

Cinématique, science descriptive de l'étude des mouvements

La cinématique est l'étude mathématique descriptive des mouvements sans s'intéresser à ses causes. Toutes les unités physiques qui y interviennent s'expriment donc uniquement à l'aide de longueurs et de durées. En particulier, la position, la vitesse et l'accélération sont des notions cinématiques à l'opposé de la notion de force qui entre dans le cadre de la dynamique.

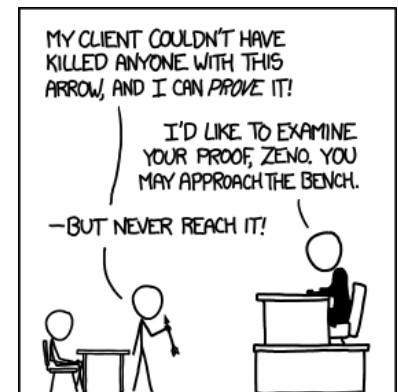
Partie I

Notion d'espace-temps

1 Un peu d'histoire

Les notions d'espace et de temps sont difficiles à définir car tout le monde « baigne » littéralement dedans. Voici pour commencer quelques réflexions de grands penseurs sur le temps :

Zénon d'Élée : s'est beaucoup amusé avec ses paradoxes visant à démontrer l'impossibilité du mouvement. Le plus marquant est celui d'Achille, célèbre héros de la mythologie grecque, et la Tortue qui s'énonce comme suit. Si Achille situé en O poursuit une tortue qui se trouve en A. Le temps qu'il arrive en A, la tortue sera en B. Achille devra donc ensuite aller en B. Mais alors la tortue sera en C, et ainsi de suite. Achille pourra se rapprocher sans cesse de la tortue, mais il ne pourra jamais la rattraper. Les paradoxes de la flèche¹ et du mouvement par dichotomie² sont aussi assez notoires.



(Contre) Démonstration

Supposons qu'Achille court à une vitesse de 10 m.s^{-1} vers la Tortue située 10 m devant qui avance à une vitesse de 1 m.s^{-1} . Dans ces conditions, il faut $t_0 = 1 \text{ s}$ à Achille pour atteindre le point de départ de la Tortue... sauf que celle-ci a pu avancer d'un mètre dans le même temps. Qu'à cela ne tienne, il faut $t_1 = 0,1 \text{ s}$ à Achille pour combler ce mètre de retard... mais la Tortue a avancé entretemps de 10 cm . Encore $t_2 = 0,01 \text{ s}$ pour qu'Achille parcoure ces 10 cm ... mais la Tortue a encore fait 1 cm dans l'intervalle. Il faudra donc un nombre infini d'intervalles de temps pour qu'Achille attrape la Tortue, d'où la conclusion de Zénon qu'il ne pourra jamais l'attraper.

1. Une flèche qui vole est en fait immobile. En effet, à chaque instant, elle est dans un espace égal à elle-même. Elle est donc à chaque instant au repos. Si on décompose le mouvement en une suite d'instant, elle ne peut donc pas se mouvoir, puisqu'elle est constamment au repos.

2. Un mobile pour aller de A en C doit d'abord arriver en B, qui se trouve entre A et C. Mais avant d'arriver en B, il doit d'abord arriver en B' situé entre A et B, et ainsi de suite... In fine, le mobile ne pourra donc pas arriver en C au bout d'un temps fini.

(Contre) Démonstration

Mais Zénon a tort. Mathématiquement, il faut effectivement sommer tous les temps précédents pour obtenir l'instant t_f où Achille rattrape la Tortue :

$$t_f = t_0 + t_1 + t_2 + \dots = 1 + 0,1 + 0,01 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

mais le caractère infini de la somme ne doit pas nous arrêter. Stoppons à l'étape N pour voir :

$$t_0 + \dots + t_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1 - (1/10)^N}{1 - (1/10)} = \frac{10}{9} (1 - 10^{-N})$$

car on a reconnu la somme des N premiers termes d'une suite géométrique de raison (1/10). Il ne reste plus qu'à prendre la limite pour N qui tend vers l'infini de ce dernier calcul pour obtenir

$$t_f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{10}{9} (1 - 10^{-N}) = \frac{10}{9} \text{ s}$$

À noter qu'un enfant de primaire aurait été capable de mettre en défaut Zénon d'Élée en calculant le temps que met Achille à rattraper la Tortue. Si celle-ci se déplace à vitesse constante $v_T = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vers la droite avec une avance de $d_0 = 10 \text{ m}$ sur Achille qui se déplace à vitesse constante $v_A = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, alors les distances parcourues respectivement par Achille et la Tortue s'expriment en fonction du temps t par

$$d_A(t) = v_A t \quad \text{et} \quad d_T(t) = v_T t$$

Le temps t_f où Achille est exactement au-dessus de la Tortue est donc caractérisé par

$$d_A(t_f) = d_T(t_f) + d_0 \quad \text{soit} \quad t_f = \frac{d_0}{v_A - v_T} = \frac{10}{9} \text{ s}$$

Aristote : Le temps correspond à un nombre de mouvements (planétaire, horloge, etc.)

Marc-Aurèle : Le temps est comme un fleuve qui emporte toute choses ; c'est comme un torrent irrésistible. À peine a-t-on pu y apercevoir une chose qu'elle disparaît entraînée dans le tourbillon ; le flot en apporte une nouvelle, qui à son tour sera bientôt emportée.

Bergson : Le temps est ce qui passe quand rien ne se passe.

Einstein : Le temps est ce que l'on mesure avec une horloge ; l'espace est ce que l'on mesure avec une règle.

2 Propriétés de l'espace-temps classique

Dans les théories classiques du mouvement, on considèrera le temps comme à la fois **absolu** (identique pour tous les observateurs) et **uniforme** (il s'écoule toujours à la même vitesse). Quand à l'espace, on le prendra **homogène** (mêmes propriétés en tous points) et **isotrope** (pas de direction privilégiée).

Partie II

Référentiel d'observation

1 Définitions

Référentiel \mathcal{R} : Association de points rigidement liés les uns aux autres formant un **solide de référence** par rapport auquel on repère un mouvement. Les points le constituant peuvent être qualifiés d'immobiles à tout instant. Le référentiel inclut à la fois une échelle de distance (règle) et une échelle de temps (horloge).

Repère : Tout système d'axes rigidement lié en au moins un point au référentiel \mathcal{R} .

Remarque : Pour un même référentiel, une infinité de choix de repères différents est possible.

2 Caractère relatif du mouvement

Le mouvement est *relatif* au référentiel par rapport auquel on l'observe. Quand vous êtes dans votre voiture sur l'autoroute, la voiture semble fixe par rapport à vous, de même que celle qui roule à la même vitesse devant vous, alors que les arbres semblent se déplacer à votre rencontre sur le bord de la route. Au contraire, en cas de panne³, vous vous rendez bien compte que les arbres sont fixes alors que les autres voitures filent à toute allure vers leurs destinations lointaines.

3 Quelques vecteurs utiles

a) Position

La position du point M correspondant au mobile se repère par rapport à l'origine O du repère fixé au référentiel \mathcal{R} d'étude. On appelle donc le vecteur \overrightarrow{OM} **vecteur-position** du point M. Celui-ci pourra s'exprimer dans divers systèmes de coordonnées et l'on choisira celui qui sera le plus adapté au problème considéré.

b) Vitesse

La notion de vitesse est relativement intuitive : si l'on a parcouru 90 km en une heure, on a avancé à une vitesse moyenne de 90 km/h. On peut même rajouter une information spatiale qui donne la direction moyenne de propagation de $M_1 = M(t_1)$ à $M_2 = M(t_2)$ via la définition du vecteur-vitesse moyen :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

Seulement voilà : autant sur une ligne droite, il est naturel de parler de vitesse moyenne, autant si la trajectoire est courbe, la trajectoire effectivement suivie peut grandement différer de la direction moyenne de propagation⁴. C'est pourquoi on définit la vitesse instantanée de propagation comme la limite du rapport précédent quand t_2 tend vers t_1 (ou $t_2 - t_1 \rightarrow 0$). L'intervalle de temps devient infinitésimal et est noté dt (pour « petite différence de temps » ou, de manière plus politiquement correcte, « intervalle de temps élémentaire »), tout comme le petit déplacement qui se note $d\overrightarrow{OM}$ (« petite différence de position » ou « déplacement élémentaire »). Le **vecteur-vitesse** instantané s'identifie à la dérivée du vecteur-position

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Comme le point M_2 se rapproche de plus en plus du point M_1 sur la trajectoire, le vecteur-vitesse moyen tend à s'aligner avec la tangente à la trajectoire, de sorte que

Le vecteur-vitesse instantané \vec{v} est en tout point tangent à la trajectoire.

Remarque : Si l'on sait exprimer le vecteur petit déplacement $d\overrightarrow{OM}$ dans un certain système de coordonnées, on peut retrouver l'expression du vecteur vitesse dans ce système de coordonnées via la « simplification par dt » et la relation

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt$$

3. N'oubliez pas de mettre votre gilet catadioptrique ainsi que le triangle pour prévenir de votre position.

4. Un peu comme si on veut faire le trajet Strasbourg-Paris et que l'on ne précise pas si l'on compte passer par les environs de Metz ou ceux de Dijon.

c) Accélération

L'accélération est à la vitesse, ce que la vitesse est à la position : elle traduit le taux de variation temporelle de la vitesse. On définit donc le vecteur-accélération moyenne entre les temps t_1 et t_2 par

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

De même que pour la vitesse, on s'intéresse plus souvent à l'accélération instantanée, c'est-à-dire l'accélération moyenne lorsque t_2 tend vers t_1 , qui devient donc la dérivée du vecteur-vitesse ou encore la dérivée seconde du vecteur-position :

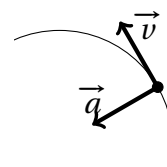
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

⚠ Attention!

L'expérience courante a tendance à ne s'occuper que de l'accélération sur une portion rectiligne. Par exemple, une voiture^a capable de passer de 0 à 100 km/h en 4,8 s aura une accélération moyenne^b

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 5,8 \text{ m.s}^{-2} = 0,59 g$$

Néanmoins, il y a d'autres moyens de changer une vitesse que de modifier sa norme : on peut aussi changer sa *direction*. Ainsi, si l'on se trouve sur une trajectoire circulaire parcourue à vitesse constante – ce qui sous-entend que la *norme* du vecteur-vitesse reste constante – le vecteur-accélération *n'est pas* nul mais reste à tout instant perpendiculaire au vecteur-vitesse. Pour que le vecteur-accélération soit nul, il faut *à la fois* que la norme de la vitesse soit constante *et* qu'elle ne change pas de direction au cours du temps : c'est-à-dire que le mouvement soit **rectiligne** en plus d'être uniforme.



a. La Ferrari Testarossa par exemple.

b. Ne pas oublier de traduire les km/h en m.s⁻¹ : 100 km/h = $\frac{100}{3,6}$ m.s⁻¹ = 27,8 m.s⁻¹

EXERCICE M1.1 Vitesse et accélération

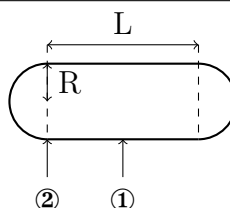
Déterminer la vitesse et l'accélération dans le cas où le vecteur position s'écrit

$$\vec{OM}(t) = \vec{OM}_0 + \vec{g} \tau (t - \tau(1 - e^{-t/\tau}))$$

où les quantité \vec{OM}_0 , \vec{g} et τ sont des constantes (vectorielles ou scalaires).

EXERCICE M1.2 Course de moto

Supposons que l'on ait un circuit de la forme ci-contre. Si le mouvement est à accélération constante a_0 dans les lignes droites et à vitesse constante dans les virages, vaut-il mieux partir du point ① ou du point ② pour faire un tour le plus rapidement possible (en sens trigonométrique, œuf corse...)?



- ① départ moto 1
- ② départ moto 2

Partie III

Systèmes de coordonnées

1 Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, la position est repérée par le triplet (x, y, z) de sorte que le vecteur position s'écrive

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

où les trois vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont fixes dans le référentiel \mathcal{R} d'étude. Ces vecteurs étant fixes, ils jouent le rôle de constantes lors de la dérivation, de sorte que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \\ &= \frac{d(x \vec{e}_x)}{dt} + \frac{d(y \vec{e}_y)}{dt} + \frac{d(z \vec{e}_z)}{dt} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$$

Pour obtenir le vecteur-accélération, il suffit de dériver une fois de plus en tirant partie à nouveau de la linéarité de la dérivation⁵ ainsi que du caractère constant des vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \vec{e}_x \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \vec{e}_y \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \vec{e}_z \right) \end{aligned}$$

soit

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$$

Quand le mobile se déplace « un petit peu » du point $M(x, y, z)$ au point $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, le déplacement élémentaire associé vaut

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

$$= (x + dx) \vec{e}_x + (y + dy) \vec{e}_y + (z + dz) \vec{e}_z - (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

ce qui permet de retrouver l'expression de la vitesse \vec{v} via la relation $d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt$ en « divisant » effectivement le petit déplacement $d\overrightarrow{OM}$ par le petit intervalle de temps dt :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

5. La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

2 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont en fait la restriction des coordonnées cylindriques au plan (Oxy) , mais beaucoup de mouvements de systèmes physiques peuvent se réduire à un mouvement plan dans lequel l'utilisation de coordonnées polaires simplifie grandement le problème, d'où une étude qui se réduit ici au plan (Oxy) . Dans ce cadre, le plan du mouvement peut s'assimiler au plan complexe : le couple (x, y) correspondant au couple (partie réelle, partie imaginaire) alors que le couple (r, θ) correspond au couple (module, argument).

Dans ces conditions, le vecteur-position s'écrit simplement

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{e}_r}$$

Le vecteur-vitesse étant la dérivée du vecteur-position, on dérive l'expression précédente comme un produit :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Or, on montre plus loin que $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, de sorte que la vitesse s'écrive

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta}$$

Concernant le vecteur-accélération, il faut dériver encore une fois l'expression trouvée précédemment pour le vecteur-vitesse. Comme pour les coordonnées cartésiennes, on utilise la linéarité de la dérivation et on rajoute le fait que la dérivée du produit de trois fonction donne $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$. On obtient alors, sachant que $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r) + \frac{d}{dt} (r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta}$$

Démonstration

On va ici démontrer les deux relations

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

En effet, dans la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) par rapport à laquelle on a défini le repère polaire, on peut décomposer les deux vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction uniquement de l'angle θ :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

De ce fait, les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ varient au cours du temps uniquement si θ varie lui-même au cours du temps. On va donc utiliser la dérivée de fonctions composées en regardant les vecteurs de la base polaire

comme une fonction de l'angle θ qui est lui-même une fonction du temps t . Ainsi,

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta} \overbrace{(-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)}^{\vec{e}_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \dot{\theta} \overbrace{(-\cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y)}^{-\vec{e}_r}$$

On trouve bien

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r}$$

L'expression du déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ est légèrement plus compliquée que dans le cas des coordonnées cartésiennes, mais le petit schéma ci-dessous permet de facilement le trouver. En effet, lors du passage du point $M(r, \theta)$ au point $M'(r + dr, \theta + d\theta)$, on se déplace radialement (selon \vec{e}_r) d'une distance dr et orthoradialement (selon \vec{e}_θ) d'un bout d'arc de cercle de rayon r intercepté par un angle $d\theta$, donc d'une distance $r d\theta$. On en déduit

$$\boxed{d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta}$$

De la relation $d\vec{OM} = \vec{v} dt$, on en déduit \vec{v} en « divisant » par dt :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta}$$

3 Coordonnées cylindriques

Dans les coordonnées cylindriques, la projection orthogonale P du point M sur le plan (Oxy) est repéré à l'aide des coordonnées polaires dans le plan (Oxy) . Pour caractériser entièrement le point M, il suffit alors de rajouter son altitude z suivant le vecteur (fixe) \vec{e}_z du repère cartésien. Le vecteur-position peut donc s'écrire

$$\boxed{\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z}$$

Le vecteur-vitesse s'obtient en dérivant l'expression précédente par rapport au temps, mais il n'est nul besoin de refaire tout le calcul puisque le terme $d\vec{OP}/dt$ qui apparaît correspond au vecteur-vitesse obtenu en coordonnées polaires, soit

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} + \frac{d\vec{PM}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z}$$

Finalement, le vecteur-accélération s'obtient en calculant la dérivée seconde du vecteur-position et le terme $d^2\vec{OP}/dt^2$ s'identifie à nouveau au vecteur-accélération calculé dans le cadre des coordonnées polaires de sorte que

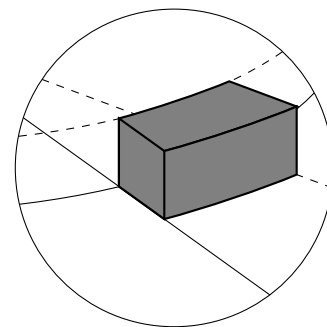
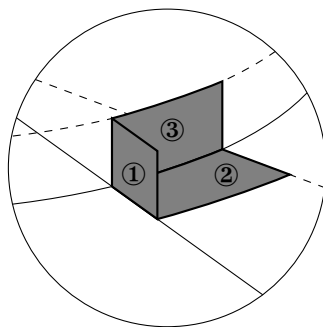
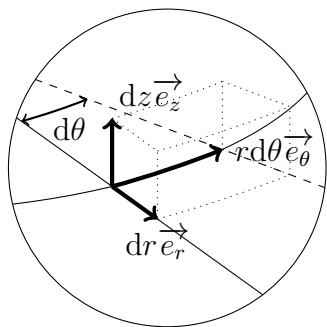
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2\vec{OP}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{PM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z}$$

À nouveau, comme pour les coordonnées polaires, la meilleure manière de trouver le petit déplacement \overrightarrow{dOM} autour du point M quand r varie de dr , θ de $d\theta$ et z de dz est de se faire un ou plusieurs petits dessins pour illustrer la chose. On en déduit notamment l'expression du petit déplacement \overrightarrow{dOM} , ainsi que les surfaces et volumes élémentaires associés :

$$\overrightarrow{dOM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

et

$$dS_1 = dr dz \quad dS_2 = r d\theta dr \quad dS_3 = r d\theta dz \quad \text{et} \quad dV = r d\theta dr dz$$



Comme pour les systèmes de coordonnées précédents, il suffit de « diviser » \overrightarrow{dOM} par dt pour réobtenir l'expression du vecteur-vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

4 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont particulièrement adaptées pour décrire le mouvement à la surface d'une sphère. En fait, en fixant la distance r au centre de la sphère, elles sont entièrement équivalentes à la description géographique en terme de latitude λ et de longitude φ , la seule différence étant que le physicien préfère repérer les angles par rapport au pôle Nord plutôt que par rapport à l'équateur (θ est ce que l'on appelle la « colatitude » et est relié à la latitude λ par $\theta = \lambda + \pi/2$).

D'un point de vue mathématique, les coordonnées sphériques peuvent se voir comme la superposition de deux repères polaires. Le premier étant défini dans le plan (OMz) avec l'angle θ par rapport à l'axe (Oz) alors que le second repère la position du point P dans le plan (Oxy) en se servant de l'angle φ .

Le passage des coordonnées polaires (r, θ, φ) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) se fait en deux temps : on obtient z en projetant le point M en H sur l'axe (Oz) d'une part, et on projette M d'abord en P sur le plan (Oxy) , puis, d'autre part, on projette le point P lui-même pour obtenir x et y . Ainsi, il vient

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{et} \quad z = r \cos \theta$$

L'avantage principal des coordonnées polaires est que \vec{OM} s'écrit de manière particulièrement simple :

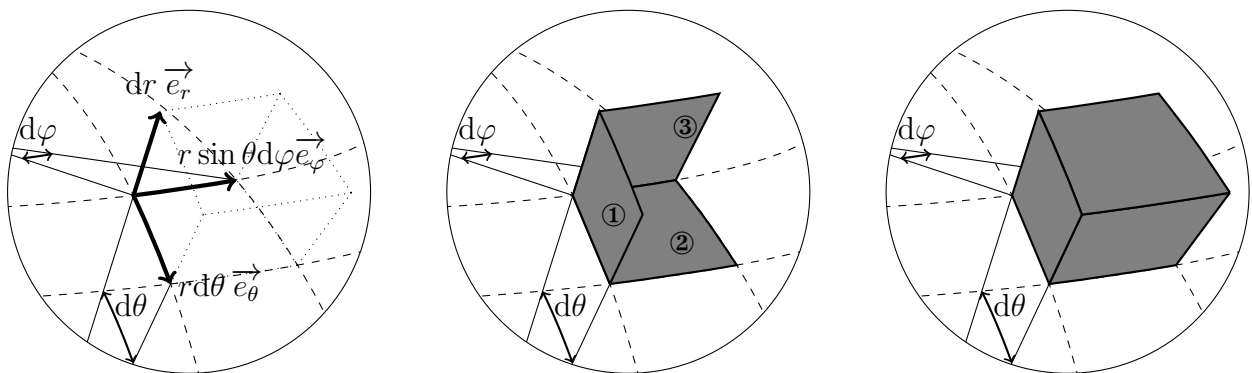
$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

En revanche, l'expression des vecteurs vitesse et accélération sera plus compliquée. Pour le vecteur-vitesse, on peut s'en tirer facilement en écrivant le petit déplacement $d\vec{OM}$. À l'aide des schéma suivants, on voit que celui-ci se décompose comme suit :

- quand la distance au centre varie de dr , le déplacement est radial (selon \vec{e}_r) : $dr \vec{e}_r$;
- quand θ varie de $d\theta$, le déplacement se fait selon \vec{e}_θ d'une distance $r d\theta$ car le cercle sur lequel on se déplace est de rayon r (c'est un des « méridiens » géographiques), d'où $r d\theta \vec{e}_\theta$;
- enfin, quand φ varie de $d\varphi$, le déplacement se fait selon \vec{e}_φ sur le petit cercle de rayon $r \sin \theta$ (c'est un des « parallèles » géographiques), d'où un déplacement $r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$.

En rassemblant ces résultats et en « divisant » $d\vec{OM}$ par dt , on obtient

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$



On peut encore exprimer les surfaces et volume élémentaires à l'aide des schémas précédents, ce qui sera utile quand on voudra découper des surfaces sphériques plus tard dans l'année.

$$dS_{\text{①}} = r d\theta dr \quad dS_{\text{②}} = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad dS_{\text{③}} = r \sin \theta d\varphi dr \quad \text{et} \quad dV = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$$

5 Choix du système de coordonnées

Le choix du système de coordonnées adapté au problème que l'on se pose n'est pas toujours évident. Bien sûr, toutes les paramétrisations permettront de résoudre le problème et d'obtenir le même résultat, mais il est probable que la quantité de calculs rencontrés ne soit pas vraiment la même selon les choix... Voici quelques indications qui peuvent vous guider dans cette décision difficile :

- S'il existe un point particulier du système autour duquel tout semble se mouvoir (le Soleil pour l'étude des planètes du système solaire, le point d'attache d'un pendule simple ou d'un fil élastique, le centre d'un looping circulaire, etc.), le bon choix sera certainement les coordonnées sphériques qui se réduisent à de simples coordonnées polaires quand le mouvement est plan (qui constitue l'essentiel des premiers cas d'étude).
- S'il existe non un point, mais un axe tout entier autour duquel tourne le système (étude d'un escalier en colimaçon ou d'un brin d'ADN, etc.), le bon choix se portera sur des coordonnées cylindriques dont l'axe (Oz) est confondu avec l'axe intéressant du système.
- Si le mouvement est rectiligne ou ne se rattachant pas aux deux cas précédents, les coordonnées cartésiennes sont une valeur sûre. Il faut néanmoins s'assurer que le choix de l'origine et de l'orientation des axes est mûrement réfléchi de sorte à minimiser les calculs qui devront y être menés.

Partie IV

Exemples de mouvements usuels

1 Mouvement de vecteur-accélération constant

Le mouvement se faisant à vecteur-accélération \vec{a}_0 constant, on cherche l'expression la plus générale du vecteur-vitesse dont la dérivée peut donner un vecteur constant. Le vecteur-vitesse s'écrit donc

$$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{C}^{\text{te}}$$

où l'on remarque que, dans ce cas là, la constante correspond à la valeur du vecteur-vitesse lorsque⁶ $t = 0$. Ainsi, en notant \vec{v}_0 la vitesse initiale, il vient

$$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

Attention!

Si \vec{v}_0 n'avait pas été la vitesse à $t = 0$ mais par exemple la vitesse à un temps t_1 , il aurait fallu regarder la valeur de $\vec{v}(t)$ en $t = t_1$ pour en déduire la constante. Cela même à l'équation

$$\vec{v}_0 = \vec{a}_0 t_1 + \vec{C}^{\text{te}} \quad \text{soit} \quad \vec{C}^{\text{te}} = \vec{v}_0 - \vec{a}_0 t_1$$

d'où

$$\vec{v} = \vec{a}_0 (t - t_1) + \vec{v}_0$$

où l'on vérifie⁷ bien « à vue » que $\vec{v}(t = t_1)$ vaut effectivement \vec{v}_0 .

Un calcul identique permet de trouver le vecteur \vec{OM} dont la dérivée doit donner \vec{v} . Ainsi,

$$\vec{OM} = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{C}^{\text{te}'} \quad \text{soit} \quad \vec{OM} = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0$$

en notant \vec{OM}_0 la valeur initiale du vecteur-position.

Choisir un repère cartésien signifie que l'on peut choisir la direction de deux vecteurs orthogonaux (\vec{e}_z et \vec{e}_x par exemple), le troisième étant déterminé automatiquement par le caractère direct du trièdre ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Ainsi, on choisit le vecteur \vec{e}_z de sorte que l'accélération s'écrive $\vec{a}_0 = a_0 \vec{e}_z$. On choisit alors \vec{e}_x de sorte que la vitesse initiale ne soit portée que par \vec{e}_z et \vec{e}_x , c'est-à-dire que $\vec{v}_0 = v_{x0} \vec{e}_x + v_{z0} \vec{e}_z$. Finalement, il nous reste le

6. Il suffit de remplacer $t = 0$ dans la formule donnant la vitesse.

7. Vérification qu'il faut toujours faire après un calcul d'intégration.

choix de l'origine du système de coordonnées que l'on peut choisir à la position initiale du point M, de sorte que $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0}$. On en déduit

$$\overrightarrow{OM}(t) = v_{0x}t \vec{e}_x + \left(a_0 \frac{t^2}{2} + v_{0z}t \right) \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x(t) = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x = v_{0x}t \\ y(t) = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_y = 0 \\ z(t) = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_z = a_0 \frac{t^2}{2} + v_{0z}t \end{cases}$$

La première équation permet d'isoler le temps $t = x/v_{0x}$ que l'on peut alors remplacer dans l'expression de z pour obtenir l'équation de la trajectoire sous forme d'une parabole :

$$z(x) = \frac{a_0}{2v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x$$

EXERCICE M13 Mouvement à accélération constante

Déterminer les équations horaires pour un mouvement tel que $\vec{a} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_z$ avec les conditions initiales $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0}$. Trouver l'équation de la trajectoire $z(x)$ ou $x(z)$ comme cela vous arrange. Est-ce toujours une parabole « habituelle »?

2 Mouvement circulaire uniforme

Le repère adapté à un mouvement circulaire de rayon R est bien entendu le repère polaire où le vecteur-position s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r$$

La vitesse s'écrit en coordonnées polaires $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Sur une trajectoire circulaire, la distance au centre est constante de sorte que $\dot{r} = 0$ et donc la vitesse est orthoradiale $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$. Le mouvement étant de plus uniforme, cela signifie que $\|\vec{v}\| = C^{\text{te}}$, c'est-à-dire que l'on peut noter $\dot{\theta} = \omega_0 = C^{\text{te}}$ puisque R est lui-même constant sur la trajectoire circulaire. Ainsi,

$$\vec{v} = R\omega_0 \vec{e}_\theta$$

Finalement, en coordonnées polaires, le vecteur-accélération s'écrit

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

D'une part, le mouvement étant circulaire, on a $r = R = C^{\text{te}}$, $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. D'autre part, il est uniforme de sorte que $\dot{\theta} = \omega_0 = C^{\text{te}}$ et $\ddot{\theta} = 0$. Le vecteur accélération simplifié de la sorte est radial :

$$\vec{a} = -R\omega_0^2 \vec{e}_r$$

Attention!

Malgré le fait que la vitesse soit constante *en norme* dans le cadre d'un mouvement circulaire uniforme, le vecteur-accélération *n'est pas nul* puisque la vitesse varie tout de même *en direction* même si sa norme reste inchangée au cours du mouvement. Le seul mouvement pour lequel le vecteur accélération est effectivement nul est le mouvement *rectiligne* uniforme.

EXERCICE M14 Mouvement circulaire uniforme, dérivation directe

Retrouver le résultat précédent en prenant en compte que $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ avec $R = C^{te}$ et en dérivant directement cette expression.

3 Mouvement circulaire non uniforme

En coordonnées polaires, les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Le mouvement étant circulaire, on a $r = R = C^{te}$, d'où $\dot{r} = 0$ (en particulier constante), soit $\ddot{r} = 0$. N'ayant pas d'hypothèse sur l'uniformité du mouvement, on ne peut pas aller plus loin et on en déduit

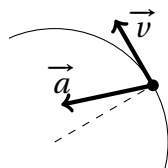
$$\vec{OM} = R\vec{e}_r \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Supposons que la rotation ait lieu dans le sens direct, c'est-à-dire que $\dot{\theta} > 0$, soit, en notant $v = \|\vec{v}\|$, que l'on ait directement $v = R\dot{\theta}$. On peut alors réécrire l'expression du vecteur accélération sous la forme

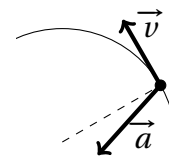
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$$

On peut alors faire plusieurs observations :

- Du fait du terme en $-(v^2/R)\vec{e}_r$, le vecteur-accélération est toujours orienté vers le centre de courbure (on dit aussi dans la « concavité » de la courbe).
- Si la vitesse tend à augmenter, on a $dv/dt > 0$, c'est-à-dire que le vecteur accélération est en plus dirigé dans le sens du mouvement (du fait du terme en \vec{e}_θ) : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$.
- Si au contraire la vitesse tend à diminuer, le vecteur accélération a une composante dirigée dans le sens contraire du mouvement : $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.



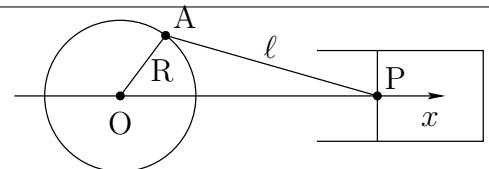
Mouvement accéléré : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$



Mouvement ralenti : $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$

EXERCICE M15 Conversion rotation/translation

Une roue de rayon R tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire constante ω . Une barre de longueur ℓ , articulée en un point A de la roue, communique un mouvement de translation selon l'axe Ox à un piston situé en P .



1. Décrire qualitativement le mouvement attendu du piston.
2. Déterminer l'abscisse x du piston à tout instant t en supposant qu'à $t = 0$, $x = R + \ell$.
3. En déduire la vitesse et l'accélération du piston.
4. Que deviennent ces expressions si $R \ll \ell$ (à l'ordre 2 en R/ℓ) ?

Cinématique du solide

1 Définition d'un solide

On appellera **solide** tout ensemble de points matériels $\{M_i\}$ dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps :

$$\forall (i, j) \quad \|\overrightarrow{M_i M_j}\|(t) = C^{te}$$

On distingue deux modèles principaux de solides :

- le modèle **discret** où l'ensemble $\{M_i\}$ est un ensemble contenant un nombre fini de points matériels;
- le modèle **continu**, pour lequel on définit une masse volumique $\rho(M)$ telle que pour un petit volume dV autour d'un point M donné du solide, la masse présente dans ce volume vaille $dm = \rho(M) dV$. Ce modèle est utilisable en pratique car, malgré le fait que toute matière est constitué d'un nombre fini d'atomes quasi-ponctuels, ceux-ci sont si petits et si nombreux que l'on peut choisir des volumes élémentaires dV dits « mésoscopiques », très petits à l'échelle de notre monde macroscopique, mais très grands par rapport à l'échelle atomique (dite microscopique), de sorte que les détails structurels ne sont plus visibles.

Remarque : Ne pas confondre le solide mécanique idéal avec des matériaux à l'état solide qui peuvent connaître de petites déformations.

2 Translation

Un solide subit une translation si à tout moment les orientations des points qui le constituent restent fixes les uns par rapport aux autres. En d'autres termes, si le solide est constitué des points $\{M_i\}$, alors

$$\forall (i, j) \quad \overrightarrow{M_i M_j} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{M_i M_j}$ sont non seulement constant en norme (ce qui découle directement de la définition du solide) mais surtout en *direction* : ils ne tournent pas par rapport au référentiel d'étude.

⚠ Attention!

« Translation » *n'est pas* un synonyme de « rectiligne ». Il existe effectivement des « translations rectilignes » comme celle d'une voiture roulant en ligne droite sur l'autoroute⁸, mais on peut aussi avoir des « translations circulaires » comme celle d'une nacelle dans une grande roue : le point d'attache de la nacelle se déplace sur un cercle, mais l'orientation de la nacelle reste inchangée lors du mouvement (on ne se retrouve pas la tête en bas tout en haut de la grande roue!). Plein de translations non rectilignes sont envisageables comme celle (elliptique) du référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic ou encore celle (circulaire mais non uniforme) du bus londonien à EuropaPark.

3 Rotation autour d'un axe fixe

Lorsqu'un solide est en rotation de vitesse angulaire Ω par rapport à un axe fixe Δ , alors chacun des points le constituant est en rotation circulaire à vitesse angulaire Ω autour du même axe Δ . Le rayon de cette rotation est, pour un point M_i , égale à la distance $r_i = \|HM_i\|$ de ce point à l'axe Δ , où H est le projeté orthogonal de M_i sur l'axe Δ (penser aux coordonnées cylindriques). La vitesse de ce point est donc, comme pour le mouvement circulaire (uniforme ou non) discuté précédemment, donnée par

$$\vec{v}_i = r_i \Omega \vec{e}_\theta$$

8. À condition d'oublier le mouvement de rotation des pneus et de toutes les parties mobiles du moteurs...

CORRECTION M1.1 Vitesse et accélération

Le vecteur vitesse correspond à la dérivée première du vecteur position

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{0} + \vec{g} \tau \times \left(1 - \tau \times \left(0 + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\right)\right) = \vec{g} \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

L'accélération vaut quant à elle la dérivée de la vitesse

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \vec{g} \tau \left(0 + \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\right) = \vec{g} e^{-t/\tau}$$

On peut remarquer que $\vec{a} = \vec{g} - \frac{\vec{v}}{\tau}$, ce qui correspond au cas d'une chute libre avec frottements fluides.

CORRECTION M1.2 Course de moto

Commençons par remarquer que les virages n'ont (pour le moment) pas d'importance puisqu'on accède à la ligne droite suivante avec la même vitesse que l'on est sorti de la précédente. Le temps t_1 nécessaire pour parcourir les deux lignes droites (distance $2L$) en partant arrêté est donc la même dans les deux cas et est telle que $2L = a_0 t_1^2/2$, soit $t_1 = \sqrt{4L/a_0}$.

La différence va s'opérer dans les virages et là, la moto qui démarre en ② est avantagée puisqu'elle arrive dans le premier virage après avoir constamment accéléré sur une distance L alors que l'autre n'a pu accélérer que sur une distance $L/2$ et a donc atteint une vitesse moindre. Les motos mettant d'autant moins de temps à parcourir un virage que leur vitesse dans ce virage est forte, on en déduit que la moto partant de ② finit son tour plus rapidement que celle qui part de ①.

CORRECTION M1.3 Mouvement à accélération constante

Le mouvement étant à accélération constante, on a

$$\begin{cases} \ddot{x} = a \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x} = at + C^{\text{te}} = at \\ \dot{y} = C^{\text{te}} = 0 \\ \dot{z} = bt + C^{\text{te}} = bt + v_0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{at^2}{2} + C^{\text{te}} = \frac{at^2}{2} \\ y(t) = C^{\text{te}} = 0 \\ z(t) = \frac{bt^2}{2} + v_0 t + C^{\text{te}} = \frac{bt^2}{2} + v_0 t \end{cases}$$

L'équation en $x(t)$ permet d'isoler $t = \sqrt{2x/a}$ de sorte que l'équation de la trajectoire s'écrive

$$z(x) = \frac{b}{a} x + v_0 \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

Cela reste une parabole mais pas dans le sens où vous l'avez connu jusqu'ici puisque la concavité n'est pas verticale mais oblique.

CORRECTION M14 Mouvement circulaire uniforme, dérivation directe

Dans $\vec{OM} = R\vec{e}_r$, il n'y a que \vec{e}_r qui varie, d'où $\vec{v} = R\omega_0\vec{e}_\theta$. Puis, comme seul \vec{e}_θ change dans l'expression précédente du fait du caractère uniforme du mouvement, l'accélération s'écrit bien $-R\omega_0^2\vec{e}_r$.

CORRECTION M15 Conversion rotation/translation

1. Le piston va faire des mouvement de va-et-vient à mesure que la roue tourne autour de son axe.

2. Le mouvement du point A est un mouvement circulaire uniforme à vitesse angulaire ω . Sa position s'écrit donc, en coordonnées polaires centrées sur O :

$$\vec{OA}(t) = R\vec{e}_r = R(\cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y) = R(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$$

soit
$$x_A(t) = R\cos\omega t \quad \text{et} \quad y_A(t) = R\sin\omega t$$

où l'on a déduit $\theta(t) = \omega t$ du fait qu'à $t = 0$ le point A doit se trouver pile entre O et P de sorte que $x(0) = R + \ell$.

Posons à présent H la projection orthogonale de A sur l'axe des x . On connaît déjà $OH = x_A(t)$. Reste à déterminer $HP(t)$, ce qui se fait bien par Pythagore. On en déduit alors

$$x(t) = OH(t) + HP(t) = R\cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - y_A(t)^2} = R\cos\omega t + \sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2\omega t}$$

3. La vitesse se calcule encore assez facilement par dérivation de fonctions composées. Pour l'accélération, il faut s'accrocher et être soigneux. On obtient

$$\dot{x} = -R\omega\sin\omega t - \frac{2R^2\sin\omega t \times \omega\cos\omega t}{2\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2\omega t}} = R\omega \left[-\sin\omega t - \frac{R}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2\omega t}} \sin(2\omega t) \right]$$

Comme dit plus haut, pour l'accélération, il faut s'accrocher un peu, mais c'est faisable en remarquant que $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{HP(t)}\right) = -\frac{1}{HP(t)^2} \frac{dHP}{dt}$, cette dernière ayant déjà été calculée.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = R\omega \frac{d}{dt} \left[-\sin\omega t + \frac{R}{HP(t)} \sin(2\omega t) \right] \\ &= R\omega \left[-\omega\cos\omega t + \frac{R}{HP(t)} 2\omega\cos(2\omega t) - \frac{R}{HP(t)^2} \sin(2\omega t) \frac{dHP}{dt} \right] \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = R\omega \left[-\omega\cos\omega t + \frac{R}{HP(t)} 2\omega\cos(2\omega t) - \frac{R^3}{HP(t)^3} \omega\sin^2(2\omega t) \right]$$