# I3

# Loi de Faraday

Partie I

## Flux du champ magnétique au travers d'une surface délimitée par un contour fermé

Le flux d'un vecteur à travers une surface S nous renseigne sur la direction et la norme du champ vectoriel aux divers points de cette surface. Une étape préalable nécessaire consiste à orienter la surface.

### 1 Orientation d'une surface délimitée par un contour fermé (rappel)

Pour une surface plane, il suffit d'expliciter la direction d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ qui oriente la normale (synonyme de droite orthogonale) à cette surface délimitée par le contour $\mathscr{C}$. Le sens du vecteur surface $\overrightarrow{\mathscr{S}} = \mathscr{S}\,\overrightarrow{n}$ est donné par la règle de la main droite [1].

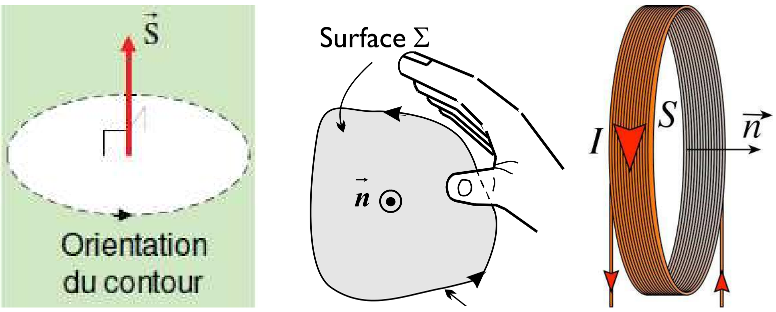
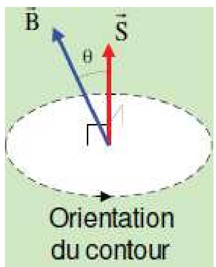



Figure 3.1 – La règle de la main droite (encore elle) permet de mettre en lien l'orientation du contour (autour duquel s'enroule la main droite) et la direction du vecteur surface (donnée par le pouce de ladite main). Pour ne pas se tromper, on oriente toujours le contour en suivant le sens conventionnel positif choisi pour le courant comme indiqué dans le schéma de droite.

### 2 Flux d'un champ uniforme au travers d'une spire

#### a) Circuit totalement plongé dans la zone de champ

Pour un circuit totalement plongé dans la zone de champ, le flux du champ magnétique à travers un circuit $\mathscr{C}$ fermé et préalablement orienté est défini par un produit scalaire



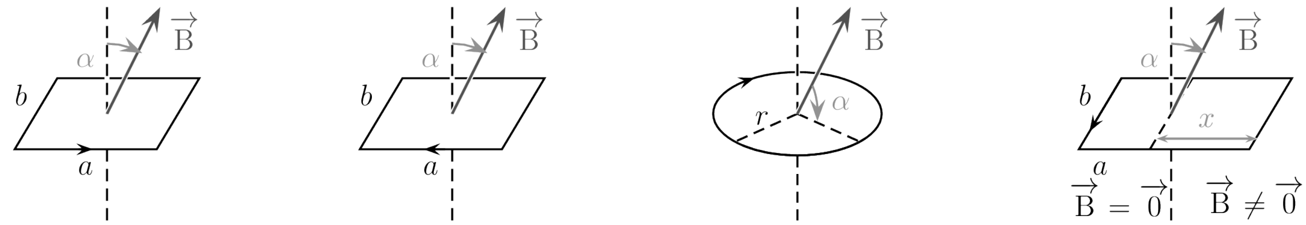

$$\boxed{\Phi_{\text{circuit}} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathscr{S}} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathscr{S} = B\mathscr{S}\cos\theta}$$

Sont à noter les propriétés suivantes

- L'unité SI de flux magnétique est le weber (Wb) avec $\mathscr{S}$ (section) en $m^2$ et B en Tesla
- Le flux est maximal quand le champ est perpendiculaire à la surface.
- Le flux est nul quand le champ est parallèle à la surface.

1. Encore elle...

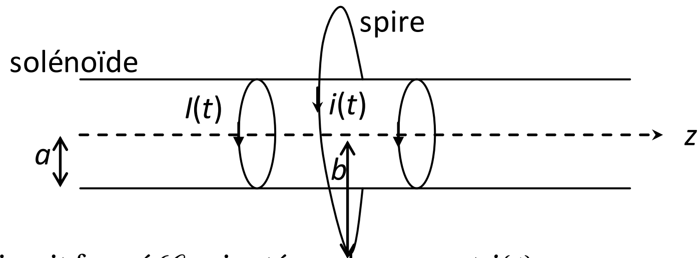
**EXERCICE 1** Déterminer le flux au travers de chaque circuit en suivant les orientations définies.




### b) Circuit partiellement plongé dans la zone de champ

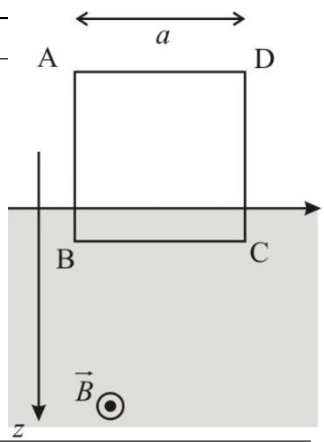
Bien entendu, pour un circuit partiellement plongé dans un champ magnétique, seule la partie du circuit dans le champ non nul est traversée par le champ.

**EXERCICE 2** Flux autour d'un solénoïde infini.




Un solénoïde d'axe O$z$ suffisamment long pour que les effets de bord soient négligeables, comporte $n$ spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité $I(t)$ croissante. Les spires de ce solénoïde sont circulaires de rayon $a$. Un circuit filiforme fermé $\mathscr{C}$ circulaire de rayon $b$ entoure ce solénoïde. Calculez le flux du champ magnétique créé par le solénoïde à travers le circuit fermé $\mathscr{C}$ orienté par le courant $i(t)$.

**EXERCICE 3** Circuit mobile dans champ uniforme par morceau




Un cadre rigide ABCD, carré de coté $a$, peut glisser sans frottements mécaniques selon l'axe O$z$. Dans le domaine $z > 0$, il règne un champ magnétique horizontal $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_y}$. Pour $z < 0$, B est nul. On note $t = 0$ l'instant où le segment BC atteint la position $z = 0$. On se place à $t > 0$, mais pas trop grand de sorte que le cadre reste partiellement immergé dans la zone de champ magnétique : le segment AD n'a pas atteint la cote $z = 0$. Exprimez le flux $\Phi(t)$.

## 3 Flux d'un champ uniforme à travers une bobine de N spires

Quand une bobine comporte N spires, il faut multiplier le flux $\Phi_{\text{spire}}$ à travers une spire par N pour obtenir le flux total

$$\boxed{\Phi_{\text{total}} = N\,\Phi_{\text{spire}}}$$

## 4 Flux d'un champ quelconque

Avant toute chose, il faut veiller à définir un sens positif arbitraire pour le circuit. Cette orientation d'une boucle fermée $\mathscr{C}$ entraîne celle de la normale $\overrightarrow{n}$ en un point d'une surface $\mathscr{S}$ délimitée par $\mathscr{C}$ suivant la règle de la main droite. L'orientation du circuit impose l'orientation de la surface $\mathscr{S}$. C'est une étape nécessaire pour définir le flux $\Phi$ à travers $\mathscr{S}$ qui s'appuie sur $\mathscr{C}$.

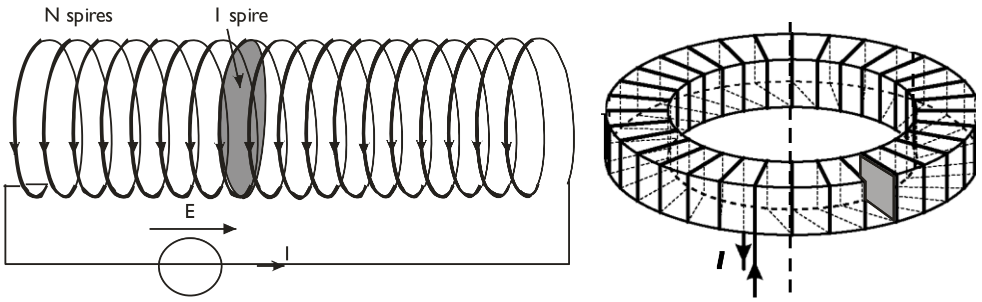



Figure 3.2 – Le caractère additif $\Phi_{\text{total}} = \text{N}\Phi_{\text{spire}}$ tient que le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à chaque spire soit le même (cas rectiligne à gauche) ou change le long du solénoïde (cas torique à droite).

Si la surface est courbe, on réalise un pavage fait de petites surfaces que l'on peut assimiler à des portions de plan. À chaque surface élémentaire d'aire $\mathscr{S}_{ij}$ centrée sur le point $\text{M}_{ij}$ est associée un vecteur normal $\overrightarrow{n_{ij}}$.

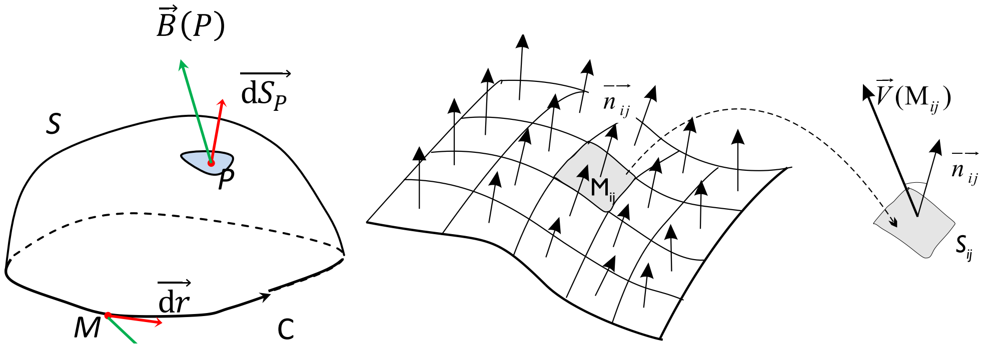



Figure 3.3 – Orientation d'une surface $\mathscr{S}$ quelconque appuyée sur un contour $\mathscr{C}$ orienté (à gauche) et maillage de la surface en portions quasi-planes (à droite) pour un calcul facile du flux.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ correspondant à deux cases adjacentes sont pratiquement colinéaires et de même sens si le pavage est assez fin. Si nous notons $\overrightarrow{\text{B}_{ij}}$ le champ vectoriel magnétique au point $\text{M}_{ij}$, le flux associé à un tel pavage est défini par la relation

$$\Phi = \sum_i \sum_j \overrightarrow{\text{B}_{ij}} \cdot (\mathscr{S}_{ij}\,\overrightarrow{n_{ij}})$$

La double sommation traduit la nécessité d'utiliser deux coordonnées pour repérer un point sur une surface. Si nous affinons le pavage de la surface en diminuant l'aire des surfaces élémentaires, cette somme discrète tend vers une limite que nous notons

$$\boxed{\Phi = \iint_{\text{Surface } \mathscr{S}} \overrightarrow{\text{B}} \cdot \text{d}\overrightarrow{\text{S}}}$$

qui représente le flux du champ $\overrightarrow{\text{B}}$ au travers de la surface $\mathscr{S}$.

## 5 Causes de variation du flux magnétique

Les différentes causes possibles de variation du flux magnétique se retrouvent dans l'expression explicitée du produit scalaire :

$$\Phi = \text{B}\mathscr{S}\cos\theta$$

— Variation de la norme B du champ magnétique.

— Variation de l'orientation relative $\theta$ des deux vecteurs.

— Variation de l'aire $\mathscr{S}$ de la surface : ceci est particulièrement à prendre en compte lorsque le circuit comporte une partie mobile plongée dans la zone de champ magnétique.

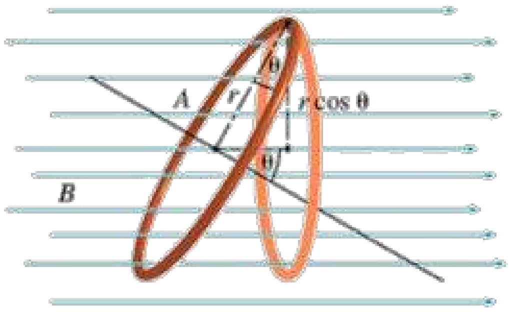



Figure 3.4 – Illustration de l'influence de l'inclinaison sur le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ : une surface inclinée est vue comme une surface normale au champ mais d'aire plus petite par un facteur $\cos\theta$.

Partie II

# Lois de Faraday et de Lenz

## 1 Expériences : courants induits

On peut réaliser diverses expériences mettant en évidence les loi de Faraday et Lenz que l'on va énoncer par la suite. En particulier, entrer et sortir un aimant d'une bobine branchée sur un oscilloscope met en évidence l'apparition d'une tension induite aux bornes de la bobine (et donc une variation de courant qui a été induite dans la bobine, voir figure 3.5). Le phénomène est le même que l'on laisse l'aimant immobile et que l'on rapproche la bobine, ou au contraire que ce soit l'aimant qui bouge vers la bobine (voir figure 3.6 et plus tard l'équivalence entre les inductions de Lorentz et de Neumann). La rotation de la bobine (figure 3.7) sans modification de distance montre qu'il doit y avoir une histoire de flux cachée derrière tout cela. Enfin, si l'on réfléchit un peu au sens du champ magnétique produit par le courant induit (cf exercice 4), on remarque qu'il essaie toujours de compenser[2] les variations du flux total au travers de la spire.

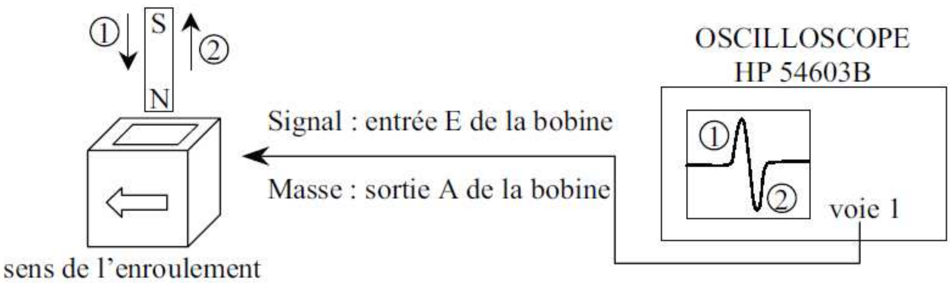



Figure 3.5 – Apparition d'une tension induite aux bornes d'une bobine lorsqu'on y insère un aimant. La tension n'apparaît que lorsque l'aimant bouge dans la bobine ou que la bobine bouge autour de l'aimant, mais pas si les deux restent immobiles.

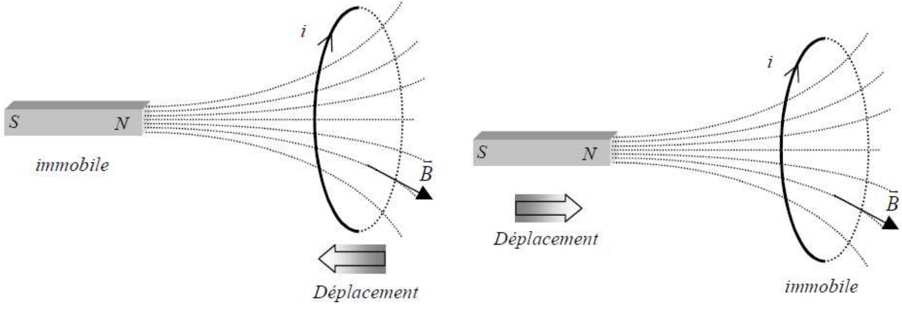



Figure 3.6 – Équivalence des deux situations « On approche une spire d'un aimant immobile » et « On approche un aimant d'une spire immobile » au niveau de la tension induite aux bornes de la spire.

2. mais sans jamais y arriver...

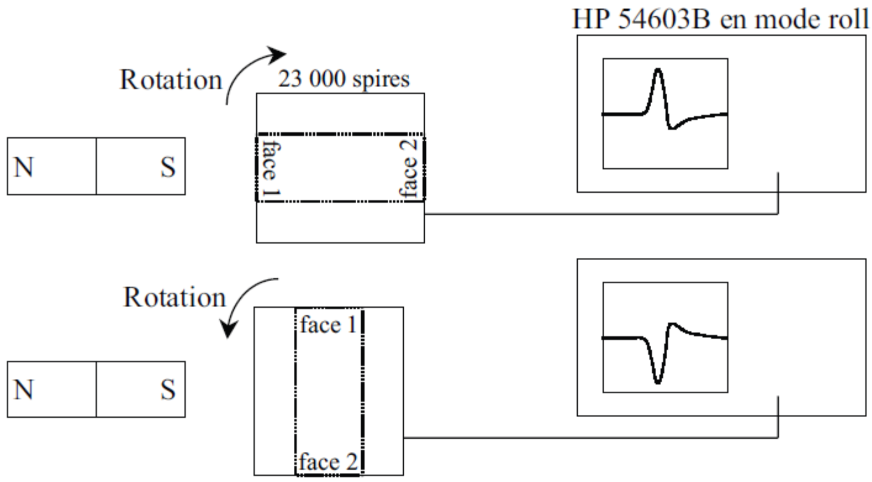
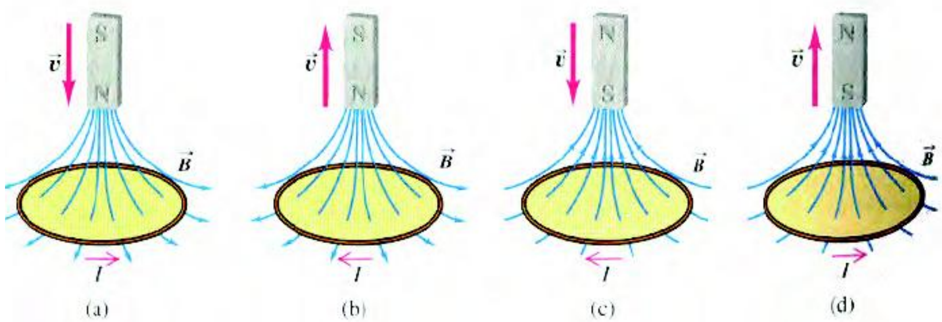



Figure 3.7 – La rotation de la bobine (plutôt que son déplacement) mène aussi à l'apparition de courant induits en son sein car le flux varie du fait de la variation d'orientation de la surface.

**EXERCICE 4** Montrer que le courant induit s'oppose à la variation du flux au travers de la spire.




## 2 Loi de Faraday : force électromotrice induite

### a) Énoncé

ń La force électromotrice induite dans un circuit fermé est proportionnelle au taux de variation du flux du champ magnétique traversant la surface délimitée par le circuit par rapport au temps ż

$$\boxed{e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{total}}}{\mathrm{d}t}}$$

Le signe négatif qui apparaît dans cette expression s'explique avec la loi de Lenz, qui sera introduite dans la section qui suit, à condition d'orienter le circuit en convention générateur (cf. figure 3.8).

L'utilisation de la formule de Faraday suppose que les paramètres décrivant le circuit soient à variations continues et n'est applicable que si l'on sait calculer le flux en tout point d'une surface qui s'appuie sur le circuit.

Si on considère une boucle conductrice constituée de N spires, on obtient

$$e_{\text{ind}} = -\mathrm{N}\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{spire}}}{\mathrm{d}t}$$

Dans cette expression, la quantité $\mathrm{N}\Phi_{\text{spire}}$ désigne le flux total à prendre en considération dans le calcul de la f.é.m., égale à la somme des flux $\Phi_{\text{spire}}$ à travers chacune des spires. Il convient également de signaler que la f.é.m. n'est pas confinée en un point particulier de l'espace. Elle se manifeste, associée à un champ électrique dont l'action est la création d'un courant induit dans les spires de la boucle conductrice.

### b) Divers cas d'induction

On peut développer l'expression de la f.é.m induite en utilisant l'expression du flux déterminée précédemment en nous limitant au cas d'un circuit complètement plongé dans une zone de champ magnétique où l'on

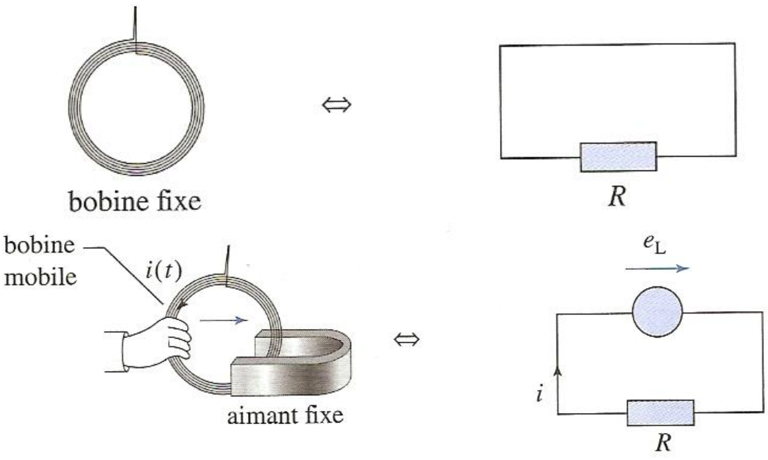



Figure 3.8 – Après orientation *a priori* du courant dans la bobine, la f.é.m. $e_L$ induite par la loi de Faraday doit être dirigée de sorte que l'on soit en convention générateur dans le circuit électrique.

avait

$$\Phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathscr{S}} = B\mathscr{S}\cos\theta$$

soit

$$\boxed{e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}\mathscr{S}\cos\theta - B\frac{d\mathscr{S}}{dt}\cos\theta - B\mathscr{S}\frac{d(\cos\theta)}{dt}}$$

Il convient d'interpréter les trois termes figurant dans l'expression de la f.é.m. $e_{\text{ind}}$ obtenue, chacun référant à un processus particulier. Il faut également souligner que plus d'un processus peut être en cause dans la variation du flux. Il faut alors les prendre en considération en les intégrant explicitement au calcul du flux. On peut donc distinguer :

**Cas de Neumann :** champ magnétique variable et circuit fixe

$$e_{\text{ind}} = -\frac{dB}{dt}\mathscr{S}\cos\theta$$

**Cas de Lorentz :** champ magnétique constant et circuit mobile (du moins en partie)

$$e_{\text{ind}} = -B\frac{d\mathscr{S}}{dt}\cos\theta - B\mathscr{S}\frac{d(\cos\theta)}{dt}$$

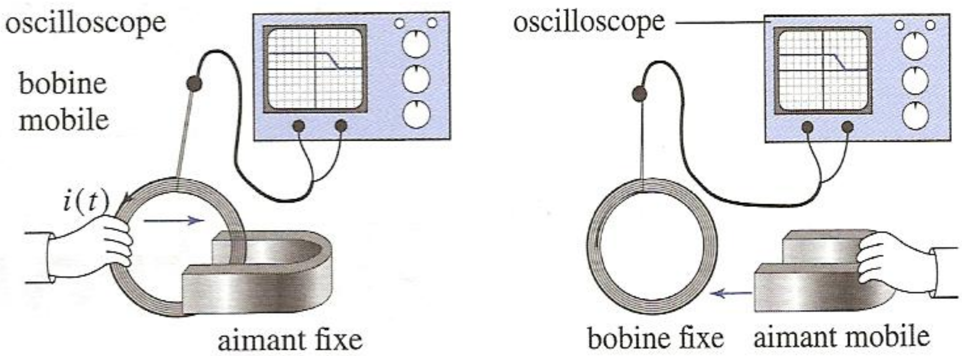



Figure 3.9 – L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes qui dépendent du point de vue de l'observateur.

## 3 Modélisation électrocinétique d'un circuit fermé

Un circuit orienté $\mathscr{C}$ de résistance R dont le flux magnétique varie dans le temps peut être remplacé par le circuit électrocinétique équivalent en respectant les règles suivantes :

- Le sens de calcul de la circulation est choisi par celui qui effectue le calcul.
- On prendra soin d'orienter la f.é.m. calculée dans le sens choisi pour le parcourt de $\mathscr{C}$ (cf. figure 3.10).
- Si le conducteur (fermé pour l'instant) obéit à la loi d'Ohm, on a $e = \mathrm{R}i$, ce qui permet de calculer la valeur du courant $i$ induit.
- En présence d'autres sources idéales de tension, il faut ajouter les diverses forces électromotrices en prenant garde à l'orientation choisie pour le circuit.

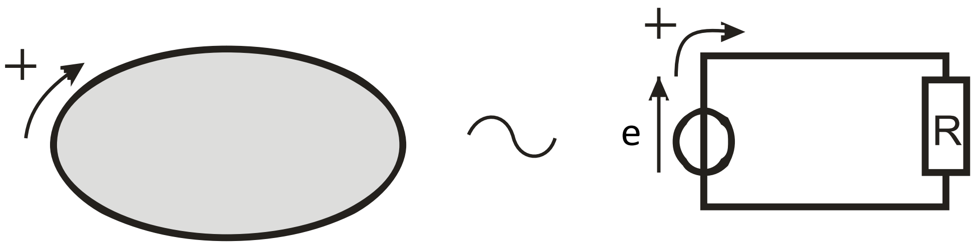



Figure 3.10 – L'expression $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ n'est valable que si l'on pense toujours à bien orienter la f.é.m. dans le sens d'orientation du circuit qui a servi pour définir le signe du flux $\Phi$.

## 4 Tension aux bornes d'un circuit ouvert

Considérons un circuit ouvert filiforme $\mathscr{C}$. En régime variable, un courant électrique peut circuler dans ce conducteur. Des charges de signe opposé peuvent s'accumuler sur les extrémités libres N et M par un effet capacitif. On peut aborder cette situation en imaginant qu'une résistance $\mathrm{R_{ext}} \gg \mathrm{R_{circuit}}$ quasi infinie relie les deux points N et M en fermant ainsi le circuit de manière virtuelle. La relation de Faraday appliquée à cette boucle fermée permet ainsi de définir la tension entre deux points N et M situés sur les extrémités libres du circuit. La tension aux bornes du circuit est alors donnée par

$$\boxed{\mathrm{V_N} - \mathrm{V_M} = e_{\mathrm{ind}}}$$

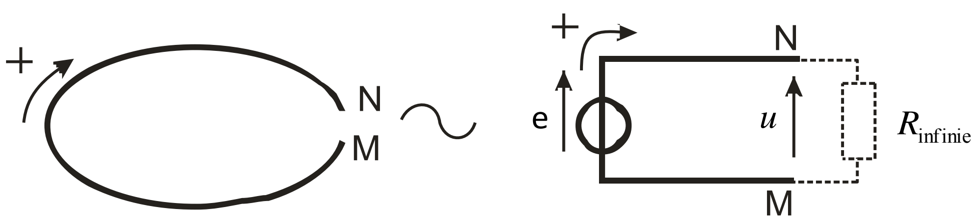


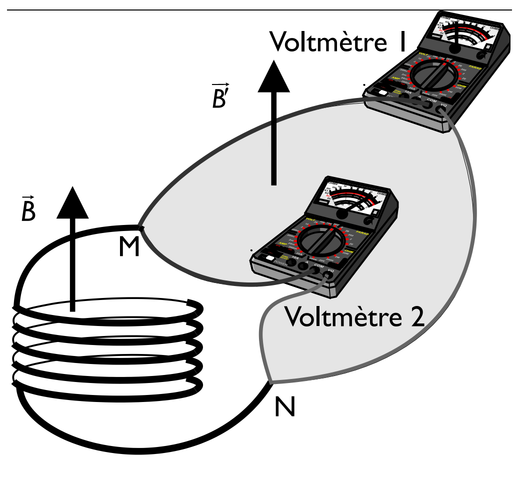

Figure 3.11 – Pour modéliser un circuit ouvert, il suffit de s'imaginer qu'il possède une résistance infinie pour obtenir la tension aux bornes de l'ouverture.

### Pour aller plus loin

Deux voltmètres placés entre les mêmes points peuvent donner dans certains cas des indications différentes. En effet, la circulation du champ électrique n'est pas la même dans les deux branches si un champ magnétique B′ règne dans la zone des appareils de mesure :

$$e_{\mathrm{ind,chemin1}} - e_{\mathrm{ind,chemin2}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}t}$$

Dans une situation d'auto induction, le champ magnétique est pratiquement localisé dans le volume intérieur de la bobine. Il n'y aura donc pas de différence entre les deux mesures. Dans ce contexte, on peut parler de tension induite aux bornes d'une bobine.



## 5 Loi de modération de Lenz

### a) Énoncé

Pour un circuit fermé on a $e = \mathrm{R}i$ et donc $i = -\dfrac{1}{\mathrm{R}}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

On constate donc qu'une augmentation du flux à travers le circuit ($\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} > 0$) entraîne l'apparition d'une f.é.m. négative, c'est-à-dire tendant à faire circuler un courant négatif. Ce courant créé alors lui-même un champ magnétique dont le flux s'oppose à l'augmentation de flux que l'on impose. Ce résultat est connu sous le nom de loi de LENZ. Il est évidemment indépendant du système de convention adopté. La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué. Elle peut s'énoncer comme suit

Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur.

ou encore

La f.é.m. induite tend par ses conséquences à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

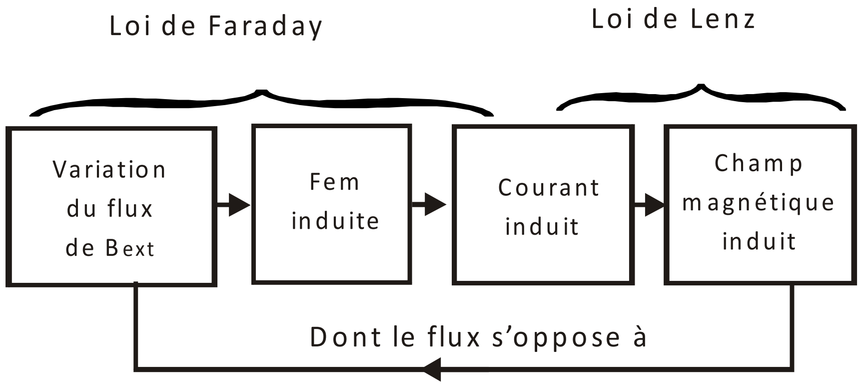
**Conventions de signe** La détermination du sens du courant induit se fait de la façon suivante :

1. On se choisit arbitrairement un sens de circulation le long du circuit.
2. Ce sens définit une normale au circuit grâce à la règle de la main droite.
3. Le signe du flux est alors déterminé en faisant le produit scalaire du champ magnétique par cette normale.
4. En utilisant ensuite la loi de Faraday, on obtient la valeur et le signe de la f.é.m..
5. Enfin, le courant est obtenu à partir de la loi d'Ohm (son signe peut aussi être directement connu en utilisant la loi de Lenz).

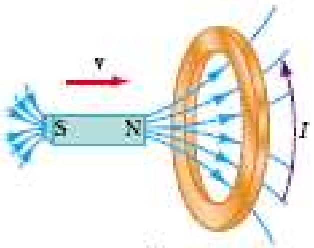
**Aspect énergétique** En 1851, Von Helmholtz fit remarquer que cette loi est en fait une conséquence de la loi de la conservation de l'énergie. De fait, si le champ magnétique induit venait renforcer le champ extérieur, il entraînerait une augmentation du courant induit qui à son tour viendrait augmenter le champ induit, augmentant ainsi le courant induit et ainsi de suite. Il est clair que cette escalade est impossible au plan énergétique. On verra plus loin qu'il faut transformer de l'énergie mécanique pour produire de l'énergie électrique.

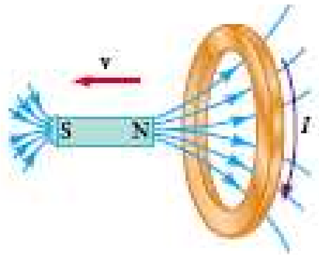
### b) Applications

**Cas d'un circuit fixe avec un champ variable dans le temps.**
Il faut raisonner sur le champ magnétique créé par le circuit induit qui est opposé à la variation de champ magnétique créé par le circuit inducteur.

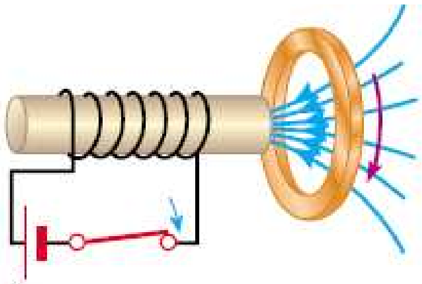


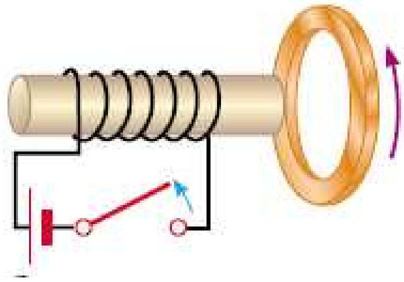
**EXERCICE 5** Interpréter le sens du courant induit dans les deux cas



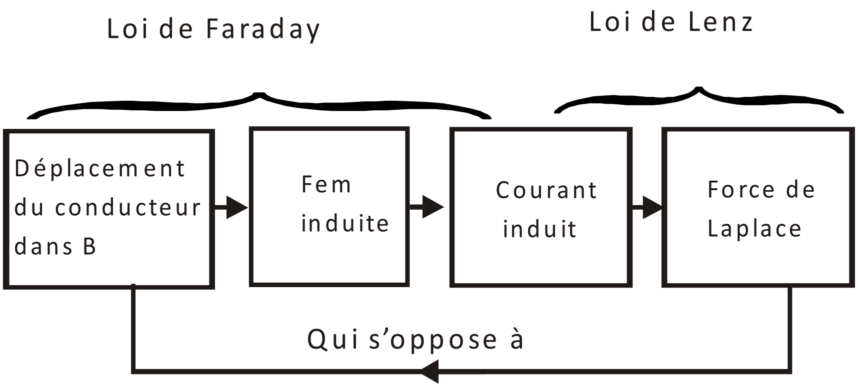




**EXERCICE 6** Interpréter le sens du courant induit quand on ferme ou ouvre l'interrupteur

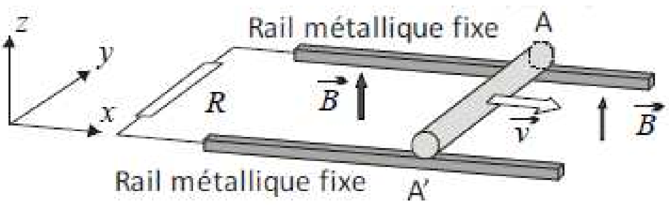


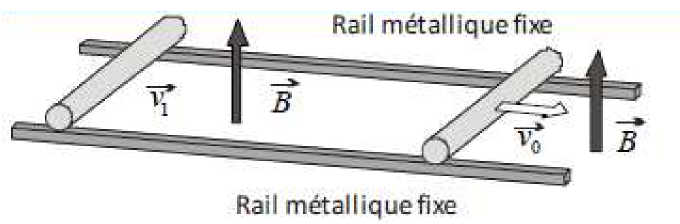



**Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire** Dans cas il faut raisonner sur la force de Laplace sachant que cette force s'oppose à la force imposée par l'opérateur pour déplacer la portion de circuit.

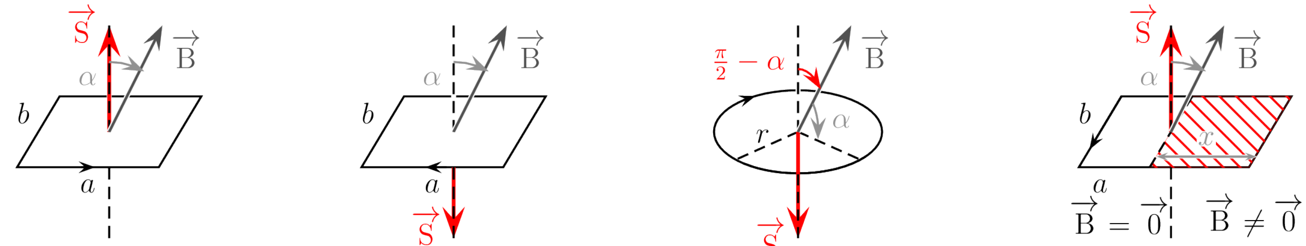



**EXERCICE 7** Décrire ce qui arrive à chaque barreau mobile dans les deux exemples suivants



## CORRECTION 1 Différents petits calculs de flux




$\Phi = +ab\mathrm{B}\cos\alpha$ $\Phi = -ab\mathrm{B}\cos\alpha$ $\Phi = -\pi r^2\mathrm{B}\sin\alpha$ $\Phi = xb\mathrm{B}\cos\alpha$

## CORRECTION 2 Flux autour d'un solénoïde infini.

Le solénoïde, suffisamment grand pour être supposé infini, produit en son sein un champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0 n \mathrm{I}\,\overrightarrow{e_z}$ d'après l'orientation choisie. Seule une surface $\pi a^2$ de la spire étudiée est traversée par un champ non nul (et perpendiculaire à la surface), de sorte que le flux s'écrive

$$\boxed{\Phi = \pi a^2\,\mu_0 n \mathrm{I}}$$

## CORRECTION 3 Circuit mobile dans champ uniforme par morceau

Seule la surface $z \times a$ est plongé dans la zone ② où le champ magnétique est non nul. Si on oriente la surface dans le sens ABCD, le vecteur surface associé s'écrit

$$\overrightarrow{\mathscr{S}_2} = za\,\overrightarrow{e_y}$$

de sorte que

$$\boxed{\Phi(t) = \overrightarrow{\mathscr{S}_1}\cdot\overrightarrow{0} + \overrightarrow{\mathscr{S}_2}\cdot\mathrm{B}\,\overrightarrow{e_y} = za\mathrm{B}}$$

## CORRECTION 4 Avant-goût de la loi de Lenz

**1er cas :** la norme du champ magnétique augmente vers le bas (car les lignes de champ se resserrent). Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique vers le haut pour compenser l'augmentation de la norme due au mouvement vers le bas.

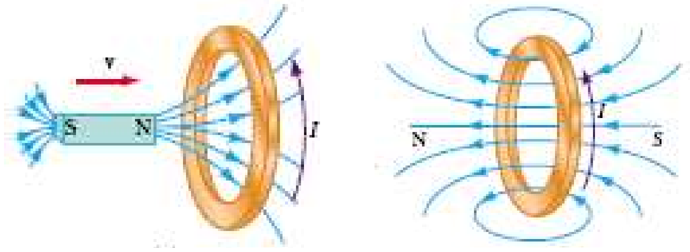
**2e cas :** la norme du champ magnétique diminue vers la bas (car les lignes de champ se desserrent). Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique vers le bas pour compenser cette diminution de la norme due au mouvement vers le haut.

**3e cas :** la norme du champ magnétique augmente vers le haut (car les lignes de champ se resserrent). Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique vers le bas pour compenser l'augmentation de la norme due au mouvement vers le bas du pôle Sud.

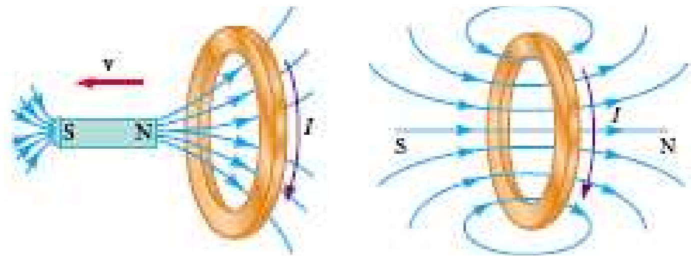
**4e cas :** la norme du champ magnétique diminue vers le haut (car les lignes de champ se desserrent). Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique vers le haut pour compenser la diminution de la norme due au mouvement vers le haut du pôle Sud.

**Correction 5** Déplacement des sources par rapport au circuit

Lorsqu'on approche un aimant par le pôle nord magnétique, le courant induit dans la spire créé un « pôle Nord » fictif du coté de l'aimant, ce qui tente de le repousser.

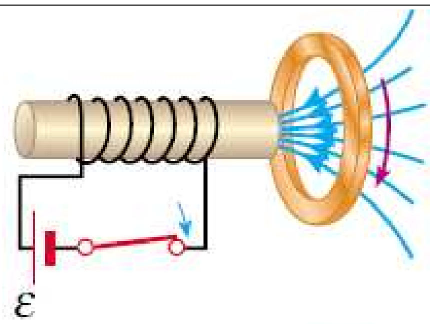



Lorsqu'on éloigne un aimant par le pôle nord magnétique, le courant induit dans la spire créé un « pôle Sud » fictif du coté de l'aimant qui tente de le retenir.

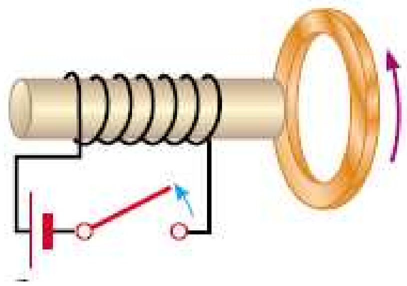



**Correction 6** Fermeture et ouverture d'interrupteur

En fermant l'interrupteur, on fait passer un courant inducteur dans la bobine. Celle-ci créé un champ magnétique variable près de la spire. Le courant induit qui circule dans la spire va ensuite créer un champ magnétique de sens opposé au champ de la bobine afin de limiter l'augmentation de champ.




En ouvrant l'interrupteur, le courant inducteur dans la bobine diminue. Il en est de même du champ magnétique près de la spire. Le courant induit qui circule dans la spire va créer un champ magnétique de même que le champ de la bobine afin d'amoindrir la baisse du champ.



**Correction 7** Rails de Laplace

**Barreau unique** La force de Laplace à laquelle sera soumis le barreau du fait du courant induit est telle qu'elle est dirigée dans le sens opposé à son mouvement initial. La force de Laplace freine le barreau mobile.

**Deux barreaux** La force de Laplace freine le barreau de droite dont on impose le mouvement par action de l'opérateur. Mais la force de Laplace qui s'exerce sur le barreau de gauche est motrice. Il faut donc veiller à raisonner sur la partie mobile qui subit des actions imposées par l'opérateur : la loi de Lenz impose que les modifications de la surface soient minimisées à la fois en freinant le premier barreau et en accélérant le second afin qu'il suive le premier.