

## Circuit mobile dans un champ stationnaire

Nous considérons maintenant les situations où le champ magnétique est stationnaire. Le circuit fermé comporte une ou plusieurs parties conductrices mobiles. On parle alors de cas d'induction de Lorentz.

Nous avons vu en cours de Thermodynamique ( $\mathcal{T6}$ ) le principe utilisé dans les centrales électriques pour récupérer l'énergie thermique sous forme d'énergie mécanique (travail). Nous avons vu dans le précédent chapitre comment élever ou abaisser la tension électrique pour transporter le courant, mais nous n'avons pas encore vu comment transformer le travail mécanique en d'énergie électrique.

Partie I

### Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

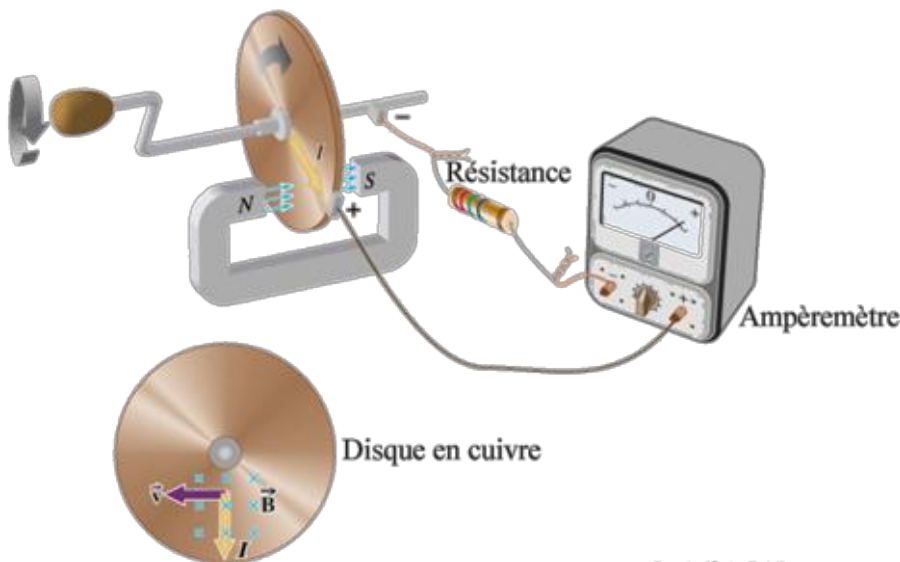


Figure 4.1 – Un exemple de conversion de puissance : le disque de cuivre en rotation dans la zone de champ magnétique est freiné par courants de Foucault, mais rien ne nous empêche de récupérer ces courants. On vient de fabriquer un alternateur.

## 1 Exemple des rails de Laplace

### a) Dispositif

**Présentation** On considère un circuit constitué de deux rails parallèles horizontaux distants de  $a = AA'$ , sur lesquels peut glisser sans frottement une barre conductrice de masse  $m$ . Les deux rails sont reliés par une résistance  $R$ . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique vertical  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . À  $t = 0$ , la barre est lancée avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$  où  $v_0 > 0$ .

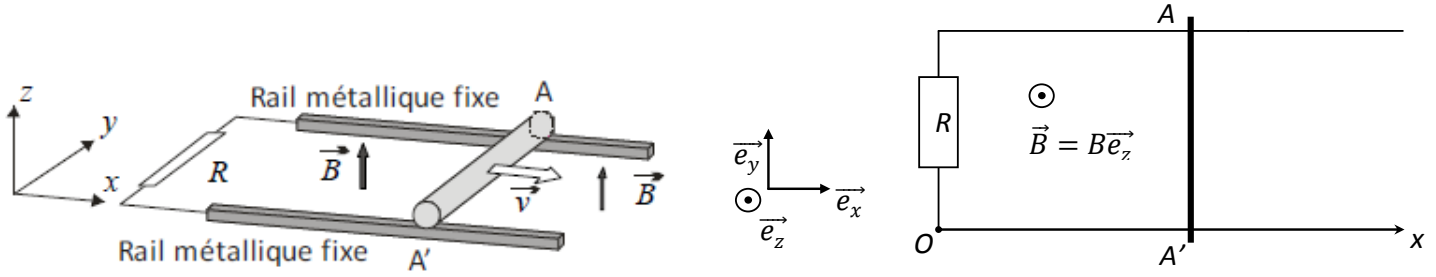


FIGURE 4.2 – Dispositif étudié : le rail est lancé à une certaine vitesse et le système évolue sans source extérieure de tension.

**Analyse qualitative** Le mouvement du barreau provoque l'apparition d'une f.é.m. induite et donc d'un courant dans le circuit. D'après la loi de Lenz, « La f.é.m. induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. ». Par conséquent, le courant qui apparaît a un sens tel que :

- le champ magnétique qu'il engendre est opposé à celui qui l'a créé,
- la force de Laplace à laquelle sera alors soumis le barreau est telle qu'elle est dirigée dans le sens opposé à son mouvement initial.

On en déduit que le courant induit est dirigé de A vers A'.

On peut également prévoir que l'énergie présente initialement dans le système (énergie cinétique du barreau) sera entièrement dissipée par effet Joule par le passage du courant induit dans la résistance équivalente du circuit.

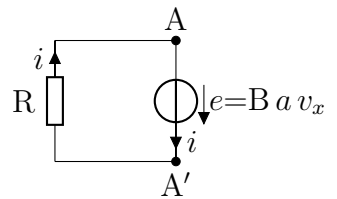
**F.é.m. induite et équation électrique** On peut calculer la f.é.m. induite à partir de la loi de Faraday. Première étape : l'orientation que l'on choisit<sup>1</sup> (de manière arbitraire) dans le sens de A vers A'. On calcule alors

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} B \vec{e}_z \cdot dS(-\vec{e}_z) = -B \iint_{\mathcal{S}} dS = -B \overbrace{ax(t)}^{\mathcal{S}(t)}$$

Il en découle que 
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B a v_x(t)$$

L'orientation du circuit commande à la fois l'orientation du vecteur surface nécessaire pour calculer le flux du champ magnétique *mais impose aussi* l'orientation de la f.é.m. qui en découle. L'équation électrique se déduit directement de l'orientation choisie sous la forme

$$\boxed{Ri = e = B a v_x(t)}$$



**Équation mécanique** On cherche à établir l'équation mécanique du mouvement du barreau en appliquant la RFD. Le poids du barreau et la réaction normale étant dirigés suivant  $\vec{e}_z$ , seule la force de Laplace apparaît dans la projection sur Ox de la RFD. Or celle-ci s'écrit

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_A^{A'} d\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_A^{A'} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \left( \int_A^{A'} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = i \vec{AA}' \wedge \vec{B} = -i(t) a B \vec{e}_x$$

La projection suivant  $\vec{e}_x$  de la RFD donne alors l'équation mécanique

$$\boxed{m \frac{dv_x}{dt} = -i(t) a B}$$

1. Avec ce choix, le courant finalement trouvé devrait être positif au vu de notre analyse qualitative.

**Lois horaires** Il nous reste à résoudre le système d'équations suivants, dans lequel  $i$  et  $v_x$  sont couplés

$$\begin{cases} Ri = Ba v_x \\ m \frac{dv_x}{dt} = -i aB \end{cases}$$

En isolant  $i$  dans la première équation et en le substituant dans la seconde, on obtient

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{a^2 B^2}{mR} v_x$$

soit

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau} v_x = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$$

La résolution avec la condition initiale  $v_x(0) = v_0$  permet d'obtenir les équations horaires explicites pour  $v_x(t)$  et  $i(t)$ .

$$v_x(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{Ba}{R} v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$$

### EXERCICE I Rails de Laplace avec force constante

Reprendre le raisonnement précédent, mais en appliquant une force constante  $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$  sur la barre qui part initialement avec une vitesse nulle.

#### b) Analyse énergétique

**Bilan énergétique** La vitesse s'annule pour  $t \rightarrow +\infty$ . L'énergie cinétique est donc nulle à l'infini. On a donc d'une part

$$\Delta E_m = \Delta E_c = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

D'autre part, l'énergie perdu par effet Joule est donnée par

$$E_J = \int_0^{+\infty} R i^2(t) dt = \frac{(aBv_0)^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{(aBv_0)^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Ainsi toute l'énergie présente au départ se trouve dissipée par effet Joule. Il est important de signaler que la puissance extérieure instantanée pour maintenir constante la vitesse de la tige est précisément égale à la puissance instantanée dissipée dans la résistance. Au plan de l'interprétation, il est clair que pour maintenir cette puissance dissipée en chaleur dans la résistance, il faut une source d'énergie extérieure et que ce circuit illustre une manière de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique.

**Couplage électromécanique parfait** Ni la puissance de la force de Laplace ni la puissance de la force électromotrice induite n'apparaissent dans le bilan énergétique global. En effet, on constate que les puissances instantanées associées se compensent exactement

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) = \vec{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{v} = -i(t) aB v_x(t) \\ \mathcal{P}_{\text{f.é.m.}}(t) = e(t) i(t) = Bav(t) i(t) \end{cases}$$

On a donc à tout instant

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) + \mathcal{P}_{\text{f.é.m.}}(t) = 0$$

Cette relation caractérise le **couplage électromécanique parfait** que l'on obtient dans le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.

## EXERCICE 2 Analyse énergétique des rails avec force constante

Reprendre le cas de la force  $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$  constante sur les rails et faire l'analyse énergétique. Le couplage est-il parfait à tout instant?

**Quelques remarques** Dans la situation étudiée précédemment, on avait  $\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) < 0$  et  $e(t)i(t) > 0$ . Le système avait de l'énergie mécanique au départ qu'il a transformé en énergie électrique qui s'est ensuite « dégradée » en chaleur par effet Joule.

Il apparaît donc ici une « conversion » d'énergie (ou de puissance) entre une forme électrique et une forme mécanique : on parle de *transduction*. On pourra retenir que

- si  $\mathcal{P}_{\text{Lap}} > 0$  alors  $e(t)i(t) < 0$  : le système est récepteur d'énergie électrique<sup>2</sup> et fournit de l'énergie mécanique, il se comporte comme un **moteur électrique**.
- si  $\mathcal{P}_{\text{Lap}} < 0$  alors  $e(t)i(t) > 0$  : le système est récepteur d'énergie mécanique et fournit de l'énergie électrique, il se comporte comme un **générateur électrique**.

## 2 Spire rectangulaire en rotation

### a) Système étudié

On considère une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe. Le mouvement du cadre provoque une variation sinusoïdale du flux magnétique à travers le circuit. Il en résulte l'apparition d'une f.é.m. induite sinusoïdale et donc d'un courant dans le circuit. D'après la loi de Lenz, le courant qui apparaît a un sens tel que la force de Laplace s'oppose au mouvement imposé par l'expérimentateur.

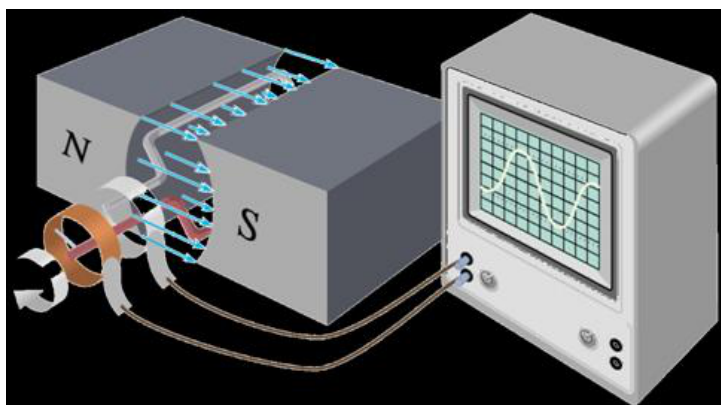


Figure 4.3 – Spire en rotation dans l'entrefer d'un aimant qui génère un champ uniforme de direction constante. La f.é.m. induite dans la spire peut être récupérée, c'est le principe d'un alternateur.

### b) F.é.m. induite et équation électrique

En introduisant le vecteur surface  $\vec{\mathcal{S}}$  qui s'écrit d'après la figure 4.4

$$\vec{\mathcal{S}} = \mathcal{S} (\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z) = ab (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_z)$$

le flux du champ magnétique au travers de la spire s'exprime par

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{S}} = B ab \sin \omega t$$

2. La puissance électrique fournie (puisque la f.é.m. est forcément orientée en générateur si vous avez bien fait votre travail) est négative.

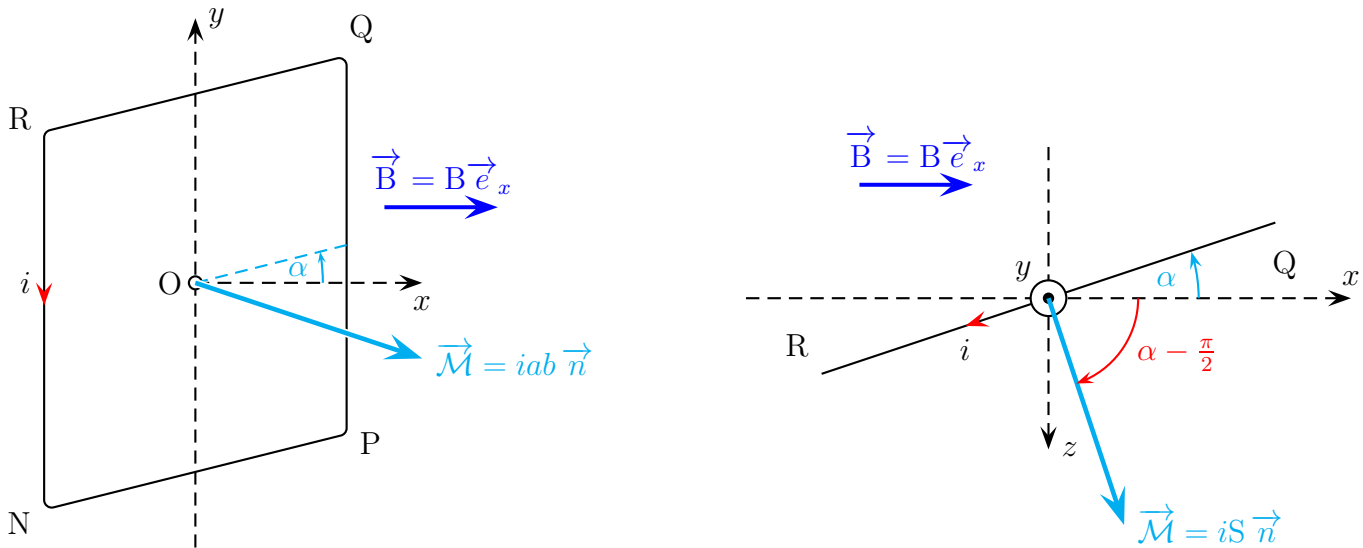


FIGURE 4.4 – Système étudié, vue en « 3D » (à gauche) et vue de dessus (à droite). Le champ magnétique  $\vec{B}$  est orienté selon la direction  $\vec{e}_x$  et est uniforme et stationnaire. La spire est repérée par l'angle  $\alpha = \omega t$  qu'elle fait par rapport à  $Ox$ .

La force électromotrice induite est donnée par la loi de Faraday

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B ab \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = -B ab \omega \cos \omega t$$

Si la spire (de résistance interne  $r$  et d'auto-inductance négligeable) est refermée sur une résistance d'utilisation  $R$ , alors l'équation électrique s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) - r i(t) = R i(t) \quad \text{soit} \quad \boxed{i(t) = \frac{e(t)}{R+r} = -\frac{B ab}{R+r} \omega \cos \omega t}$$

---

### EXERCICE 3 Spire en rotation avec auto-inductance non négligeable, équation électrique

---

Que devient cette équation électrique si on ne néglige pas le coefficient d'auto-induction  $L$  de la spire?

---

#### c) Équation mécanique

Niveau mécanique, il n'y a pas beaucoup de travail à faire puisque l'on suppose le mouvement connu : il faut donc forcément que le couple moteur exercé sur la spire par un dispositif extérieur compense exactement le couple résistant dû aux forces de Laplace. On a vu dans le chapitre 12 que celui-ci pouvait s'écrire

$$\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = i \vec{\mathcal{S}} \wedge \vec{B} = i ab \left( \sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_z \right) \wedge B \vec{e}_x$$

Finalement,

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} = i ab B \cos \omega t \vec{e}_y}$$

#### d) Puissance des actions mécaniques de Laplace

Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, la puissance s'exprime en fonction du moment des actions suivant l'axe de rotation et la vitesse angulaire autour de cet axe

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) = \vec{\Gamma}_{\text{Lap}} \cdot \vec{\Omega} = i ab B \cos \omega t \times \omega}$$

### e) Couplage électromécanique parfait

La puissance électrique fournie par le générateur s'écrit quant à elle

$$\mathcal{P}_{\text{fém}}(t) = e(t) i(t) = -B ab \omega \cos \omega t \times i(t)$$

On retrouve bien le couplage électromécanique parfait

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) + \mathcal{P}_{\text{fém}}(t) = 0$$

#### EXERCICE 4 Spire en rotation avec auto-inductance non négligeable, analyse énergétique

Reprendre l'analyse énergétique sans négliger l'auto-inductance  $L$  de la spire.

Le couplage est-il encore parfait ?

### f) Conclusion

Ce que nous venons de voir explique pourquoi le courant domestique et industriel sont, le plus souvent, alternatifs et sinusoïdaux : ils sont produits par la rotation de spires dans un aimant. Dans une centrale électrique située près d'un barrage, par exemple, c'est l'eau qui, en tombant, entraîne des turbines. Celles-ci font tourner l'axe des spires. Dans les éoliennes, c'est le vent qui fait tourner des pales et l'axe des spires.

## 3 Freinage par induction

Lorsque le conducteur est une masse occupant un volume important. Les courants induits par le déplacement de ce conducteur circulent dans des boucles fermées localisées dans le volume conducteur. Si dans un circuit filiforme, les courants induits sont géométriquement bien définis, il est beaucoup plus délicat d'en déterminer le chemin dans le cas général.

D'une manière générale, la force de Laplace volumique due à ces courants dans le conducteur mobile s'oppose toujours au déplacement d'après la loi de Lenz (cf. ci-dessous). L'énergie cinétique est transformée en effet Joule. Exemple : frein électromagnétique des poids lourds Telma ou des trains TGV.



Figure 4.5 – Système de freinage à induction présent dans les wagons de la Deutsche Bahn.

Partie II

## Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

### 1 Moteur à courant continu à entrefer plan

#### a) Description

C'est un moteur à courant continu dans lequel les conducteurs induits, au lieu d'être parallèles à l'axe, sont disposés selon des rayons.

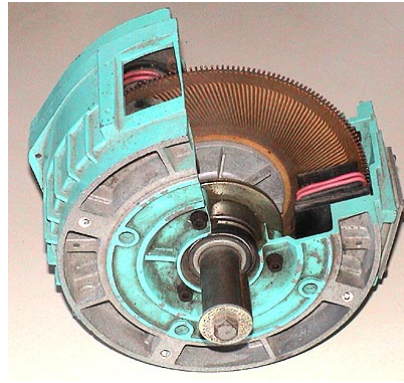
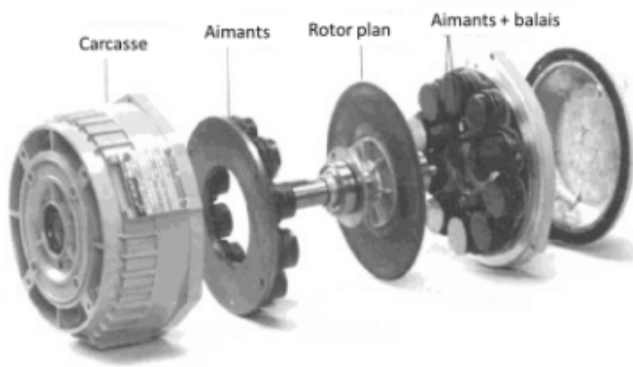


Figure 4.6 – Vue « explosée » d'un moteur à entrefer plan (à gauche) et le même en vrai (à droite), mais prédécoupé pour voir une partie de l'intérieur.

Le stator est constitué de deux supports fixes circulaires sur lesquels sont montés des aimants permanents. Le champ magnétique créé par le stator est donc stationnaire.

Le rotor est constitué d'un axe de rotation et d'un disque, solidaire de l'axe, sur lesquels sont imprimés de nombreux circuits électriques radiaux, séparés par un isolant. Ces circuits électriques imposent une conduction radiale du courant (selon un rayon du disque)

Des balais, contacts métalliques frottant, assurent le passage du courant entre le circuit extérieur et les circuits électriques mobiles du rotor.

L'entrefer est la zone située entre deux aimants. C'est donc ici le rotor plan, d'où le nom de ce moteur.

Ce moteur est réversible et peut servir soit en générateur soit en moteur. Quand il fonctionne en moteur, il est alimenté par une tension continue pour avoir une vitesse de rotation constante.

### b) Analyse qualitative

Concrètement (voir figure 4.7), il s'agit d'une roue avec des fils électrique disposés selon les rayons. Un dispositif permet de maintenir un courant  $i$  depuis le centre vers la périphérie. Des aimants sont places de part et d'autre de la roue pour obtenir un champ magnétique uniforme. Une carcasse permet de fermer le « circuit magnétique » pour canaliser les lignes de champs et augmenter l'intensité du champ magnétique au niveau de l'entrefer.

Au niveau de chaque rayon, une force de Laplace apparait selon le vecteur  $\vec{e}_\theta$ . L'ensemble des forces de Laplace est de résultante nulle, mais de couple non nul. Ce couple tend à faire tourner la roue autour de l'axe Oz et ce d'autant plus que le courant est important.

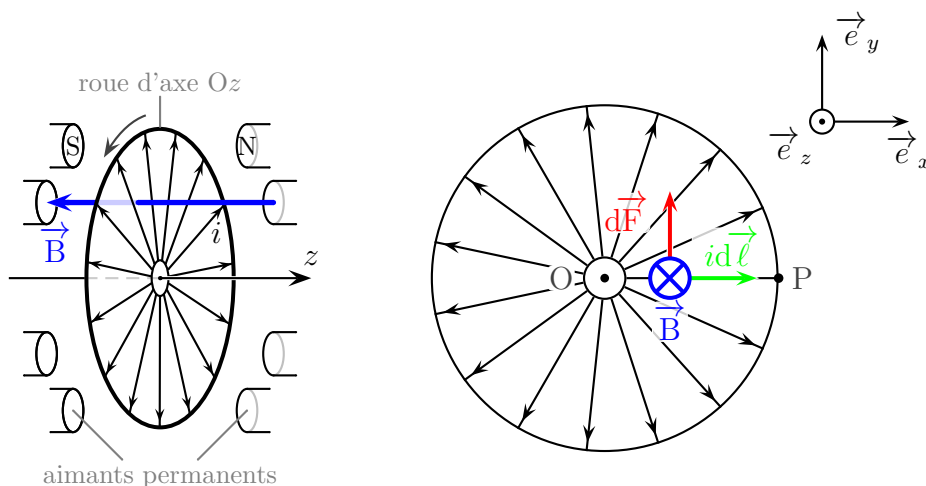


Figure 4.7 – Schématisation du système. Vue de profil (à gauche) et vue de face (à droite). La circulation radiale du courant ipose que toutes les forces de Laplace qui s'appliquent fasse tourner le moteur dans le même sens.

### c) Calculs

**Moment de Laplace** Calculons le moment de la force de Laplace exercé sur un rayon de la roue. On appelle  $a$  le rayon de la roue et on utilise la base polaire locale. La force de Laplace exercée sur un rayon de la roue vaut

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_0^P i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \vec{OP} \wedge \vec{B} = i a \vec{e}_r \wedge (-B \vec{e}_z) = i a B \vec{e}_\theta$$

Le point d'application de la force de Laplace sur un segment de droite lorsque le champ est uniforme est le milieu du segment. Le couple sur un rayon de la roue en O sera donc

$$\vec{\Gamma}_1 = i a B \times \frac{a}{2} \vec{e}_z$$

---

#### EXERCICE 5 Calcul du couple par sommation de couples élémentaires

---

Montrer par une sommation directe des couples élémentaires que le couple résultant de Laplace sur un rayon  $a$  pour expression  $\frac{i a^2 B}{2} \vec{e}_z$ .

---

S'il y a  $N$  rayons sur la roue, le couple total est donc

$$\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} = N \times \vec{\Gamma}_1 = N i \times B \frac{a^2}{2} \vec{e}_z$$

$Ni$  est le courant qui est fourni par le générateur qui alimente la roue, le couple fourni par la machine est donc proportionnel à l'intensité fournie pour l'alimenter.

**Équation électrique** On va utiliser le caractère parfait du couplage électromécanique pour déterminer la f.é.m. induite dans le système et en déduire le lien avec la tension  $E$  d'alimentation du moteur. En effet, comme d'une part

$$e_{\text{ind}}(t) i(t) = \mathcal{P}_{\text{f.é.m.}} = -\mathcal{P}_{\text{Lap}} = -\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} \cdot \vec{\Omega} = -N i(t) B \frac{a^2}{2} \omega(t) \quad \text{soit} \quad e_{\text{ind}}(t) = -N B \frac{a^2}{2} \omega(t)$$

et d'autre part  $E + e_{\text{ind}}(t) = r i(t)$  soit  $i(t) = \frac{E - N B \omega a^2 / 2}{r}$

avec  $r$  la résistance interne du circuit totale et en négligeant l'auto-inductance du système.

**Équation mécanique** Reste à présent à faire le lien avec le couple résistant  $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_r \vec{e}_z$  (pour raisonner sur  $\Gamma_r > 0$ ) via le théorème du moment cinétique appliqué à l'axe de rotation. On a alors, avec  $J_\Delta$  le moment d'inertie du rotor,

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{\text{Lap}} - \Gamma_r = N B \frac{a^2}{2} \times \left( \frac{E - N B \omega a^2 / 2}{r} \right) - \Gamma_r$$

soit  $\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \omega = \frac{\omega_\infty}{\tau}$  avec  $\tau = J_\Delta r \left( \frac{2}{N B a^2} \right)^2$  et  $\omega_\infty = \frac{2}{N B a^2} E - \frac{\tau}{J_\Delta} \Gamma_r$

Il est à noter que, si le couple résistant est négligeable, la vitesse de rotation  $\omega_\infty$  finalement atteinte après le régime transitoire est directement proportionnelle à la tension  $E$  d'alimentation du moteur.



**d) Points à retenir**

- Force contre-électromotrice proportionnelle à la vitesse de rotation.
- Couple développé par les forces de Laplace proportionnel à  $i$ .
- Lorsque la charge augmente  $\omega_\infty$  (qui est la vitesse atteinte après disparition du transitoire) diminue.
- En augmentant  $E$ , on augmente  $\omega_\infty$ .
- On peut inverser le sens de rotation simplement en inversant le sens du courant.

**e) Avantages/Inconvénient****Avantages**

- Moteur très plat, l'induit est un disque.
- L'inducteur est à aimant permanent, pas de circuit d'excitation.
- Pas de fer au rotor : inductance faible, constante de temps électrique faible.
- Pas de bobinage d'excitation : pas de pertes joules inducteur,
- La disposition des conducteurs supprime la réaction magnétique d'induit d'où une bonne commutation.
- Grande gamme de vitesse : de 1 à 4000 tours/min très contrôlée et stable.
- Très grande accélération angulaire, jusqu'à environ  $150000 \text{ rad.s}^{-2}$ .

**Inconvénients**

- Pour les petites puissances  $\mathcal{P}_{\max} = 2 \text{ kW}$ .
- Inertie thermique faible qui ne permet pas au moteur de tolérer des surcharges trop longues.
- En pratique une des difficultés est d'assurer le contact électrique, ce qui est fait à l'aide de contacts frottant. Ces contacts frottants crée un couple résistant et s'usent. Ils doivent donc être remplacés régulièrement. Ce moteur est donc peu adapté aux vitesses de rotation élevées à cause de l'usure des contacts électriques entre le rotor et le stator.

**f) Utilisations**

Permet des commandes à inversions rapides et fréquentes tels que dérouleurs de bandes magnétiques, servo-mécanismes. Utilisé également comme moteur à courant continu pour climatiseurs, essuie-glaces d'automobiles, ventilateurs, etc : La précision de la rotation est appréciée en robotique industrielle, médicale (pompe à sang, dialyse, respirateurs) en informatique (rotation de disque de stockage), militaire (chargeurs automatiques de munitions, tourelles). La géométrie très plate de ce moteur est appréciée pour les climatiseurs, essuie-glaces d'automobiles, ventilateurs, motorisation des bicyclettes, chaises roulantes.

Dans la pratique, le développement des moteurs à entrefer plan a été longtemps freiné du fait de la nécessité d'un champ magnétique intense, entrefer suffisant pour permettre la rotation et des difficultés d'évacuation des pertes joules. À l'heure actuelle, il est possible de créer des champs magnétiques intenses à l'aide d'aimants permanents (pas de pertes Joule dues à l'excitation).

## 2 Application : étude d'un haut-parleur

### a) Présentation

Un haut-parleur est généralement constitué d'une bobine qui entoure le pôle Nord d'un aimant. Le pôle sud de l'aimant est réparti tout autour du bobinage de telle sorte à ce que le champ magnétique soit partout orthogonal au fil. La bobine est reliée d'un côté à un ressort qui tend à la ramener vers une position d'équilibre et de l'autre à une membrane qui permet de mettre en mouvement l'air et donc d'émettre une onde sonore.

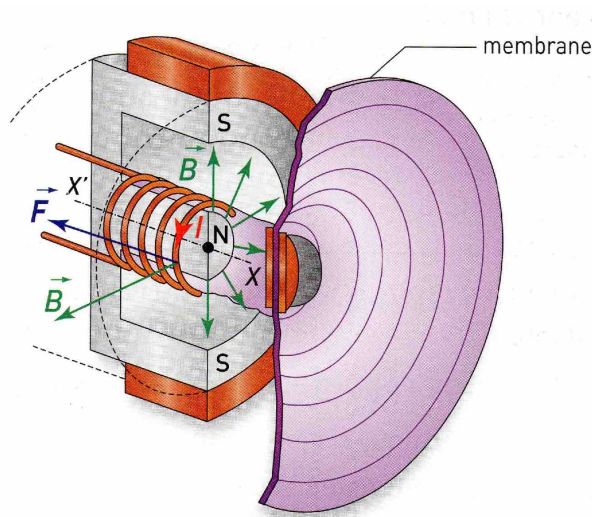


Figure 4.8 – Coupe de principe d'un haut-parleur : la membrane est solidaire d'une bobine qui coulisse (sous l'action des forces de Laplace) dans l'entrefer d'un aimant permanent. Les vibrations de la membrane entraînent des vibrations de l'air qui permettent de reproduire les sons préalablement enregistrés.

Un générateur électrique permet de faire circuler un courant dans la bobine. Lorsque le courant circule, la bobine est soumise à des forces de Laplace qui sont partout dans la même direction puisque que le champ magnétique est radial et le courant est orthoradial. En inversant le sens du courant, on inverse le sens de la force ce qui permet de faire osciller la membrane à la fréquence souhaitée, et donc d'émettre l'onde sonore souhaitée.

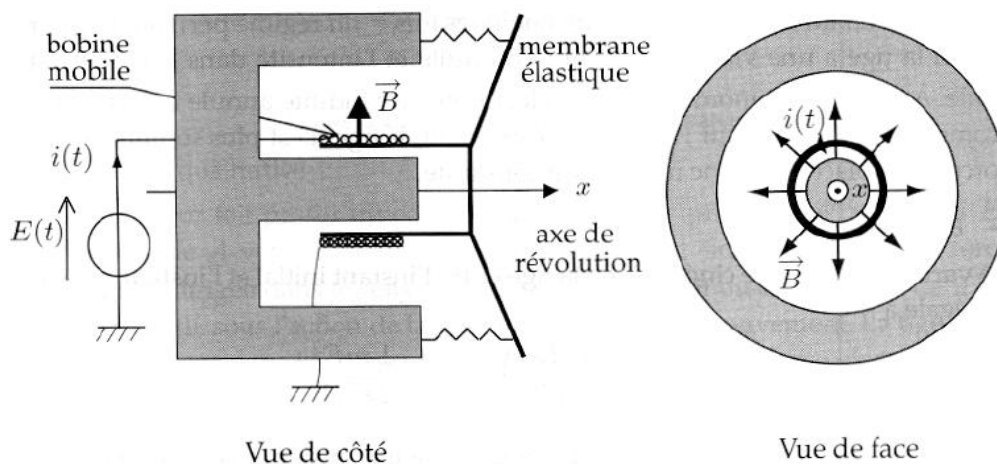


Figure 4.9 – Vue de profil (à gauche) et vue de face (à droite) d'un haut-parleur.

### b) Modélisation en tant que rails de Laplace

La géométrie à révolution cylindrique ne permet pas le calcul de la force électromotrice avec les théorèmes que nous avons à notre disposition cette année, nous allons donc utiliser une modélisation équivalente plus simple à mettre en équation : un rail de Laplace (la bobine) rattaché à un ressort et à une membrane (cf. figure 4.10).

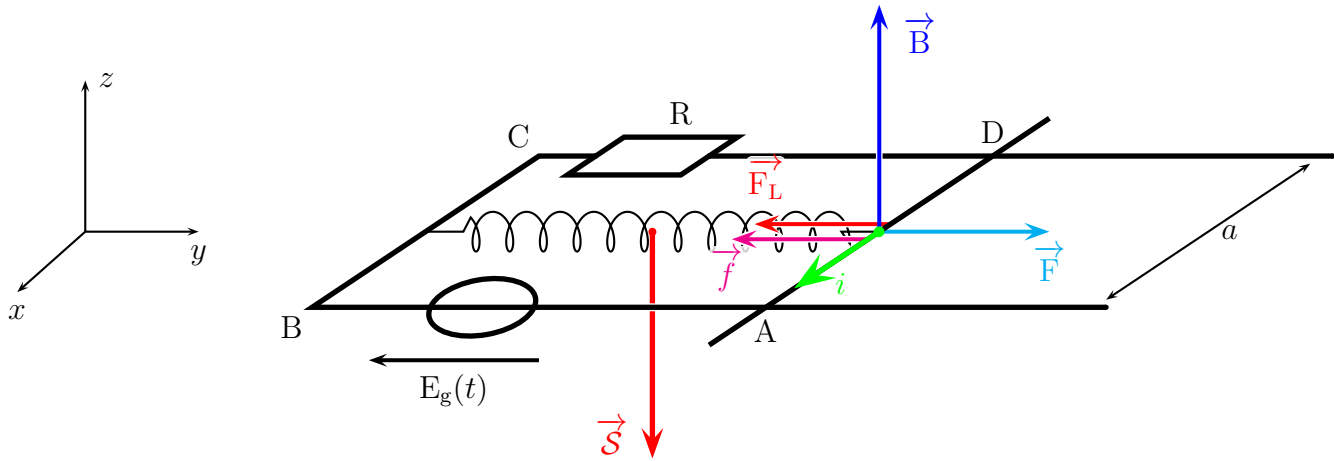


FIGURE 4.10 – Modélisation du haut-parleur comme un rail de Laplace attaché à un ressort. Le schéma est fait alors que le ressort est comprimé et que le mouvement se fait vers la droite.

**c) Équation électrique**

On oriente le système comme indiqué sur le schéma de la figure 4.10 dans le sens ABCD. Ainsi, le vecteur surface s'écrit  $\vec{\mathcal{S}} = -\mathcal{S} \vec{e}_z = -(\mathcal{S}_0 + ay) \vec{e}_z$  en notant  $y$  la position de la barre par rapport à la position où le ressort est à sa longueur à vide. Le flux du champ extérieur au travers de ce circuit s'écrit alors

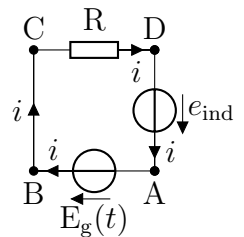
$$\Phi_{\text{ext}}(t) = \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{S}} = -B(\mathcal{S}_0 + ay)$$

et la f.é.m. induite

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt} - \frac{d\Phi_p}{dt} = Ba \frac{dy}{dt} - L \frac{di}{dt}$$

L'équation électrique se déduit du circuit équivalent qui est tel que

$$E_g(t) + e_{\text{ind}}(t) = Ri(t) \quad \text{soit} \quad E_g(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} - Ba \frac{dy}{dt}$$



**d) Équation mécanique**

**Système :** le rail de masse  $m$

**Référentiel :** laboratoire

On rappelle qu'on a choisi l'origine du repère ( $y = 0$ ) à la position d'équilibre du ressort.

**Bilan des efforts extérieurs :**

- Le poids  $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$
- La réaction normale du support  $\vec{R} = R_N \vec{e}_z$
- La force de rappel du ressort  $\vec{F} = -ky \vec{e}_y$
- La force de Laplace  $\vec{F}_L = -i(t) aB \vec{e}_y$
- La force de frottement avec l'air due à la membrane (non représentée)  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$

Le théorème du centre de masse appliqué à la tige et en projection sur  $\vec{e}_y$  donne alors

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - i(t) aB - \lambda \frac{dy}{dt}$$

### e) Bilan énergétique

**Couplage électromécanique parfait** Comme d'habitude, la puissance des forces de Laplace et la puissance de la f.é.m. induite par le champ extérieur sont opposées

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) = \vec{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{v} = -Ba i(t) \times \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{f.é.m.,ext}}(t) = e_{\text{ind,ext}}(t) i(t) = Ba \frac{dy}{dt} \times i(t)$$

On retrouve bien

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) + \mathcal{P}_{\text{f.é.m.,ext}} = 0}$$

**Bilan de puissance** On multiplie l'équation électrique par  $i(t)$  et l'équation mécanique par  $v(t) = \frac{dy}{dt}$  pour obtenir des égalité entre puissances instantanées

$$E_g(t) i(t) = R i^2(t) + L i \frac{di}{dt} - Ba \frac{dy}{dt} i(t) \quad \text{et} \quad m \frac{dv}{dt} v = -k y \frac{dy}{dt} - i a B \frac{dy}{dt} - \lambda v^2(t)$$

En se débarrassant du terme commun entre ces deux équation et en rassemblant les expressions qui correspondent à des dérivées, il vient

$$\boxed{E_g(t) i(t) = R i^2(t) + \lambda v^2(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2(t) + \frac{1}{2} k y^2(t) + \frac{1}{2} m v^2(t) \right)}$$

Ainsi l'énergie fournie par le générateur est convertie en

- énergie dissipée dans R par effet Joule;
- énergie de l'onde sonore;
- énergie magnétique emmagasinée dans le champ propre de la bobine;
- énergie cinétique de déplacement des parties mobiles;
- énergie potentielle élastique stockée dans le ressort.

Si l'on fait une moyenne<sup>3</sup> des puissances instantanées pour un régime périodique de période T on obtient

$$\boxed{\langle E_g i \rangle = \langle R i^2 \rangle + \langle \lambda v^2 \rangle}$$

En moyenne l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule et convertie en énergie sonore.

### f) Cas du régime sinusoïdal permanent – impédance motionnelle

**Mise en équation** Supposons que le générateur fournisse une tension du type  $E_g(t) = E_0 \cos \omega t$ . Passons en complexes en utilisant les variables  $\underline{i}$  et  $\underline{v}$ . Les équations électriques et mécaniques deviennent alors

$$\underline{E}_g = (R + jL\omega) \underline{i} - Ba \underline{v} \quad \text{et} \quad mj\omega \underline{v} = -k \frac{\underline{v}}{j\omega} - aB \underline{i} - \lambda \underline{v}$$

La seconde équation permet d'extraire  $\underline{v} = \frac{-aB}{\lambda + mj\omega + \frac{k}{j\omega}} \underline{i}$

d'où 
$$\underline{E}_g = \left( R + jL\omega + \frac{(aB)^2}{\lambda + mj\omega + \frac{k}{j\omega}} \right) \underline{i} = \left( \overbrace{R + jL\omega}^{Z_{\text{élec}}} + \overbrace{\frac{1}{\frac{\lambda}{(aB)^2} + \frac{m}{(aB)^2 j\omega} + \frac{k}{(aB)^2 j\omega}}^{Z_m}} \right) \underline{i}$$

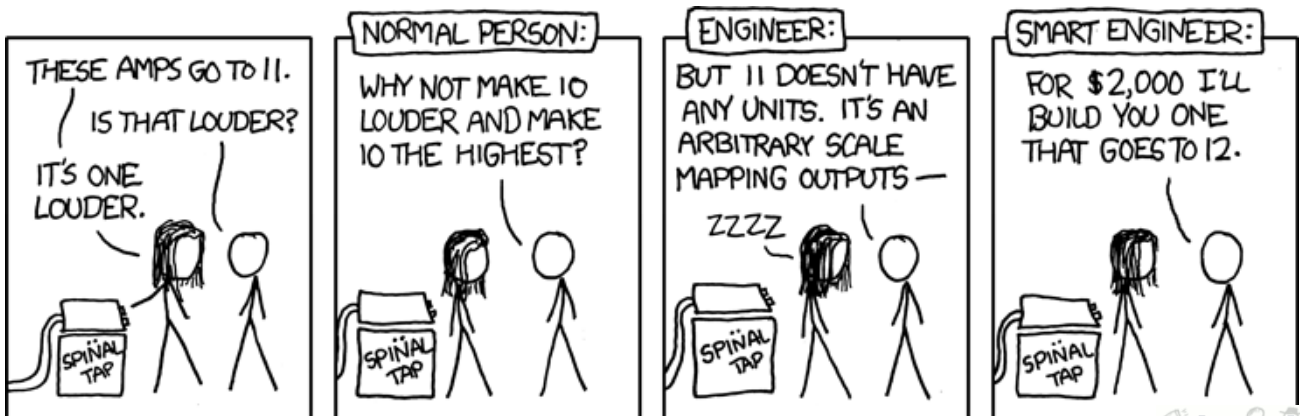
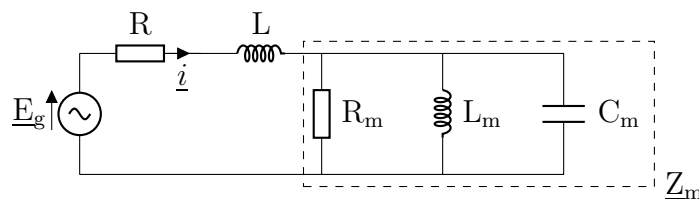
3. Si  $f$  est une fonction périodique de période T, alors  $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{1}{T} [f(t)]_0^T = 0$

**Impédance motionnelle** Cette grosse expression est plus simple qu'elle n'en a l'air. En effet, le terme  $Z_{elec}$  correspond simplement à l'impédance du circuit électrique « normal » dans le haut-parleur. Quand à  $Z_m$  que l'on nomme « impédance motionnelle », il est associé aux parties mobiles du circuit et on voit qu'on peut le modéliser comme un circuit électrique contenant un condensateur (terme en  $mj\omega/(aB)^2$ ), une bobine (terme en  $k/[(aB)^2j\omega]$ ) et une résistance (terme en  $\lambda/(aB)^2$ ) en parallèle les uns par rapport aux autres puisqu'on a

$$\underline{Y}_m = \frac{\lambda}{(aB)^2} + \frac{m}{(aB)^2}j\omega + \frac{k}{(aB)^2j\omega} = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$$

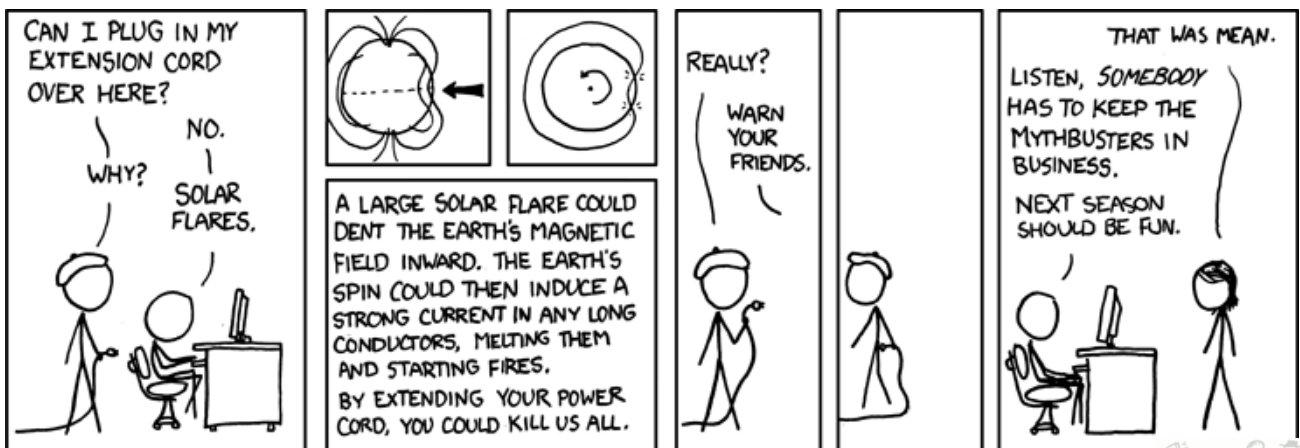
**Conclusions** La résistance représente la dissipation d'énergie par frottement visqueux. L'inductance est associée à la constante de raideur  $k$  et donc à l'élasticité du système. La capacité est associée à l'inertie.

Ainsi l'énergie emmagasinée sous forme élastique et cinétique se présente dans un schéma électrique équivalent sous forme magnétique et électrique. Le schéma équivalent est un circuit RLC parallèle



xkcd.com

Wow, that's less than \$200 per ... uh ... that's a good deal!



xkcd.com

The MythBusters need to tackle whether a black hole from the LHC could REALLY destroy the world.

**CORRECTION 1** Rails de Laplace avec force constante

L'équation électrique est la même que pour le cas traité dans le cours : le mouvement du barreau va induire une modification de la surface donc une modification du flux qui induit une f.é.m. orientée dans le sens choisi pour le courant. On a à nouveau

$$Ri(t) = Ba v_x(t)$$

Dans l'équation mécanique, il se rajoute à la force de Laplace (la même que précédemment) la force constante  $F_0$  dans la projection de la RFD suivant  $\vec{e}_x$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -iaB + F_0$$

En substituant l'expression de  $i$  obtenue dans l'équation électrique, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau} v_x = \frac{F_0}{m} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$$

soit

$$v_x(t) = \frac{F_0 R}{a^2 B^2} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{F_0}{aB} (1 - e^{-t/\tau})$$

Le courant grandit (avec la vitesse) jusqu'à tant que la force de Laplace compense parfaitement la force  $F_0$  exercée. Le mouvement est alors rectiligne uniforme. La force de Laplace s'apparente ici à une force de type frottement fluide.

**CORRECTION 2** Analyse énergétique des rails avec force constante

Comme la force de Laplace vaut toujours  $-iaB\vec{e}_x$  et la f.é.m.  $Ba v_x$ , on a toujours un couplage électromécanique parfait à tout instant :

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}}(t) + \mathcal{P}_{\text{f.é.m.}}(t) = F_{\text{Lap}} v_x + e(t) i(t) = -iaB v_x + Bav_x i = 0$$

Appliquons le théorème de la puissance cinétique au système où les seules puissances non nulles sont celles de  $F_0$  et de la force de Laplace

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{F_0} + \mathcal{P}_{\text{Lap}} = \mathcal{P}_{F_0} - \mathcal{P}_{\text{f.é.m.}} = F_0 v_x - e i \quad \text{soit} \quad F_0 v_x = \frac{dE_c}{dt} + e i$$

On en déduit que la puissance mécanique  $F_0 v_x$  fournie par l'opérateur sert d'une part à augmenter l'énergie cinétique du système (terme en  $\frac{dE_c}{dt}$ ) et d'autre part à alimenter le circuit électrique (terme en  $e i$ ).

**CORRECTION 3** Spire en rotation avec auto-inductance non négligeable, équation électrique

Si on ne néglige plus le coefficient  $L$  d'auto-induction de la spire, la f.é.m. induite possède un terme supplémentaire d'auto-induction

$$e_{\text{ind}}(t) = e_{\text{ind,ext}}(t) + e_{\text{ind,p}}(t) = -B ab \omega \cos \omega t - L \frac{di}{dt}$$

L'équation électrique s'écrit toujours  $e_{\text{ind}}(t) - r i(t) = R i(t)$

mais maintenant  $e_{\text{ind}}$  dépend aussi de  $i$  de sorte qu'on a une équation différentielle en  $i(t)$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i(t) = -B ab \omega \cos \omega t$$

**CORRECTION 4** Spire en rotation avec auto-inductance non négligeable, analyse énergétique

La prise en compte de l'auto-induction a montré précédemment (voir exercice 3) que

$$e_{\text{ind}}(t) = -B ab \omega \cos \omega t - L \frac{di}{dt}$$

On a donc  $\mathcal{P}_{\text{f.é.m.}}(t) = e_{\text{ind}}(t) i(t) = -B i ab \omega \cos \omega t - L \frac{di}{dt} i = -\mathcal{P}_{\text{Lap}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right)$

Le couplage n'est plus parfait si on considère l'ensemble de la f.é.m. induite (il l'est si on ne considère que la contribution extérieure). Comme en outre, on a  $e_{\text{ind}} = (r + R) i$ , on trouve que

$$-\mathcal{P}_{\text{Lap}} = (R + r) i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right)$$

Ainsi, de façon instantanée, toute la puissance fournie par l'opérateur n'est pas transmise à la résistance. Par contre, si on intègre sur une période, comme

$$\int_t^{t+T} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) dt = \left[ \frac{1}{2} L i^2 \right]_t^{t+T} = 0$$

toute l'énergie d'origine mécanique fournie à la spire par le dispositif extérieur est bien dissipée par effet Joule dans le circuit électrique.

**CORRECTION 5** Calcul du couple par sommation de couples élémentaires

Le couple élémentaire en un point d'application  $M$  du rayon s'écrit  $d\vec{\Gamma}_1 = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{\text{Lap}} = r \vec{e}_r \wedge i dr B \vec{e}_\theta$ . Ainsi,

$$\vec{\Gamma}_1 = \int_0^P d\vec{\Gamma}_1 = \int_0^a i r B dr \vec{e}_z = \left[ \frac{i r^2 B}{2} \right]_0^a \vec{e}_z = i a B \times \frac{a}{2} \vec{e}_z$$

Il est intéressant de noter que les points qui sont loin de l'axe de rotation participe plus au couple que ceux qui sont près ce qui explique que sur la photo, on ne voit pas de circuit au centre.