûr, ce résultat n'est valable que tant que le fil est tendu (ce qui revient à dire ici que $\|\vec{T}\| \geq 0$). Voir l'exemple du pendule pour une utilisation *in situ*.

10. Fixe en général, mais on pourra s'amuser à le secouer à l'occasion

Attention!

Même si pour le ressort et pour le fil, on note à chaque fois la force exercée \vec{T} (la faute au vocabulaire puisqu'on parle dans les deux cas d'un *Tension*), elles n'ont *rien* à voir l'une avec l'autre! La tension du fil varie vraisemblablement en norme dans le temps, mais comme le fil est inextensible (= sa longueur ne varie pas), sa norme ne saurait être égale à son « allongement » (puisque celui-ci est nul par définition du caractère inextensible!).

i) Forces de frottement fluides

Les forces de frottement fluides sont des forces qui s'opposent au déplacement (donc colinéaires au vecteur vitesse mais de sens contraire) avec une norme qui elle-même dépend du vecteur vitesse. Ainsi,

$$\vec{f} = -k(v) \vec{v}$$

où le coefficient k dépend de la vitesse et pas forcément de manière simple. Néanmoins, on peut souvent distinguer certains domaines où un comportement prédomine :

Pour les déplacements lents¹¹ ($\sim 0,1$ à 1 m.s^{-1}) : par exemple la chute d'une goutte de brouillard dans l'air ou le déplacement d'une bille dans l'eau, on a $k \approx C^{\text{te}} = \alpha$, c'est-à-dire que la force de frottement est directement proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

Pour les déplacement un peu plus rapide¹² (~ 10 à 100 m.s^{-1}) : la force de frottement est alors quadratique, de norme proportionnelle au carré de la vitesse, c'est-à-dire

$$\vec{f} = -\beta v \vec{v} \quad \text{soit} \quad \|\vec{f}\| = \beta v^2 \quad \text{avec} \quad \beta = C^{\text{te}}$$

Attention!

La projection de ces forces sur les vecteurs de base est particulièrement simple : il ne faut pas se prendre la tête avec des histoires de signes! En effet, on a **toujours** que

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_z = \dot{z}$$

que le mouvement se fasse vers le haut ($\dot{z} > 0$) ou vers le bas ($\dot{z} < 0$) : le signe de \dot{z} change, mais pas l'expression du produit scalaire. Par conséquent, la projection (par exemple sur \vec{e}_z orienté vers le haut, mais on peut faire de même sur \vec{e}_x et \vec{e}_y) de la force de frottement fluides s'écrit

$$\vec{f} \cdot \vec{e}_z = \begin{cases} -\alpha \dot{z} & \text{en régime « lent »} \\ -\beta v \dot{z} & \text{en régime « rapide »} \end{cases}$$

On retrouve bien que la force de frottement est dirigée vers le bas ($\vec{f} \cdot \vec{e}_z < 0$) lorsque le mobile se déplace vers le haut ($\dot{z} > 0$) et réciproquement elle est dirigée vers le haut ($\vec{f} \cdot \vec{e}_z > 0$) lorsque le mobile se déplace vers le bas ($\dot{z} < 0$).

11. Il s'agit en fait d'écoulement à faible nombre de Reynolds ($R_e < 1$), cf. cours d'hydrodynamique de 2^e année.

12. Il s'agit en fait d'écoulement à fort nombre de Reynolds ($R_e \gtrsim 1000$), cf. cours d'hydrodynamique de 2^e année.

j) Forces de frottement solides

Les lois de Coulomb du frottement de glissement sont des lois phénoménologiques qui se contentent de décrire des faits expérimentaux sans chercher la raison fondamentale de leur existence. Elles s'énoncent comme suit. Lors du contact d'un objet avec un support, la réaction \vec{R} du support peut se décomposer en deux composantes :

- La composante normale¹³ \vec{N} se contente d'empêcher l'objet de traverser le support.
- La composante tangentielle $\vec{\tau}$ s'oppose au mouvement (cas dynamique) ou au sens que le reste des forces voudraient imposer au mouvement (cas statique). De plus, la norme de cette composante ne peut dépasser une certaine fraction de la norme de la composante normale. En notant μ le coefficient de frottement, on a alors

$$\begin{cases} \|\vec{\tau}\| \leq \mu \|\vec{N}\| & \text{dans le cas statique} \\ \|\vec{\tau}\| = \mu \|\vec{N}\| & \text{dans le cas dynamique} \end{cases}$$

En d'autres termes, tant que la réaction du support se trouve à l'intérieur du « cône de glissement »¹⁴, le système reste immobile, mais quand la réaction touche la paroi dudit cône, le système se met en mouvement.

5 Méthodes de mesure

Plusieurs méthodes permettent de déterminer quelques descriptions phénoménologiques des forces usuelles présentées plus haut :

Mesure par comparaison. L'idée est de déterminer l'effort nécessaire qu'il faut opposer à la force à mesurer pour atteindre l'équilibre. Dans le cas particulier du poids, on peut utiliser une balance qui compare le poids à mesurer au poids d'une masse connue. Pour les autres cas, on utilise généralement un dynamomètre qui est en général constitué d'un ressort dont on connaît la raideur k et dont une extrémité est attachée à un point fixe. On applique la force à mesurer sur l'autre extrémité du ressort et l'on mesure la variation de longueur $\Delta\ell$ du ressort à l'équilibre.

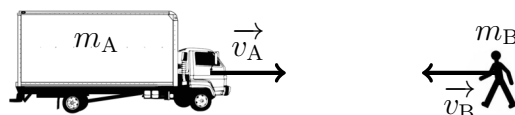
Mesure par action sur un mobile. Il s'agit là d'observer le comportement d'un objet soumis à la force étudiée et d'en déduire des informations sur la force par mesure d'une période (pendule par exemple), d'un déplacement asymptotique (force de frottement) ou encore de l'accélération d'un mobile mesurée sur un film vidéo (détermination de g).

6 Masse d'inertie et quantité de mouvement

Des expériences de chocs montrent qu'on peut attribuer à chaque corps un coefficient positif appelé **masse d'inertie** qui traduit la résistance d'un corps à modifier sa vitesse.

On définit donc la **quantité de mouvement** \vec{p} par

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{v}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m & \text{masse du corps} \\ \vec{v} & \text{vitesse du corps} \end{cases}$$



« C'est le gros qui gagne »

13. C'est-à-dire perpendiculaire au support.

14. Voir l'excellente animation : <http://tinyurl.com/cone-de-glissement>

7 Cas d'un système de points

Pour un système $\{m_i\}$ de N points de vitesses respectives \vec{v}_i , la quantité de mouvement s'exprime en fonction de la masse totale et du mouvement du barycentre G des masses présentes :

$$\vec{p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_i m_i \vec{v}_i = m_{\text{tot}} \vec{v}_G$$

Démonstration

Démontrons ce résultat dans le cas particulier de deux masses m_1 et m_2 (donc $m_{\text{tot}} = m_1 + m_2$) animées des vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 (le cas général se fait de la même manière). Par définition,

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{OM}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2)$$

Or par définition du barycentre G , $m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2 = m_{\text{tot}} \vec{OG}$

d'où

$$\vec{p} = m_{\text{tot}} \frac{d\vec{OG}}{dt} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G$$

Partie II

Référentiels et RFD dans un référentiel galiléen

1 Référentiel, rappel de définition

Référentiel \mathcal{R} : Association de points rigidement liés les uns aux autres formant un **solide de référence** par rapport auquel on repère un mouvement. Les points le constituant peuvent être qualifiés d'immobiles à tout instant. Le référentiel inclut à la fois une échelle de distance (règle) et une échelle de temps (horloge).

Repère : Tout système d'axes rigidement lié en au moins un point au référentiel \mathcal{R} .

Remarque : Pour un même référentiel, une infinité de choix de repères différents est possible.

2 Principe d'inertie (première loi de Newton)

Le principe d'inertie, qui affirme l'existence de « bons » référentiels pour faire de la mécanique, s'exprime comme suit

Il existe une famille de référentiels, appelés galiléens ou inertiels, tels que, par rapport à l'un de ces référentiels, tout point matériel isolé (qui n'est soumis à aucune action extérieure) est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme ($\vec{v} = \vec{C}^{\text{te}}$).

Il est très proche de la première loi de Newton que l'on peut exprimer dans la situation plus générale de système pseudo-isolé (somme des forces nulles) :

Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un système fermé est constant si et seulement si la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est un vecteur nul.

La détermination d'un bon référentiel galiléen est en réalité expérimentale et comme souvent en physique, seule la cohérence entre la théorie (ici la première loi de Newton) et la mesure (mouvement rectiligne uniforme) valide le choix a posteriori.

? Le saviez-vous?

C'est à Galilée qu'on doit la première expression de relativité :

« Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme [c'est-à-dire constante] et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt ... »

– Galilée, Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde, 1632

3 Mouvement relatif de deux référentiels galiléens

Si \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont deux référentiels galiléens, alors \mathcal{R}_2 est en mouvement de **translation rectiligne uniforme** par rapport à \mathcal{R}_1 .

! Attention!

Notez bien que les précisions « translation » et « rectiligne » ne sont pas redondantes!

Rectiligne signifie que le centre du référentiel \mathcal{R}_2 se déplace en ligne droite dans le référentiel \mathcal{R}_1 (**rectiligne uniforme** signifie donc que le vecteur vitesse du centre du référentiel \mathcal{R}_2 reste constant à la fois en norme [caractère **uniforme**] et en direction [caractère **rectiligne**]).

Translation signifie que le solide de référence lié à \mathcal{R}_2 n'a aucun mouvement de **rotation** sur lui-même par rapport à \mathcal{R}_1 (en particulier, l'accélération dite de Coriolis est nulle). Néanmoins, on peut avoir des mouvements de translation circulaire comme pour une nacelle de grande roue.

4 Référentiels galiléens usuels

a) Référentiel de Copernic

Centre : Centre de masse du système solaire.

Axes : « Étoiles » lointaines (donc fixes).

Il constitue, pour notre étude de la mécanique intra-système solaire, le référentiel galiléen par excellence, bien que sa galiléanité puisse être mise en défaut dès lors qu'on s'intéresse aux phénomènes galactiques.

? Le saviez-vous?

La notion de « lointain » est relative. En effet, toutes les vraies étoiles que vous pouvez directement pointer avec votre télescope se trouvent en fait dans notre Voie Lactée ou dans son proche voisinage (galaxies naines en orbite autour de la Voie Lactée), elle se déplacent donc par rapport au système solaire sur des échelles de temps de quelques centaines de millions d'années, relativement courtes à l'échelle de l'Univers. Pour obtenir de « vrais » point fixe, il faut regarder bien plus loin et se fixer sur des quasars qui sont des noyaux actifs de galaxies jeunes distants de plusieurs milliards d'années lumières de notre galaxie.

b) Référentiel héliocentrique (ou de Képler)

Centre : Centre de masse du Soleil.

Axes : « Étoiles » lointaines (donc fixes), souvent les mêmes que Copernic.

Le référentiel héliocentrique se déplace notablement dans le référentiel de Copernic sur des périodes de l'ordre de 12 ans (période de rotation de Jupiter autour du Soleil). Son mouvement par rapport à Copernic est bien un mouvement de translation¹⁵, mais celle-ci n'est pas rectiligne. Néanmoins, les expériences montrent qu'il peut être considéré comme galiléen avec une très bonne précision.

! Attention!

Il est *faux* d'affirmer que le centre de masse du système solaire est « profondément ancré » dans le Soleil en se basant sur le fait que presque 99,9% de la masse du système solaire est contenu dans le Soleil. Comme il a été montré dans le chapitre $\mathcal{M}0$ dans la section sur les barycentres, la présence éloignée de Jupiter (presque les 0,1% restant) déplace déjà le barycentre au-delà d'un rayon solaire. Finalement, la ceinture de Kuiper (objets transneptuniens encore plus éloignés que Jupiter) va certainement recentrer légèrement ce barycentre, mais la raison **n'est pas** l'écrasante masse du Soleil comparé au reste du système.

c) Référentiel géocentrique

Centre : Centre de masse de la Terre.

Axes : « Étoiles » lointaines (donc fixes), souvent les mêmes que Copernic.

Son mouvement peut être considéré comme une translation¹⁶ rectiligne uniforme sur des temps très inférieurs à 1 an. Il est donc galiléen sur de telles périodes. À noter qu'il n'est pas lié au « solide Terre » qui tourne sur lui-même dans ce référentiel.

d) Référentiel terrestre

Le référentiel terrestre est le référentiel le plus utilisé :

Centre : Un point de la Terre.

Axes : Liés au sol, par exemple O_x vers l'Est, O_y vers le Nord et O_z vers le haut.

Pour fixer les idées, on peut visualiser un repère associé au référentiel terrestre à partir d'un terrain de football. Il s'agirait du repère centré au point de corner, donc les axes sont la ligne de touche, la ligne de but et le poteau de corner.

15. Du fait du choix des axes

16. Par choix des axes.

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen dans les expériences usuelles. Il faut une chute libre commençant à une hauteur considérable¹⁷ pour mettre en évidence la déviation vers l'Est, due à la rotation terrestre.

On peut utiliser le référentiel terrestre dans une première approximation lorsque la durée de l'expérience est négligeable devant la période de rotation de la Terre, ou lorsqu'il est évident que l'effet de cette rotation est négligeable devant d'autres approximations.

5 Relation Fondamentale de la Dynamique pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la relation fondamentale de la dynamique fait le lien entre l'accélération d'une masse ponctuelle m dans \mathcal{R} et les forces qui s'appliquent sur lui. Elle s'écrit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \sum \vec{F}$$

En particulier, dans un repère cartésien, les projections de la RFD selon \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z donnent

$$m \ddot{x} = \sum \vec{F} \cdot \vec{e}_x \quad m \ddot{y} = \sum \vec{F} \cdot \vec{e}_y \quad \text{et} \quad m \ddot{z} = \sum \vec{F} \cdot \vec{e}_z$$

6 Loi de la quantité de mouvement pour un système de points

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , l'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique pour un système de points se nomme « loi de la quantité de mouvement »¹⁸. Il fait intervenir l'accélération du centre de masse \vec{a}_G et uniquement les forces externes qui s'exercent sur le système (les forces internes s'annulant deux à deux) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_{\text{tot}} \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Partie III

Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

1 Mouvement sans frottement

On considère un point matériel m soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m \vec{g}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen sur le temps d'étude. La RFD s'écrit

$$m \vec{a} = \vec{P} = m \vec{g} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = \vec{g}$$

Le mouvement est donc un mouvement à vecteur-accélération constant (déjà étudié dans le chapitre précédent) dont la solution s'écrit, en notant \vec{v}_0 la vitesse initiale et \vec{OM}_0 la position initiale,

$$\vec{v}(t) = \vec{g} t + \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \vec{OM}(t) = \vec{g} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0$$

2 Influence de la résistance de l'air

a) Forces de frottements fluides

Dans le cas d'une chute verticale dans le champ de pesanteur, la RFD s'écrit

17. Pour une chute de 300 m et en l'absence de frottements, la déviation n'est que de l'ordre de 5,7 cm.

18. Ou « théorème de la quantité de mouvement » car il se démontre à partir des RFD sur chacun des points du système.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - k(v) \vec{v}$$

La force de frottement s'opposant au mouvement et la vitesse augmentant en norme lors de la chute, les frottements finissent par compenser le poids et la vitesse ne change plus. Elle vérifie alors

$$k(v_{\text{lim}}) \vec{v}_{\text{lim}} = m \vec{g}$$

De multiples expériences avec des masses différentes permettent de décider quelle est la dépendance $k(v)$ adéquate puisque, en norme,

$$v_{\text{lim}} = \begin{cases} \frac{m}{\alpha} g & \text{en régime « lent »} \\ \sqrt{\frac{mg}{\beta}} & \text{en régime « rapide »} \end{cases}$$

b) Prise en compte de la traînée

Prenons le cas de la chute d'un parachutiste depuis son avion jusqu'à l'ouverture de son parachute pour diverses formes de la dépendance en $k(v)$ (voir figure 2.4 un peu plus loin). L'équation différentielle s'écrit ici, en orientant z vers le haut,

$$m\ddot{z} = -mg - k(|\dot{z}|) \dot{z}$$

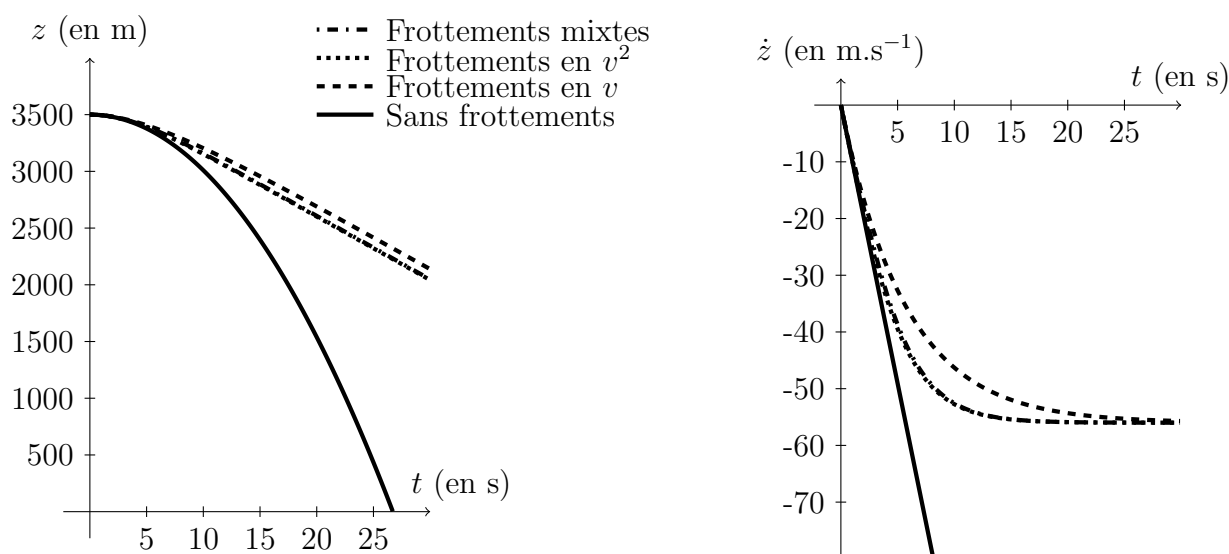


FIGURE 2.2 – Graphique de $z(t)$ et $\dot{z}(t)$ pour diverses suppositions de frottements fluides dans le cas d'une chute verticale dun parachutiste de masse 100 kg avant qu'il n'ouvre son parachute.

Le logiciel d'intégration numérique donne les résultats décrits sur la figure 2.2. On y reconnaît plusieurs points intéressants :

- La chute est plus rapide pour les frottement en v^2 car on a choisi comme point de comparaison une même vitesse limite dans tous les cas, de sorte que les frottements en v sont plus importants dans la première phase car le départ se fait à vitesse nulle.
- Le cas « mixte » est quasiment indiscernable du cas en v^2 car la différence de comportement n'est appréciable que sur un temps trop court : au début la vitesse nulle implique que les deux termes sont nuls et par la suite, on atteint trop rapidement la vitesse où le régime change.
- La chute dure bien plus longtemps en présence de frottements que pour une chute vraiment libre où l'on toucherait le sol en à peine 27 s.

c) Portrait de phase

Des deux courbes précédentes $z(t)$ et $\dot{z}(t)$, on peut construire le portrait de phase correspondant, d'abord en faisant varier le type de frottements (figure 2.3 gauche), puis, cas plus classique, en faisant varier les conditions initiales (figure 2.3 droite) autant en position (via la donnée de $z(0)$) qu'en vitesse (via la donnée de $\dot{z}(0)$). On remarque que dans tous les cas, la présence de frottement implique la présence d'un « attracteur » sous la forme d'une asymptote horizontale pour toutes les trajectoires de phase.

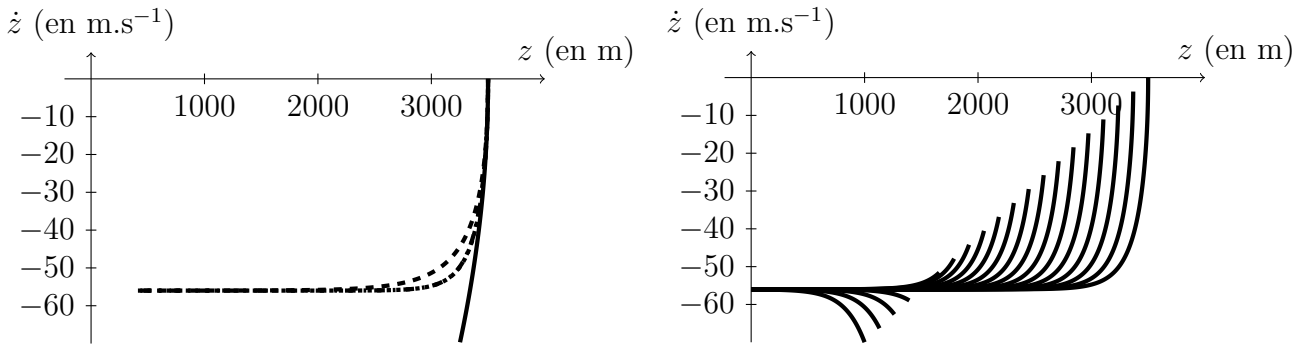


FIGURE 2.3 – Portraits de phase pour la chute verticale dans le cas (à gauche) de diverses dépendances en v de la force de frottement (ou en son absence) avec la même légende que précédemment; et (à droite) de diverses conditions initiales dans le cadre de la force de frottement « mixte ».

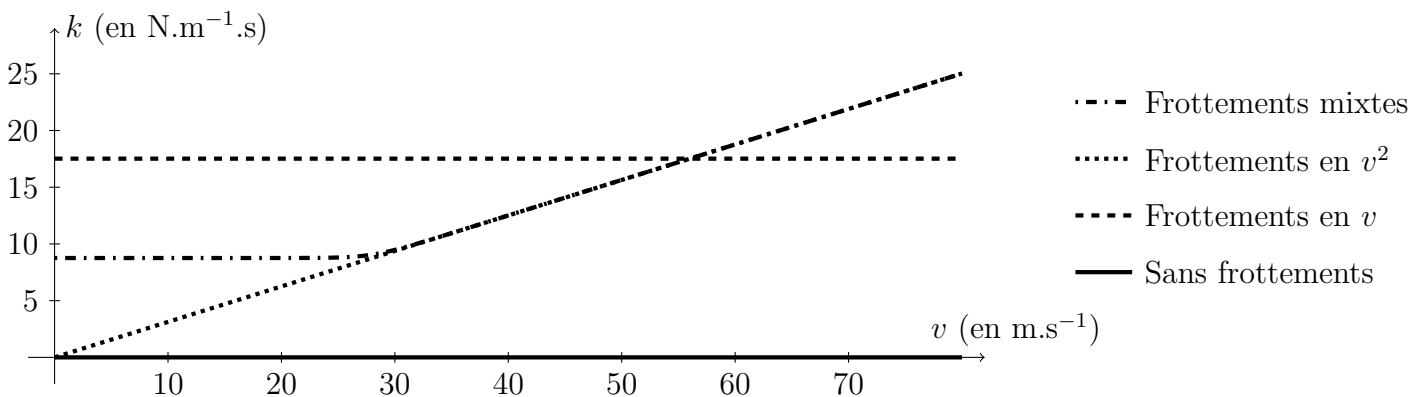


FIGURE 2.4 – Diverses dépendances en vitesse possibles pour la force de trainée calculée de sorte à obtenir toujours la même vitesse limite pour le cas considéré.

d) Analyse de l'équation différentielle

Tâchons de comparer l'effet des frottements fluides selon que l'on prenne en compte la dépendance en v , celle en v^2 ou un cas mixte pour une configuration un peu moins évidente : l'éjection d'un boulet de canon, ce qui rajoute une deuxième dimension au problème. On va intégrer numériquement les équations du mouvement qui s'écrivent, avec z orienté vers le haut,

$$m \vec{a} = -k(v) \vec{v} + m \vec{g} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{k(v)}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = -\frac{k(v)}{m} \dot{z} - g \end{cases}$$

Commençons par une analyse qualitative. L'expérience nous montre d'une part que l'on doit atteindre une vitesse limite. Les mathématiques nous disent d'autre part que si la vitesse est trop faible, la gravité l'emporte et l'augmente alors que si la vitesse est trop grande, la force de frottement « gagne » et tend à raccourcir le

vecteur vitesse. Dans les deux cas, on tend vers une valeur limite où les frottements compensent tout juste la gravité et où le vecteur-vitesse ne varie plus. Dans ce régime, on a

$$k(v_{\text{lim}}) \vec{v}_{\text{lim}} = m \vec{g} \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}_{\text{lim}}\| = \begin{cases} \frac{mg}{\alpha} & \text{en régime « lent »} \\ \sqrt{\frac{mg}{\beta}} & \text{en régime « rapide »} \end{cases}$$

Pour comparer des choses comparables, on va regarder les différentes expressions de $k(v)$ de sorte que dans tous les cas, la vitesse limite soit la même. On a choisi comme vitesse limite à peu près celle atteinte par les parachutistes avant ouverture de leur parachute, c'est-à-dire que, pour une masse $m = 100 \text{ kg}$, on obtienne $v_{\text{lim}} = 56 \text{ m.s}^{-1} \approx 200 \text{ km.h}^{-1}$. Les différentes dépendances en vitesse pour $k(v)$ sont données à la figure 2.4

Les résultats obtenus après intégration numérique¹⁹ sont résumés sur la figure 2.5 pour deux vitesses initiales différentes : 70 m.s^{-1} et 100 m.s^{-1} . Plusieurs constatations intéressantes peuvent être faites :

- Pour une vitesse initiale de 70 m.s^{-1} , on remarque que la méthode de freinage la plus efficace est celle en $-\alpha \vec{v}$, suivie de la méthode « mixte ». En effet, le mobile, du fait du travail de la gravité, passe très rapidement en dessous de la vitesse limite (56 m.s^{-1}) où la force la plus élevée en norme se trouve bien être la traînée en v .
- Pour une vitesse de départ plus importante en revanche, la force en $-\beta v^2$ est plus importante que celle en $-\alpha v$ sur un intervalle de temps plus long et infléchit donc plus rapidement la trajectoire. Néanmoins, à l'apogée de la trajectoire, la vitesse devient suffisamment faible pour que l'action de la force en $-\alpha v$ se fasse à nouveau sentir de manière prédominante, menant à une distance totale parcourue en x plus faible.

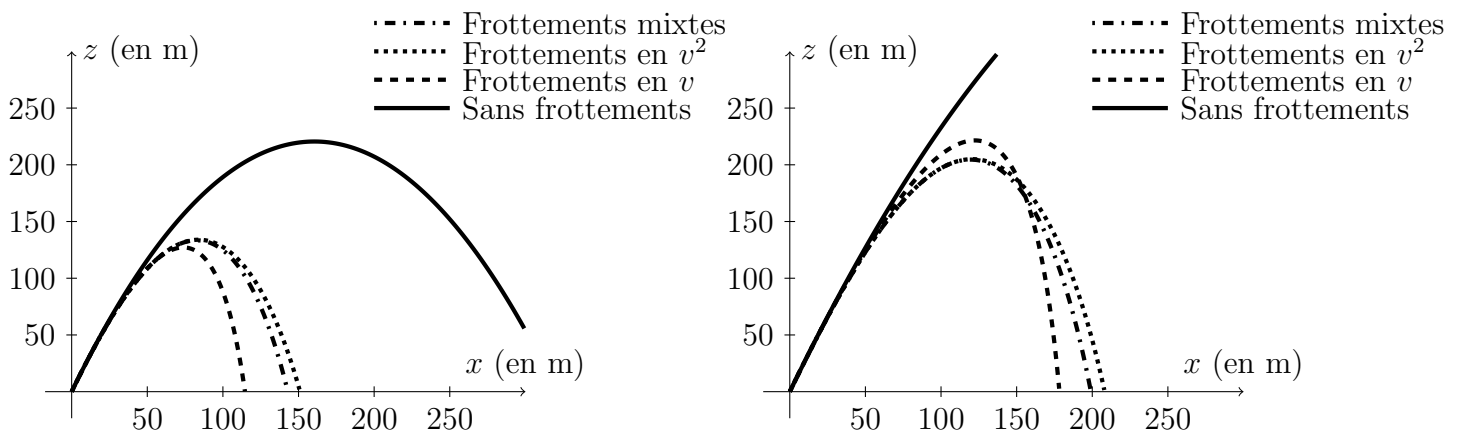


FIGURE 2.5 – Intégration numérique par méthode d'Euler pour diverses suppositions pour la force de traînée (cf. figure 2.4). Les deux figures considèrent une chute « libre » dans le champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ pour une masse m lancée avec un angle initial 70° et des vitesses initiales respectives 70 m.s^{-1} (à gauche) et 100 m.s^{-1} (à droite).

19. Par méthode d'Euler dans sa version du « point-milieu », c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} v_{i+1} = v_i + a_i \, dt \\ x_{i+1} = x_i + \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \, dt \end{cases}$$

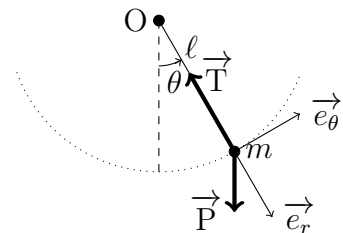
Partie IV

Pendule simple

1 Système étudié

Le pendule simple est constitué d'une masse m accroché à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable, lui-même fixé en un point O généralement (mais pas obligatoirement) choisi comme centre du repère. Le mouvement du pendule ayant lieu sur un arc de cercle (tant que le fil est tendu), on se place en repère polaire de centre O décrit sur la figure ci-contre. L'accélération correspondante se simplifie donc, puisque $\dot{r} = 0$ et $r = \ell$, en

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + \ell\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$



2 Équation d'évolution

Système : masse m ; **Référentiel :** terrestre (galiléen);

Inventaire : poids \vec{P} et tension du fil \vec{T} .

Pour s'affranchir de la tension du fil dont on ne connaît rien, si ce n'est qu'elle est dirigée selon l'axe du fil, on projette la RFD suivant \vec{e}_θ , de sorte que

$$m \vec{a} \cdot \vec{e}_\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta + \overbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_\theta}^{=0} \iff m\ell\ddot{\theta} = mg \cos(\theta + \pi/2) = -mg \sin\theta$$

Et en simplifiant

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

3 Approximation linéaire

Si l'on suppose que les oscillations sont de faible amplitude, c'est-à-dire que $\theta \ll 1$ en radians, alors on a $\sin\theta \approx \theta$ à tout instant, de sorte que l'équation d'évolution devient

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

qui est bien une équation du même type que celle de l'oscillateur harmonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$. Les solutions de cette équation peuvent donc s'écrire, avec A et B (ou θ_{\max} et φ) deux constantes à déterminer en fonction des conditions initiales

$$\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

4 Portrait de phase

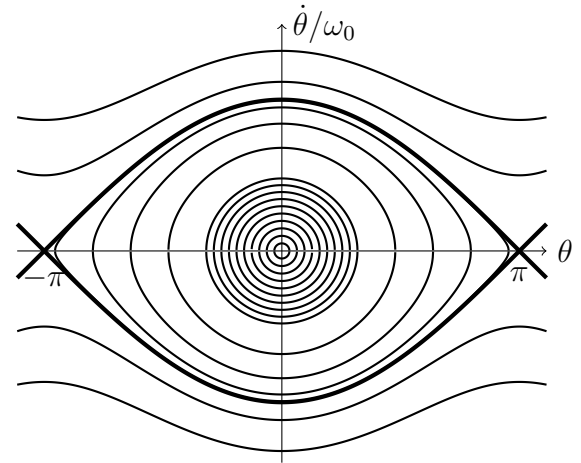
Le portrait de phase revient à tracer $\dot{\theta}(t)$ en fonction de $\theta(t)$. Partons de l'équation d'évolution et multiplions par $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta \dot{\theta}$$

On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée temporelle de $\dot{\theta}^2/2$ et dans le membre de droite celle de $-g\theta^2/2\ell$. Deux fonctions de dérivées égales étant égales à une constante près, on en déduit

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = C^{\text{te}} - \frac{g}{\ell} \frac{\theta^2}{2}$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme $(\theta/a)^2 + (\dot{\theta}/b)^2 = 1$, ce qui constitue l'équation intrinsèque d'une ellipse centrée sur $(0,0)$ en coordonnées $(\theta, \dot{\theta})$: les trajectoires de phases proches de $\theta = 0$ sont donc des ellipses. On peut remarquer que $a = b\omega_0$, de sorte que si l'on représente $\dot{\theta}/\omega_0$ en fonction de θ plutôt que directement $\dot{\theta}$ en fonction de θ , les ellipses deviennent des cercles et il est ainsi bien plus facile de détecter lorsque la trajectoire s'écarte d'une solution de type harmonique.



On aurait très bien pu appliquer le même procédé à l'équation exacte :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \dot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} = C^{te} + \frac{g}{\ell} \cos \theta \quad \text{soit} \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{C^{te'} + \frac{2g}{\ell} \cos \theta}$$

où la valeur de la constante détermine la position de la trajectoire choisie dans le portrait de phase et le signe devant la racine le fait que l'on regarde la partie positive ou la partie négative en vitesse de ladite trajectoire.

Partie V

Utilisation des lois de Coulomb du frottement de glissement

1 Limite de glissement sur un plan incliné

Prenons un solide m posé sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale et initialement sans mouvement. Les seules forces sont le poids \vec{P} et la réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{\tau}$. Supposons qu'il y ait équilibre du système. Alors les projections sur la normale et la tangente au support des forces doivent se compenser, c'est-à-dire que l'on a à la fois

$$\|\vec{N}\| = mg \cos \alpha \quad \text{et} \quad \|\vec{\tau}\| = mg \sin \alpha$$

Comme de plus la loi de Coulomb pour le frottement statique indique que $\|\vec{\tau}\| \leq \mu \|\vec{N}\|$, on en déduit

$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{\tan \alpha \leq \mu}$$

Ainsi, il y a équilibre tant que $\alpha \leq \alpha_{\text{lim}} = \text{Arctan}(\mu)$. Mais si α est plus grand que cette valeur limite, la réaction tangentielle ne peut compenser l'action projetée du poids et il y a début de mouvement avec, puisque cette fois-ci on se trouve dans le cas dynamique où $\|\vec{\tau}\| = \mu \|\vec{N}\| = \mu mg \cos \alpha$, une accélération

$$\boxed{\ddot{X} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

2 Freinage en pente

Considérons un enfant en train de faire de la luge sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. La qualité de la neige change soudain avec pour effet de modifier le coefficient de frottement qui vaut à présent μ' . Que se passe-t-il donc? Comme auparavant, seuls \vec{P} et \vec{R} s'appliquent et nous nous trouvons dans la situation dynamique, c'est-à-dire $\|\vec{\tau}\| = \mu' \|\vec{N}\| = \mu' mg \cos \alpha$. Comme précédemment, l'accélération suivant l'axe de la pente s'écrit

$$\ddot{X} = g(\sin \alpha - \mu' \cos \alpha)$$

et peut devenir négative avec la nouvelle valeur de μ' : la luge « freine » jusqu'à s'arrêter. Une fois stoppée, elle ne repart pas puisqu'on est repassé au cas statique : la force $\vec{\tau}$ s'adapte pour tout juste compenser l'action du poids, n'ayant plus besoin que de vérifier la relation $\|\vec{\tau}\| \leq \mu' \|\vec{N}\|$.