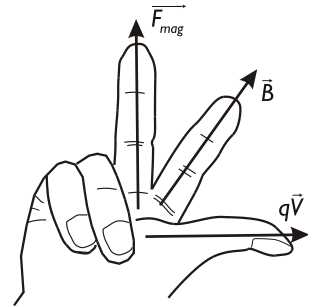


Force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme

1 Force de Lorentz (rappel)

Soit une particule M de charge q , en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel \mathcal{R} , où règnent un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} . Cette particule, au point M, est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F}_{\mathcal{L}} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$



La force magnétique est perpendiculaire à la fois à la vitesse \vec{v} de la charge et au champ magnétique \vec{B} .

À noter que, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, le déplacement de particules chargées crée un champ magnétique, mais que celui-ci n'est pas à prendre en compte pour son propre déplacement, ce serait comme dire que le Soleil se déplace sous l'effet de l'attraction gravitationnelle... du Soleil.

2 Expérience du rail de Laplace

Description Une barre conductrice repose sur deux rails (dits rails de Laplace). Les rails sont branchés aux bornes d'un générateur de tension continue supposé parfait. L'ensemble baigne dans un champ magnétique \vec{B} extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal à la barre.

À la mise sous tension, la barre, parcourue par un courant d'intensité i , se met en mouvement. Elle est donc soumise à une force. C'est la force de Laplace.

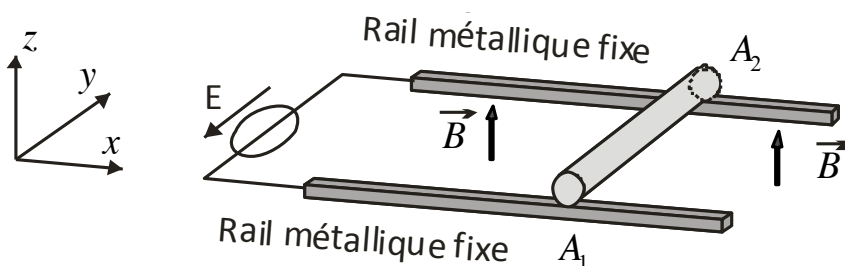
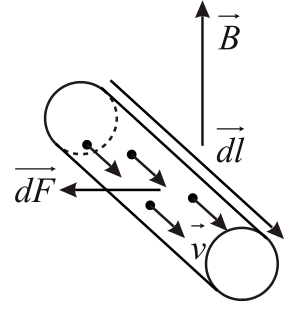


Figure 2.1 – Expérience du rail de Laplace : la mise sous tension du système provoque le déplacement de la barre sur rails.

Interprétation Considérons un élément de conducteur filiforme $d\vec{\ell}$, de section droite s . Supposons pour simplifier qu'il contient n charges mobiles q par unité de volume et que chaque particule soit animée de la même vitesse \vec{v} (dans le référentiel de la barre) colinéaire à $d\vec{\ell}$.

L'ensemble des $nsd\ell$ charges mobiles de l'élément conducteur est soumis à la force $d\vec{F}$. Cette force élémentaire s'écrit

$$d\vec{F} = \overbrace{nsd\ell}^{\text{Nombre de particules}} \times \underbrace{(q\vec{v} \wedge \vec{B})}_{\text{Force sur une particule}} = qns\vec{v} d\ell \wedge \vec{B} = \overbrace{qns\vec{v}}^{\text{courant } i} d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$



puisque l'on a vu dans les chapitres d'électricité que le courant revenait à compter le nombre de porteur de charge traversant une surface s par unité de temps et à le multiplier par la charge q de chaque porteur. On peut donc retenir

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Attention!

La force de Laplace dérivant directement de l'expression de la force de Lorentz, le champ \vec{B} qui y est indiqué est bien entendu à prendre au sens « champ extérieur », c'est-à-dire le champ imposé par des éléments extérieurs mais non pas créé par l'élément de fil lui-même.

3 Force de Laplace

La direction de cette force est perpendiculaire au conducteur. Or les porteurs de charges mobiles ne peuvent sortir du conducteur; ils sont en interaction avec les autres charges fixes qui composent la structure cristalline du conducteur. Les charges mobiles ne peuvent donc se déplacer que longitudinalement compte tenu de la géométrie du conducteur, ce qui signifie qu'une force transverse qui s'exerce sur les charges mobiles voit ses effets contrariés.

En régime permanent, les charges fixes exercent sur les charges mobiles une force opposée $-d\vec{F}$ et les charges mobiles en vertu du principe de l'action et de la réaction exercent sur les charges fixes une force $d\vec{F}$. Ainsi toute portion de conducteur, parcourue par un courant, et placée dans un champ magnétique, est soumise à une force transverse dite force de Laplace et dont l'expression est donnée par : $d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$, soit sur l'ensemble d'un conducteur filiforme rectiligne A_1A_2 ,

$$\vec{F} = \int_{A_1}^{A_2} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \left(\int_{A_1}^{A_2} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = i \times \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{B}$$

Pour ne pas générer des erreurs de signe dans l'usage de cette expression, il faut respecter les points suivants :

1. Le circuit complet est préalablement orienté. L'intensité est donc une grandeur algébrique.
2. Le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ sur une portion de ce circuit ne dépend pas de l'orientation choisie a priori mais s'exprime dans la base locale

$$d\vec{\ell} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \quad \text{en cartésiennes}$$

$$d\vec{\ell} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \quad \text{en cylindriques}$$

$$d\vec{\ell} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \quad \text{en sphériques}$$

3. Les bornes d'intégration sont placées en suivant l'ordre indiqué par l'orientation préalable.
4. Il peut être utile de vérifier a posteriori la pertinence de vos calculs, une fois que le signe de l'intensité est connu.

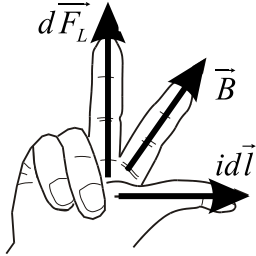


Figure 2.2 – Toujours la règle de la main droite : pour un test rapide « à la main », on place le pouce dans le sens $A_1 \rightarrow A_2$ si $i > 0$ (dans le sens contraire pour $i < 0$) et l'index dans la direction de \vec{B} . Le majeur indique alors le sens de la force de Laplace.

À partir de la force de Lorentz, qui est une force microscopique agissant sur des particules individuelles et qui ne travaille pas, nous avons obtenu une force macroscopique agissant sur un solide. Cette force est capable de déplacer le solide et donc d'exercer un travail non nul. Comment comprendre ce résultat ? Il faut interpréter la force de Laplace comme la résultante de l'action des particules sur le réseau cristallin du conducteur. C'est donc une sorte de réaction du support à la force de Lorentz agissant sur ses constituants chargés. Au niveau microscopique cela se traduit par la présence d'un champ électrostatique, le champ de Hall.

4 Puissance des forces de Laplace

Dans le cas de la figure $\vec{F}_{A_1 A_2} = i \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{B} = i \ell \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = i \ell B \vec{e}_x$

Comme $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$, la puissance des forces de Laplace qui s'exercent sur le barreau vaut

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \vec{F}_{A_1 A_2} \cdot \vec{v} = i \ell B v_x$$

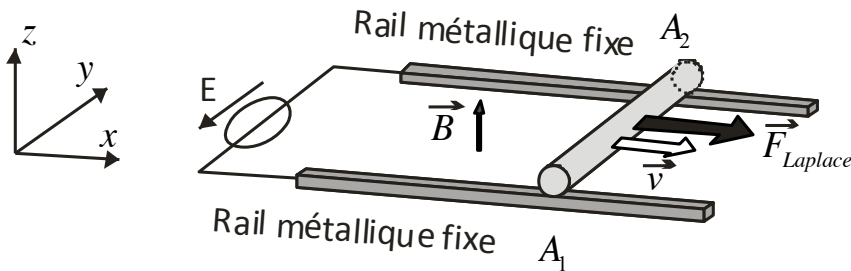


Figure 2.3 – Rails de Laplace, estimation de la puissance reçue par le barreau

Pour votre futur vous : On peut remarquer que cette puissance s'exprime à partir de la variation d'aire S du circuit

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = iB \times (\text{variation d'aire du circuit par unité de temps})$$

ou encore

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = iB \frac{dS}{dt} = i \frac{d(BS)}{dt}$$

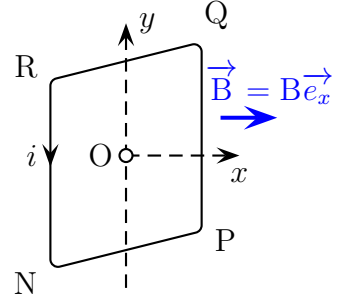
car le champ magnétique est supposé constant et uniforme. On en verra une interprétation lorsqu'on traitera de la loi de Faraday dans le chapitre 13.

Partie II

Action mécanique des forces de Laplace pour une spire en rotation

1 Description de la situation étudiée

On considère une spire rectangulaire de largeur $NP = QR = a$ et de hauteur $PQ = RN = b$, parcourue par un courant i orienté (arbitrairement) de R vers N, en rotation autour d'un axe (Oy) de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_x$ uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.



2 Résultante des forces de Laplace pour un circuit fermé

La résultante des actions mécaniques de Laplace s'obtient en ajoutant vectoriellement les forces élémentaires s'exerçant sur les petits éléments de circuit, ce que l'on note

$$\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} d\vec{F}$$

Comme le champ magnétique est circuit supposé uniforme dans la zone occupé par le circuit, on peut factoriser cette intégrale :

$$\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} d\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \left(\oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Puisque la somme de toutes les petites flèches représentatives des vecteurs élémentaires sur un contour fermé (donc revenant à son point de départ) est forcément nulle

$$\oint_{\text{circuit}} d\vec{\ell} = \vec{0}$$

En conséquence, la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé plongé dans un champ magnétique uniforme est nulle. Il n'y a donc pas d'effet de translation lié aux forces de Laplace dans ce cas.

3 Couple des actions mécaniques des forces de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire

La figure 2.4 permet de se faire une bonne idée de la situation géométrique. La spire est supposée pouvoir librement tourner autour de l'axe (Oy) . Regardons l'action des différentes forces de Laplace sur les différents segments constitutifs de la spire :

Sur QR et NP : les forces de Laplace sont colinéaires à \vec{e}_y et leur moment par rapport à cet axe est nécessairement nul. Elles ne participeront donc pas à la rotation autour de (Oy) .

Sur PQ : La section précédente a montré que la force totale s'écrivait

$$\vec{F}_{PQ} = i \times \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{B} = ibB\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -ibB\vec{e}_z$$

D'après la figure, le bras de levier s'écrit $a/2 \times \sin \alpha$ et la force fait tourner la spire dans le sens direct autour de l'axe (Oy) de sorte que le moment en O de cette force s'écrive

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,PQ} = \frac{a}{2} \sin \alpha \times ibB\vec{e}_y$$

Sur RN : Cette fois-ci, la force change d'orientation

$$\vec{F}_{RN} = i \times \overrightarrow{RN} \wedge \vec{B} = -ibB\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = ibB\vec{e}_z$$

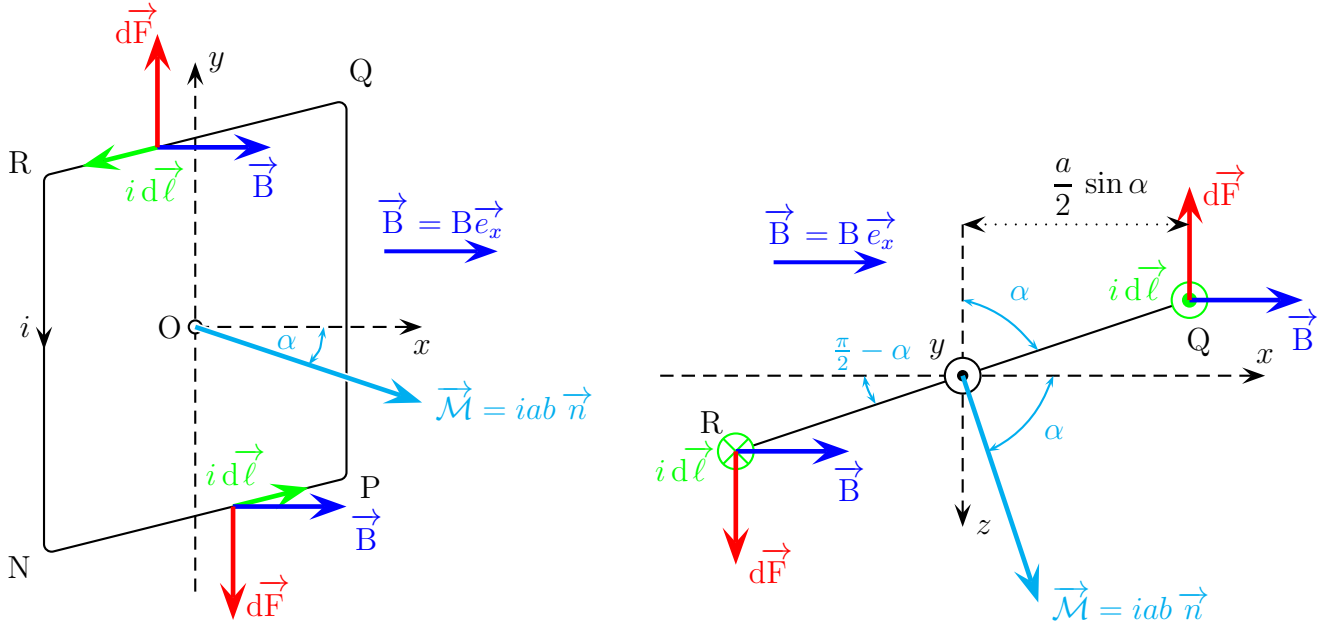


FIGURE 2.4 – Zoom sur l'action des forces de Laplace sur la spire en 3D (à gauche) et en vue du dessus (à droite). Pour des raisons de simplicité de calcul, on va considérer l'angle α comme non algébrique (c'est-à-dire forcément positif) et on fera le lien avec le produit vectoriel $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ à la fin du calcul.

Néanmoins, le bras de levier est le même et la force tend à faire tourner la spire aussi dans le sens direct de sorte que le moment en O s'écrive aussi

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,RN} = \frac{a}{2} \sin \alpha \times ibB\vec{e}_y$$

Il ne reste qu'à sommer les différentes contributions pour obtenir finalement le couple¹ s'exerçant sur le système

$$\vec{\Gamma} = 2 \times \frac{a}{2} \sin \alpha \times ibB\vec{e}_y = \underbrace{iab}_{\text{Moment magnétique}} \times B \times \sin \alpha \vec{e}_y = \vec{\mathcal{M}} \times B \times \sin \alpha \vec{e}_y$$

Or d'après le dessin, le produit vectoriel $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ du moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la spire avec le champ magnétique extérieur \vec{B} est bien selon \vec{e}_y et de norme $\mathcal{M} \times B \times \sin \alpha$ (puisque'on a pris α non algébrique) de sorte que le couple résultant s'écrive

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}}$$

4 Puissance des actions mécaniques de Laplace

Cas général, puissance d'un couple Si on considère un solide soumis à un couple $\vec{\Gamma}$ et fixé à une liaison pivot parfaite d'axe Δ . Le solide est mis en rotation autour de l'axe Δ par le couple et sa position est repérée par un angle θ .

L'objet étant un solide, la puissance des forces intérieures est nulle et en utilisant le théorème de la puissance cinétique dans le référentiel galiléen lié à la liaison pivot :

$$\mathcal{P}(\vec{\Gamma}) = \frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \right) = J_{\Delta} \ddot{\theta} \dot{\theta}$$

1. Puisqu'il s'agit d'un couple, la somme des forces étant bien nulle sur la spire.

Or le théorème du moment cinétique scalaire pour un tel système nous donne

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = \Gamma_{\Delta} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_{\Delta}$$

Et on peut alors exprimer la puissance du couple :

$$\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_{\Delta} \dot{\theta} = \Gamma_{\Delta} \omega$$

En résumé, pour un solide en rotation autour d'un axe Δ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{e}_{\Delta} = \dot{\theta} \vec{e}_{\Delta}$, la puissance d'un couple $\vec{\Gamma}$ est

$$\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_{\Delta} \dot{\theta} = \Gamma_{\Delta} \omega = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$$

Cas du couple de Laplace La puissance du couple exercé par les forces de Laplace peut s'exprimer de la même façon dans notre exemple. La spire est repérée par son angle autour de Oy par rapport à une direction fixe, par exemple \vec{e}_x . Le couple par rapport à y est

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M} B \sin(\widehat{\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}}) \vec{e}_y$$

La spire est repérée par l'angle $\theta = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{\mathcal{M}}})$ qu'elle fait avec l'axe Ox qui a le bon goût de porter aussi le champ magnétique de sorte que

$$\theta = (\widehat{\vec{B}, \vec{\mathcal{M}}}) = -(\widehat{\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}}) \quad \text{et donc} \quad \vec{\Gamma} = -\mathcal{M} B \sin \theta \vec{e}_y$$

Il ne reste plus qu'à faire le produit scalaire avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ pour obtenir l'expression de la puissance

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -\mathcal{M} B \sin \theta \times \dot{\theta} = i \frac{d}{dt} (ab B \cos \theta)$$

Là encore, une interprétation en terme de variation du flux du champ magnétique au travers de la spire pourra être trouvée au chapitre 13 suivant.

Partie III

Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant

1 Équivalence aimant/circuit (rappel)

On appelle dipôle magnétique toute distribution de courants localisés, de moment magnétique non nul et dont les dimensions sont petites vis-à-vis de la distance à laquelle on étudie le champ ainsi créé. Cette étude suppose de travailler dans le cadre de l'ARQS pour pouvoir définir le courant $i(t)$ dans le circuit. On notera que toute distribution de courants permanents ou lentement variables, à vue de loin \dot{z} , est assimilable à un dipôle magnétique. Dans ce contexte un aimant peut donc être remplacé par une petite spire parcourue par un courant et vice versa.

2 Énergie potentielle d'interaction moment magnétique/champ extérieur

Le dipôle magnétique est supposé rigide, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, de dimensions très petites devant les distances où s'exercent ses effets, et placé dans un champ extérieur \vec{B}_{ext} . L'hypothèse du dipôle de petites dimensions permet de pouvoir considérer B_{ext} comme quasi uniforme sur la surface \mathcal{S} limitée par le circuit constituant le dipôle. On définit alors l'énergie potentielle d'interaction du dipôle avec le champ magnétique par

$$E_{\text{p,mag}} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

3 Positions d'équilibre et stabilité

a) Analyse en terme de couple magnétique

En première approximation, on peut considérer que le champ appliqué \vec{B}_{ext} est quasi uniforme au niveau des dimensions du dipôle, l'action du champ sur les courants du dipôle se réduit alors à un couple de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

Ce couple tend à aligner le dipôle suivant la direction et le sens du champ appliqué. Malgré une résultante des forces nulle, le champ magnétique exerce un moment qui va avoir tendance à faire tourner la spire sur elle-même, de telle sorte que son moment magnétique dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$ s'aligne dans la direction de \vec{B}_{ext} .

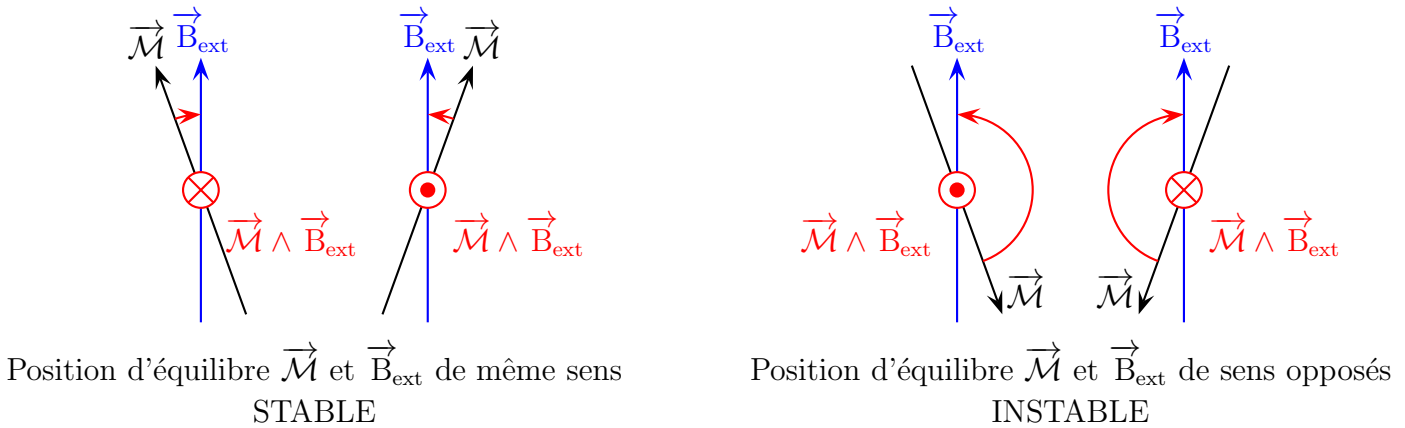


FIGURE 2.5 – Stabilité relatives des différentes orientations possibles vis à vis de la rotation.

b) Analyse en terme d'énergie potentielle d'interaction

Introduisons l'angle $\theta = (\vec{B}_{\text{ext}}, \vec{\mathcal{M}})$. L'énergie potentielle magnétique s'écrit alors

$$E_{\text{p,mag}} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} = -\mathcal{M} B_{\text{ext}} \cos \theta$$

Les positions d'équilibre sont obtenues par annulation de la dérivée (par rapport à θ !)

$$\frac{dE_{\text{p,mag}}}{d\theta} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin \theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pi$$

La stabilité est donnée par le signe de la dérivée seconde

$$\frac{d^2 E_{\text{p,mag}}}{d\theta^2} = \mathcal{M} B_{\text{ext}} \cos \theta \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 E_{\text{p,mag}}}{d\theta^2}(\theta = 0) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E_{\text{p,mag}}}{d\theta^2}(\theta = \pi) < 0$$

ce qui montre bien que le cas d'alignement ($\theta = 0$) est un équilibre stable alors que l'antialignement ($\theta = \pi$) est un équilibre instable, en cohérence avec l'illustration de la figure 2.5

Partie IV

Effet moteur d'un champ magnétique tournant

1 Principe et description d'un moteur synchrone

Les machines synchrones fonctionnent avec des champs magnétiques tournants créés par le stator. Dans la machine synchrone, l'induit est alimenté par un courant continu et possède de ce fait un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ constant qui interagit avec \vec{B} .

Le circuit rotorique (circuit d'induit) possède un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = i\mathcal{P} \vec{n}$ qui interagit avec le champ inducteur par l'intermédiaire d'un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Exemples : alternateur de voiture, TGV Atlantique.

2 Réalisation d'un champ tournant

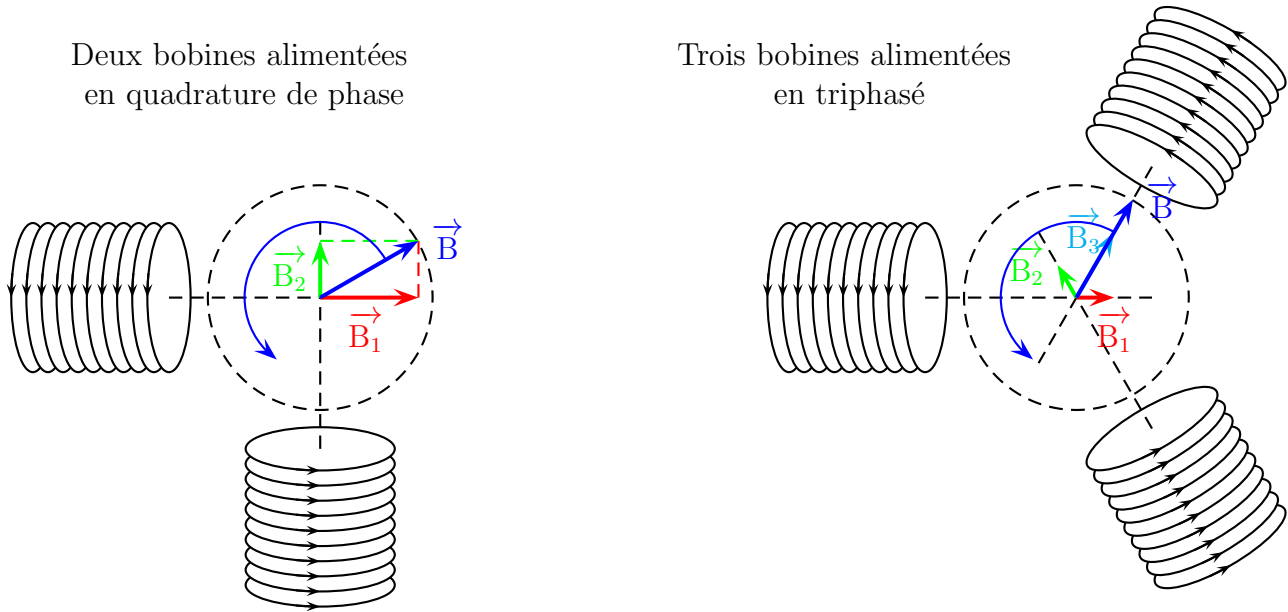


FIGURE 2.6 – Réalisation d'un champ tournant à l'aide de deux ou trois bobines

a) Champ diphasé

Plaçons deux bobines d'axes perpendiculaires, parcourues par des courants sinusoïdaux de même fréquence, mais en quadrature $i_1(t) = I_m \cos \omega_0 t$ et $i_2(t) = I_m \sin \omega_0 t$. Les champs magnétiques créés par ces bobines sont de même norme si le point d'observation est à égale distance sur l'axe des bobines du centre de celles-ci. On a alors

$$\vec{B}_1(t) = B_m \cos \omega_0 t \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(t) = B_m \sin \omega_0 t \vec{e}_y$$

Le champ résultant est la somme des deux contributions vectorielles :

$$\vec{B}(t) = B_m \cos \omega_0 t \vec{e}_x + B_m \sin \omega_0 t \vec{e}_y = B_m \left(\cos \omega_0 t \vec{e}_x + \sin \omega_0 t \vec{e}_y \right) = B_m \vec{e}_r$$

en ayant noté $\theta = \omega_0 t$ pour pouvoir définir un repère polaire associé au champ $\vec{B}(t)$. La norme du champ est constante et sa direction tourne à la vitesse angulaire ω_0 dans le plan (Oxy) . La rotation spontanée de l'aiguille est alors possible.

b) Champ triphasé

Le principe du champ triphasé est le même que le champ diphasé : s'arranger pour que la superposition des trois champs soit de norme constante et que les contributions successives simulent un mouvement de rotation. Cette fois-ci, les bobines sont placées avec un angle de $2\pi/3$ l'une par rapport à l'autre comme indiqué sur la partie droite de la figure 2.6. Les bobines sont alimentés par les courants respectifs

$$i_1(t) = I_m \cos \omega_0 t \quad i_2(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad i_3(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Le calcul détaillé est ici donné à titre indicatif mais n'a pas d'autre intérêt que de s'entraîner à calculer. Les trois champs magnétiques s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(t) &= B_m \cos \omega_0 t \vec{e}_x \\ \vec{B}_2(t) &= B_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) \times \left(\cos \frac{2\pi}{3} \vec{e}_x + \sin \frac{2\pi}{3} \vec{e}_y\right) = B_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{-\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y}{2}\right) \\ \vec{B}_3(t) &= B_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \times \left(\cos \frac{4\pi}{3} \vec{e}_x + \sin \frac{4\pi}{3} \vec{e}_y\right) = B_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{-\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_y}{2}\right) \end{aligned}$$

de sorte que le champ total puisse se factoriser sous la forme

$$\frac{\vec{B}(t)}{B_m} = \underbrace{\left[\cos \omega_0 t - \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)\right]}_{=\frac{3}{2} \cos \omega_0 t} \vec{e}_x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)\right]}_{=\frac{3}{2} \sin \omega_0 t} \vec{e}_y$$

soit finalement
$$\vec{B}(t) = \frac{3}{2} B_m \left(\cos \omega_0 t \vec{e}_x + \sin \omega_0 t \vec{e}_y\right) = \frac{3}{2} B_m \vec{e}_r$$

On retrouve bien un champ tournant de norme constante comme annoncé plus haut.

3 Machine synchrone

On étudie ici l'interaction d'un champ supposé uniforme et d'un moment magnétique constant.

a) Couple

On considère un moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \left[\cos(\omega t - \varphi_0) \vec{e}_x + \sin(\omega t - \varphi_0) \vec{e}_y \right]$$

tournant à vitesse ω constante dans le champ

$$\vec{B}(t) = B_m \left[\cos(\omega_0 t) \vec{e}_x + \sin(\omega_0 t) \vec{e}_y \right]$$

qui, lui, tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 . À un instant t quelconque, l'angle α (de $\vec{\mathcal{M}}$ vers \vec{B}) entre les deux vecteurs vaut la différence des arguments des deux cosinus²

$$\alpha = (\omega_0 - \omega) t + \varphi_0$$

SCHEMA

2. Réfléchir au fait que l'angle entre \vec{e}_x et \vec{e}_r vaut θ et comparer cela à l'écriture de \vec{e}_r dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .

On peut alors calculer le couple magnétique exercé sur le rotor

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M} B_m \sin \alpha \vec{e}_z = \mathcal{M} B_m \sin [(\omega_0 - \omega) t + \varphi_0] \vec{e}_z$$

La valeur moyenne de ce couple n'est non nulle *que* si $\omega = \omega_0$ ce qui justifie l'appellation de machine synchrone puisqu'il faut que le rotor tourne exactement à la même vitesse angulaire que le champ pour que celui-ci puisse avoir une action (motrice ou résistance) sur ce premier. Dans ce cas, on a

$$\vec{\Gamma}_{\text{synchro}} = \mathcal{M} B_m \sin \varphi_0 \vec{e}_z$$

où ω_0 est appelée vitesse de synchronisme et φ_0 angle interne.

b) Fonctionnement en moteur

Cadre général Le couple est moteur si la puissance qu'il donne au système est positive, soit

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} = \underbrace{\mathcal{M} B_m \sin \varphi_0}_{\Gamma_m} \times \omega > 0$$

Cela n'est possible que si $\varphi_0 \in]0; \pi]$, c'est-à-dire si le moment magnétique est en retard sur le champ tournant³. En régime permanent, le couple moteur doit compenser le couple résistant $\Gamma_r < 0$ de sorte que

$$\Gamma_r + \Gamma_m = 0$$

L'augmentation (en valeur absolue) du couple résistant se traduit par une augmentation de l'angle interne. Le couple résistant doit rester (en valeur absolue) inférieur à $\mathcal{M} B_m$.

Stabilité Si $|\Gamma_r|$ augmente (ce qui se traduit par une prise de retard supplémentaire pour $\vec{\mathcal{M}}$ par rapport à \vec{B} , soit une augmentation de φ_0), le couple moteur instantané doit aussi augmenter, ce qui n'est possible que si

$$\varphi_0 \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

3. C'est relativement logique, le moment magnétique ne peut « suivre » le champ que s'il a un temps de retard sur lui.